Силы, действующие на частицы с нулевой и отрицательной энергией

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН,
РГПУ им. А.И. Герцена

Шлейгер Леонид Александрович

:

Метрика Керра

Квадрат интервала в сферических координатах Бойера-Линдквиста будет иметь вид

$$ds^2 = -(1 - \frac{2Mr}{\rho^2})dt^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \\ + (r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2})\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{1}$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2 cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$
M — масса чёрной дыры, a — параметр вращения.
$G = c = 1$
Если $a \to 0$, то $Kerr \to Sch$

Метрика Керра

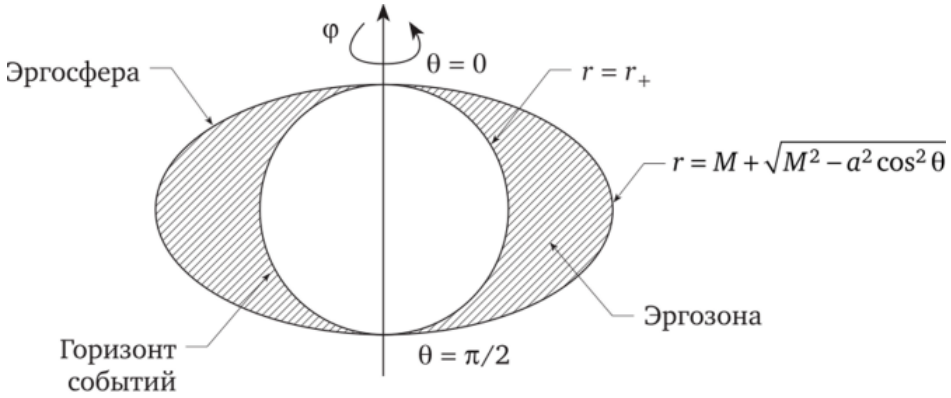
Область пространства-времени при $g_{11} \to \infty$ — **горизонт событий**, его радиус

$$r_g = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{2}$$

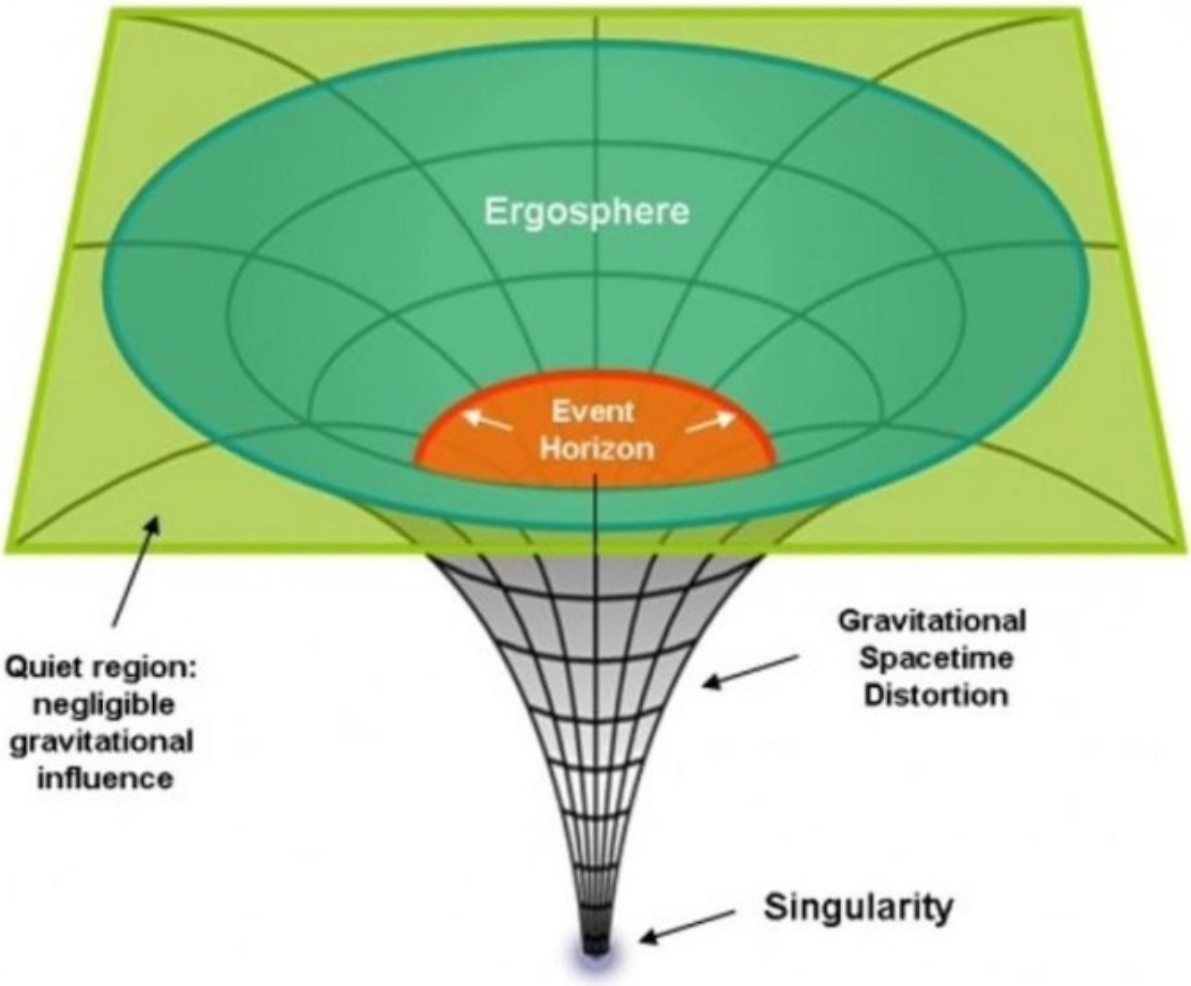
Область пространства-времени при $g_{00} \to 0$ — **предел статичности**

