Generalized Vaidya horizons and conformal symmetries

Кудрявцев Д.А.
Студент второго курса магистратуры
РПГУ им. Герцена

Вертоградов В.Д.
Научный сотрудник НИИ физики
РПГУ им. Герцена

11.10.2022

Обобщенная метрика Вайдья:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d^2\Omega, \qquad d^2\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{ik} = T_{ik}^{I} + T_{ik}^{II}$$

$$T_{ik}^{I} = \mu l_i l_k$$

$$T_{ik}^{II} = (\rho + P)(l_i n_k + n_i l_k) + P g_{ik}$$

Где l_i, n_i изотропные вектора $(l_i l^i = n_i n^i = 0, l_i n^i = -1)$

Энергетические условия:

Слабое и сильное: $\mu > 0, \rho \geq 0, P \geq 0$

Доминантное: $\mu > 0, \rho \geq |P| \geq 0$

Расширения для обобщенной метрики Вайдья

$$\theta_l = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right)$$

$$\theta_n = -\frac{2}{r}$$

Варианты определения поверхностной гравитации

- По Хэйворду:

$$\kappa_H = \frac{1}{2}\sqrt{-n^a \nabla_a \theta_l}$$

- По Микохаяма и Хэйворду:

$$\kappa_M = -\frac{1}{16\pi r}\int_s d^2\theta \left(n^a \nabla_a \theta_l + l^a \nabla_a \theta_n + \frac{\theta_n}{\Lambda} l^a \nabla_a \Lambda\right)$$

- Через Кодама вектор:

$$\kappa_{K_0} = \frac{1}{4m}(1 - 2m')$$

$n^a\nabla_a\theta_l$ и $l^a\nabla_a\theta_n$ для обощенной метрики Вайдья

- $$n^a\nabla_a\theta_l = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{4m}{r} + 2m'\right)$$
$$l^a\nabla_a\theta_n = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right)$$

Для Вайдья

По Хэйворду:

$$\kappa_H = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{4m}{r}\right)}$$

Через Кодама Вектор:

$$\kappa_{K_0} = \frac{1}{4m}$$

Для обобщенной Вайдья

По Хэйворду:

$$\kappa_H = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{4m}{r} + 2m'\right)}$$

Через Кодама Вектор:

$$\kappa_{K_0} = \frac{1}{4m}(1 - 2m')$$

Горизонт событий в обобщенной метрики Вайдья

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right)\frac{dv}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right)\frac{d^2v}{d\lambda^2} - \frac{\dot{m}}{r}\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 - \frac{m'r - m}{r^2}\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0, \qquad \frac{d^2v}{d\lambda^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{r^2} - \frac{m'}{r}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{\dot{m}}{r} = 0$$

$$r = \frac{m\left[1 + 2m' + (1 - 2m')\sqrt{1 - \frac{16\dot{m}}{(1 - 2m')^2}}\right]}{4\dot{m} + 2m'}$$

Расположение горизонта меняющийся с постоянной скоростью

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{d\lambda} = 4\pi r\left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right)\frac{dv}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2A}{d\lambda^2} = 4\pi\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + r\left(-\frac{2\dot{m}}{r}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 + r\left(-2\frac{m'r - m}{r^2}\right)\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + r\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{d^2v}{d\lambda^2}\right]$$

$$\frac{d^2A}{d\lambda^2} = 0, \qquad \frac{d^2v}{d\lambda^2} = 0$$

$$1 - \frac{2m}{r} - 4\dot{m} - 2m' + \frac{4mm'}{r} = 0$$

$$r = \frac{2m(1 - 2m')}{1 - 2m' - 4\dot{m}}$$

Конформное уравнение Киллинга:

- Вектор Киллинга: $k^a = (v, r, 0,0)$

$$\nabla_a k_b + \nabla_b k_a = \frac{\partial k_a}{\partial x^b} + \frac{\partial k_b}{\partial x^a} - 2\Gamma^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ab}} k_c$$

$$\frac{\dot{m} v}{r} - \frac{m}{r} + m' = 0$$

$$m(v, r) = \lambda r^{\Omega} v^{1-\Omega} + \mu v$$

Для $\Omega = 1$ (случай пыли)

$$2r^2 - rv + \lambda r v^2 - \mu v^2 = 0$$

$$r = \frac{v}{4}\left[1 - \lambda v + \sqrt{(\lambda v - 1)^2 + 8\mu}\right]$$

Замена координат и вид метрики:

- $$r = R^2 e^t \qquad v = e^t$$

$$ds^2 = e^{2t}\left\{\left(2R^2 - 1 + 2\frac{\left(\lambda R^{2\Omega} + \mu\right)}{R^2}\right)dt^2 + 4RdtdR + R^4 d^2\Omega\right\}$$

Конформный вектор Киллинга в старых координатах:

$$k^a = (v, r, 0,0)$$

Конформный вектор Киллинга в новых координатах:

$$k^a = (1,0,0,0)$$

Энергия: $E = -e^{2t}\left(2R^2 - 1 + 2\frac{\left(\lambda R^{2\Omega} + \mu\right)}{R^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \lambda} - 2e^{2t}R\frac{\partial r}{\partial \lambda}$

Момент количества движения: $L = e^{2t}R^4\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$

Диагонализация метрики

- Замена координат для диагонализации:

$$R = \tilde{r}, \qquad t = f(\tilde{r}, \mathrm{T})$$

Условие диагонализации:

$$2\dot{f}\{f'(2\tilde{r}^2 - \Delta) + 2\tilde{r}\}dTd\tilde{r} = 0, \qquad \text{где } \Delta = \frac{\tilde{r}^2 - 2\left(\lambda\tilde{r}^{2\Omega} + \mu\right)}{\tilde{r}^2}$$

$$f(\tilde{r}, T) = -\int \frac{2\tilde{r}^3 d\tilde{r}}{2\tilde{r}^4 - \tilde{r}^2 + 2\lambda\tilde{r}^{2\Omega} + 2\mu} + \mathrm{C(T)}$$

$$ds^2 = e^{2\left\{\int -\frac{2\tilde{r}^3}{2\tilde{r}^4 - \tilde{r}^2 + 2\lambda\tilde{r}^{2\Omega} + 2\mu} d\tilde{r} + C(t)\right\}} \left[\frac{2\tilde{r}^4 - \tilde{r}^2 + 2\left(\lambda\tilde{r}^{2\Omega} + \mu\right)}{\tilde{r}^2}\dot{C}^2 dT^2 + \frac{12\tilde{r}^4}{2\tilde{r}^4 - \tilde{r}^2 + 2(\lambda\tilde{r}^{2\Omega} + \mu)} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^4 d^2\Omega\right]$$

$$\dot{\mathrm{C}} = 1, \qquad \frac{1}{12\tilde{r}^2} = e^{2\xi}, \qquad b(r) = \frac{11\tilde{r}^4 + \tilde{r}^2 - 2\left(\lambda\tilde{r}^{2\Omega} + \mu\right)}{12\tilde{r}^3}$$

$$ds^2 = e^{2f}\left[e^{2\xi}\left(1 - \frac{\mathrm{b}(\tilde{r})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{dT}^2 + \left(1 - \frac{\mathrm{b}(\tilde{r})}{\tilde{r}}\right)^{-1} \mathrm{d}\tilde{r}^2 + \tilde{r}^4 d^2\Omega\right]$$

•

Приложение

$$ds^2 = e^{2t}\left\{\left(2R^2 - 1 + 2\frac{\left(\lambda R^{2\Omega} + \mu\right)}{R^2}\right)dt^2 + 4RdtdR + R^4 d^2\Omega\right\}$$

$$m(v,r) = \lambda r^{\Omega} v^{1-\Omega} + \mu v$$

$$R = \tilde{r}, \qquad t = f(\tilde{r}, \mathrm{T}), \qquad \Delta = \frac{\tilde{r}^2 - 2\left(\lambda \tilde{r}^{2\Omega} + \mu\right)}{\tilde{r}^2}$$

$$ds^2 = e^{2f}\left\{(2\tilde{r}^2 - \Delta)\left(f'^2 d\tilde{r}^2 + 2f'\dot{f}d\tilde{r}dT + \dot{f}^2 dT^2\right) + 4\tilde{r}f' d\tilde{r}^2 + 4\tilde{r}\dot{f}dTd\tilde{r} + \tilde{r}^4 d^2\Omega\right\}$$