$$r_0(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \tag{3}$$

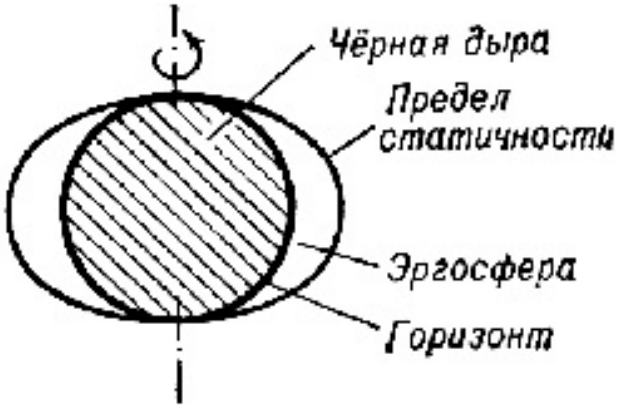
При $\theta = \pi/2 \to r_0 = 2M$.



Метрика Керра



Метрика Керра



Энергия внутри эргосферы

$$E = -\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{t}} = m\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} + m\frac{2Ma}{r}\frac{d\varphi}{d\tau}, \tag{4}$$

$$E = mc^2 - \Omega L, \tag{5}$$

L — момент импульса частицы, Ω — угловая скорость вращения.
При $r \to \infty \quad E \to mc^2$.

Постановка задачи

Напишем выражения для компонент 4-скорости частицы

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\rho^2\Delta}\left(\Sigma(r,\theta)^2 E - 2MraL\right), \tag{6}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\rho^2\Delta}\left(2MarE + L\frac{S(r,\theta)}{\sin^2\theta}\right), \tag{7}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(E^2R(r) + L^2r^2(\frac{2M}{r} - 1) - 4MaEL - S(r,\theta)(Q + r^2)\right) \tag{8}$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(Q + \cos^2\theta(a^2E^2 - \frac{L^2}{\sin^2\theta}) - a^2\cos^2\theta\right) \tag{9}$$

где E и L — энергия и момент импульса, а τ — «собственное» время частицы.

Постановка задачи

$$m\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + m\Gamma^i_{kl}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0, \tag{10}$$

где $x^i = (t, r, \theta, \varphi)$.

$$m\frac{d^2r}{d\tau^2} = -m(\Gamma^1_{11Shr}\dot{r}^2 + \Gamma^1_{11eq}\dot{r}^2 + \Gamma^1_{11ang}\dot{r}^2 + \Gamma^1_{ik}\dot{x^i}\dot{x^k}). \tag{11}$$

Где при $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Gamma^1_{ik\,eq} \neq 0; \quad \Gamma^1_{ik\,ang} = 0. \tag{12}$$

Когда $a \to 0$

$$\Gamma^1_{11Shr}\dot{r}^2 \to \frac{mM}{r^2} \tag{13}$$

Силы действующие на частицы

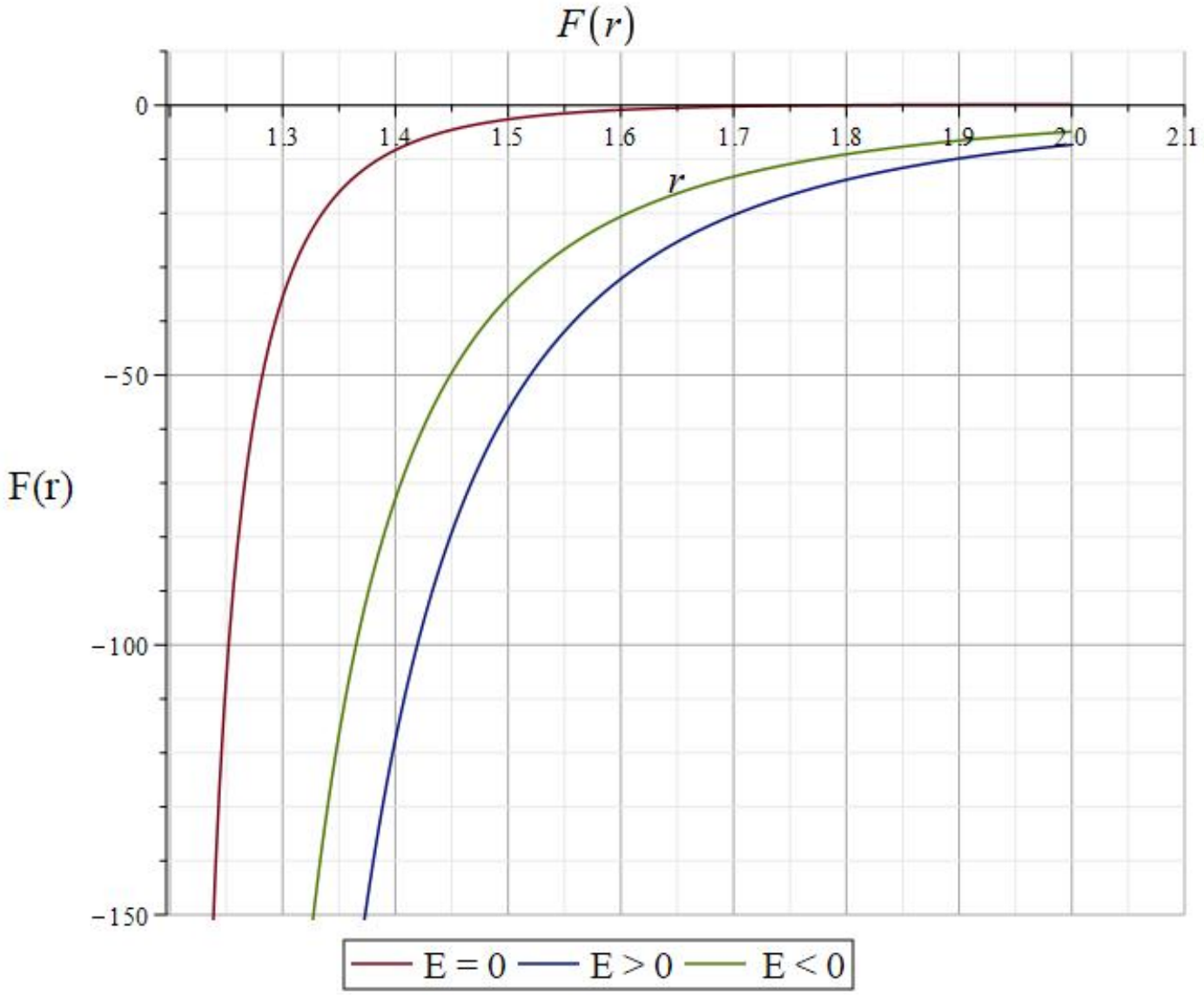
$$m\frac{d^2r}{d\tau^2} = F_{eq} + F_{ang} + F_{Shr}. \tag{14}$$

$$F_{eq} = -\frac{ma^2 r\sin^2\theta}{\rho^2\Delta}\dot{r}^2 + \frac{m\Delta\sin^2\theta A(\theta)}{\rho^4}\dot{\varphi}^2 - \frac{Mm\Delta\sin^2\theta}{\rho^4}\dot{t}^2. \tag{15}$$

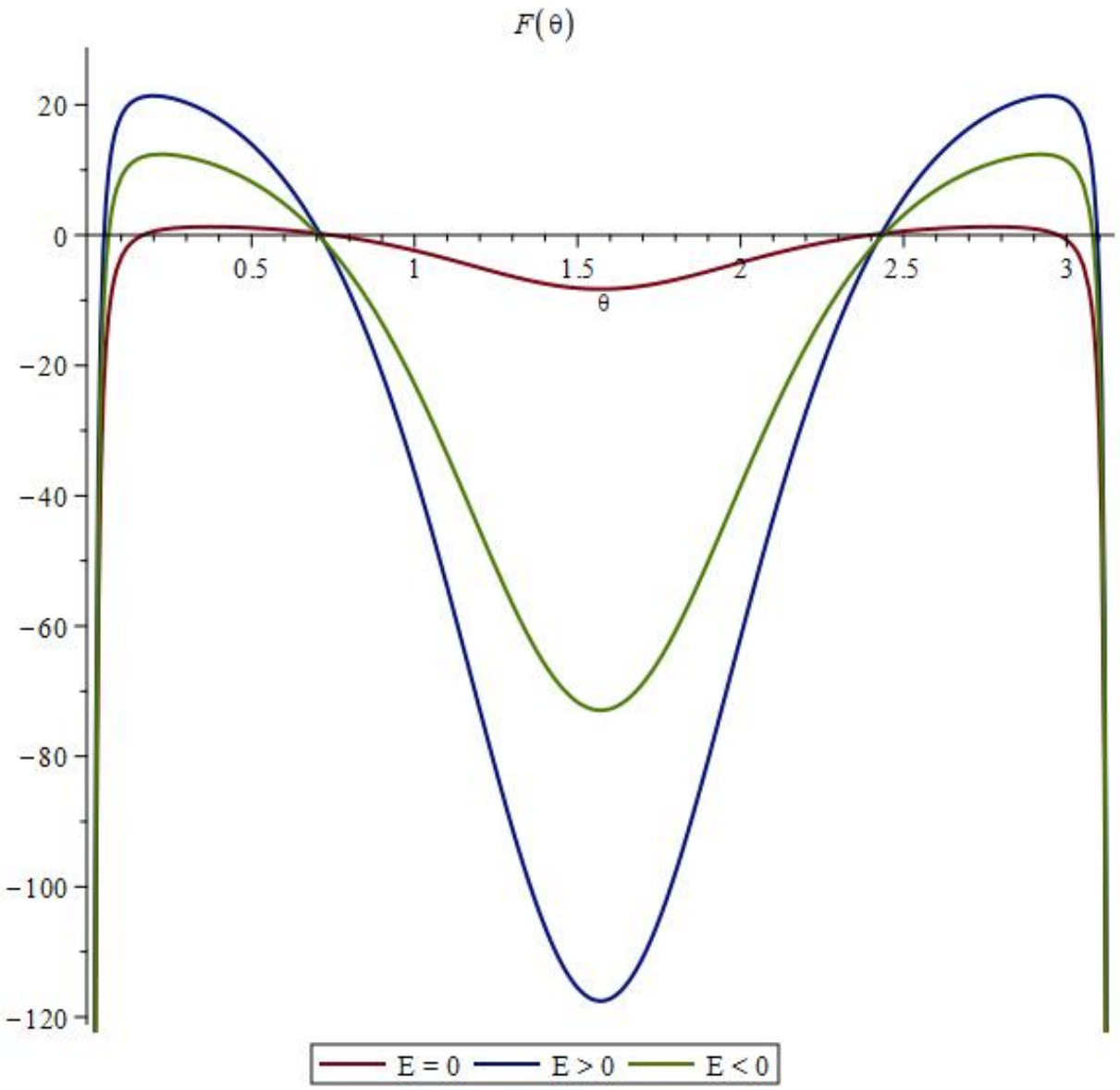
$$F_{ang} = \frac{Mm\cos^2\theta}{\Delta\rho^2}\dot{r}^2 + \frac{mr\Delta}{\rho^2}\dot{\theta}^2. \tag{16}$$

$$F_{Shr} = -\frac{Mmr^2}{\Delta\rho^2}\dot{r}^2 \tag{17}$$

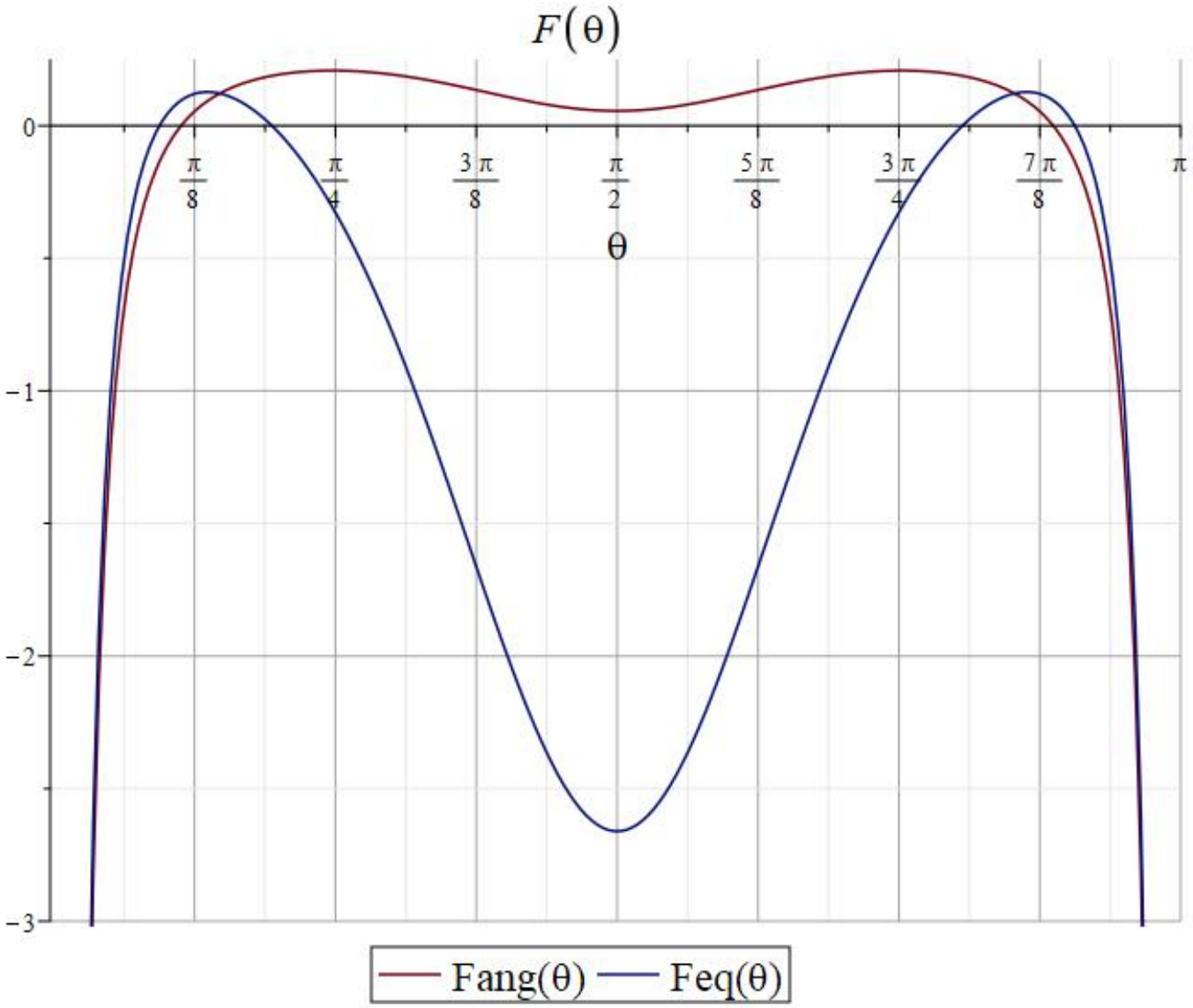
Силы действующие на частицы



Силы действующие на частицы



Силы действующие на частицы



Время падения частиц на горизонт

Оценим время падения частиц с разной энергией на горизонт при $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int d\tau = \int \frac{rdr}{\sqrt{E^2 R(r) - (1 - \frac{2M}{r})L^2 - \frac{4aM}{r}EL - \Delta}} \tag{18}$$

Когда $E = 0$, то $L < 0$

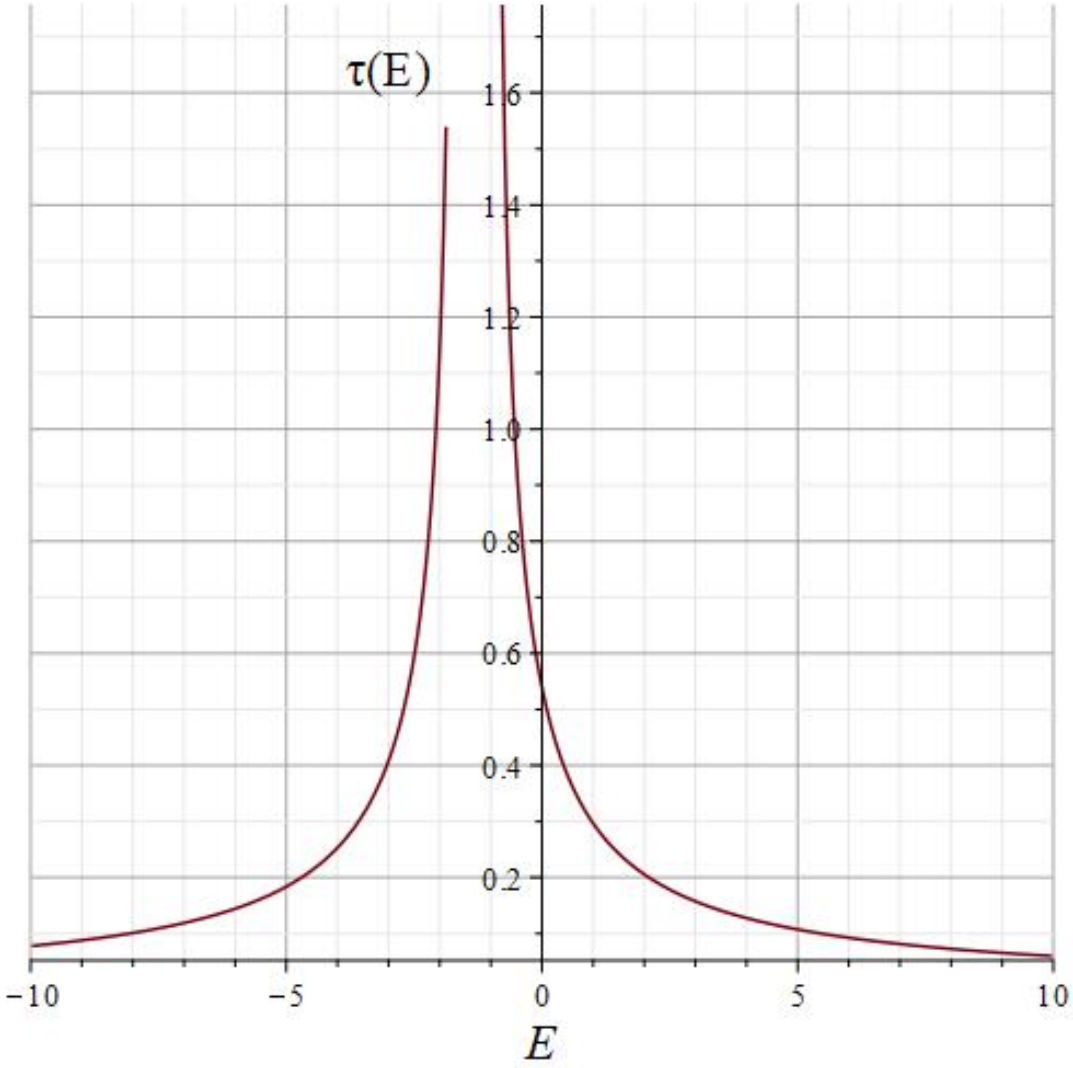
$$\int d\tau = \int \frac{rdr}{\sqrt{-(1 - \frac{2M}{r})L^2 - \Delta}} \tag{19}$$

Условие минимума времени падения τ_{min}

$$\frac{R(r)E}{r^2} - \frac{2MaL}{r^3} = 0; \quad \frac{2R(r)}{r^2} > 0 \tag{20}$$

Выводы

Время падения на горизонт в зависимости от значений энергии



Спасибо за внимание!