Квантовая хромодинамика. Лекция 1

Юрий А. Марков

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

(Иркутск, 19 октября 2020 г.)

Лагранжиан свободного спинорного поля в КЭД имеет вид:

$$\mathcal{L}^0_{QED} = \bar{\psi}\big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\big)\psi, \quad \partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu, \tag{1.1}$$

где $x=(ct,\mathbf{x})$ – 4-радиус-вектор, γ^μ – матрицы Дирака, $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$ – дираковски-сопряжённый спинор, а индексы μ и ν пробегают значения $0{,}1{,}2{,}3$. Лагранжиан инвариантен относительно глобальных преобразований фазы ψ-поля:

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{i\omega}\psi(x), \quad \omega = \mathrm{const}.$$

Пусть $\omega = \omega(x)$ – локальная функция 4-координаты x. Тогда лагранжиан (1.1) приобретает добавку

$$\delta\mathcal{L}_{QED} = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\big(\partial_\mu\omega(x)\big)\psi(x). \tag{1.2}$$

Для сохранения свойства инвариантности вводим калибровочное поле $A_\mu(x)$:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}\big(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu(x) - m\big)\psi$$

с законом преобразования –

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\omega(x).$$

Добавляем кинетический член для калибровочного поля: $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{1.3}$$

– тензор напряжённости электромагнитного поля.

Лагранжиан спинорного и электромагнитного полей имеет вид:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.4}$$

где e – константа взаимодействия. Данный лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований:

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{i\omega(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \dfrac{1}{e}\,\partial_\mu\omega(x), \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\psi(x) = (\psi_\alpha)$, α – спинорный индекс, принимающий значения $1, 2, 3, 4$.

Данное преобразование образует группу, так как его двукратное применение есть снова преобразование такого же вида. Такая группа простых фазовых преобразований называется $U(1)$ группой и является абелевой. В электродинамике генератором группы является оператор электрического заряда $\hat{Q}(t) = \int \hat{j}^0(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$, сохраняющийся во времени.

Понятие внутреннего (зарядового) пространства. Принцип относительности в зарядовом пространстве Г. Вейля (1929): *полевые конфигурации* (ψ, A_μ) *и* $(e^{i\omega(x)}\psi, A_\mu + (1/e)\partial_\mu\omega(x))$ *описывают одну и ту же физическую ситуацию* .

Уравнения движения

Уравнения движения получаются из принципа наименьшего действия, который требует обращения в ноль первой вариации действия $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}\, d^4x, \quad \delta\mathcal{S} = 0.$$

Используя выражение (2.1), мы приходим к уравнению Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = -e\,(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) \equiv -j_\nu \tag{1.6}$$

и уравнению Дирака

$$i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) = m\psi(x), \tag{1.7}$$

где $D_\mu(x) \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ – ковариантная производная, $j_\nu = (\rho, \mathbf{j})$ – 4-вектор тока. В силу антисимметричности тензора $F_{\mu\nu}$ из (1.6) следует

$$\partial^\nu j_\nu(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0.$$

Полученное уравнение означает сохранение электрического заряда.

Найдём функцию Грина (пропагатор) $D_{\mu\nu}(x-y)$ для уравнения Максвелла (1.6). Если подставить тензор $F_{\mu\nu}$ в (1.6), тогда уравнение перепишется в виде:

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = -j_\mu, \tag{1.8}$$

где символ $\Box$ обозначает оператор Даламбера. Решение определяется с помощью функции Грина стандартным образом

$$A_\mu(x) = -\int D_{\mu\nu}(x-y)\, j^\nu(y)\, d^4y. \tag{1.9}$$

Подставляя последнее в (1.8), получаем уравнение на пропагатор в координатном пространстве:

$$\Box D_{\mu\nu}(x-y) - \partial_\mu \partial^\lambda D_{\lambda\nu}(x-y) = i\, g_{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y), \tag{1.10}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор. Уравнение (1.10) удобно рассматривать в импульсном пространстве:

$$\left(-k^2 g_{\mu\lambda} + k_\mu k_\lambda\right) D^{\lambda\nu}(k) = i\delta_\mu^{\ \nu}.$$

Из этого уравнения видно, что матрица $D^{\lambda\nu}(k)$ должна быть обратной к матрице $\left(-k^2 g_{\mu\lambda} + k_\mu k_\lambda\right)$. Однако данная матрица вырождена, а значит, *не имеет обратной*.

Фотонный пропагатор

Действительно, если искать решение как сумму двух слагаемых:

$$D^{\lambda\nu}(k) = A(k^2)\left(g^{\lambda\nu} - \frac{k^\lambda k^\nu}{k^2}\right) + B(k^2)\frac{k^\lambda k^\nu}{k^2}, \tag{1.11}$$

разделяя его на продольную и поперечную составляющие, приходим к уравнению

$$A(k^2)(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) = i g_{\mu\nu},$$

которое не имеет решений, так как член с функцией $B(k^2)$, описывающий вклад нефизических продольных фотонов, пропадает. Необходимо, чтобы функция $B(k^2)$ содержала актуальную бесконечность.

Для решения задачи необходимо добавить в лагранжиан калибровочно-неинвариантное выражение. Простейшая лоренц-инвариантная добавка имеет вид:

$$\triangle\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2, \tag{1.12}$$

где ξ – произвольное число (параметр калибровки). Тогда уравнение Максвелла принимает вид:

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu + \frac{1}{\xi}\partial_\mu \partial^\nu A_\nu = -j_\mu, \tag{1.13}$$

а соответствующее ему уравнение на функцию Грина в импульсном пространстве переходит в

$$\left(-k^2 g_{\mu\lambda} + k_\mu k_\lambda - \frac{1}{\xi} k_\mu k_\lambda\right) D^{\lambda\nu}(k) = i\delta_\mu^{\ \nu}. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) имеет единственное решение:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - \frac{i\xi}{k^2}\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{1.15}$$

При добавлении правила обхода полюсов $k^2 \to k^2 + i0$, мы имеем стандартный фотонный пропагатор в калибровке Лоренца. В пределе $\xi \to \infty$ добавка к лагранжиану исчезает, а последнее слагаемое в (1.15) стремится к бесконечности. В промежуточных вычислениях считаем параметр ξ конечным, а в окончательных результатах переходим к пределу. Однако в этом нет необходимости, физические амплитуды калибровочно-инвариантны и не зависят от ξ.

2. Унитарная унимодулярная группа $SU(N)$

В теории Янга-Миллса реализуется локальная калибровочная инвариантность относительно преобразований *неабелевой* группы, а именно относительно унитарной унимодулярной группы $SU(N)$. Пусть U – элемент группы $SU(N)$, т.е. матрица размера $(N \times N)$, удовлетворяющая свойствам:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I, \quad \det U = 1. \tag{2.1}$$

Условие *унитарности* означает, что при преобразовании $\psi \to U\psi$ сохраняется квадрат модуля

$$\psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^{N} \psi^{i*} \psi^i.$$

Такой вид имеют вероятности, наблюдаемые на опыте. *Унимодулярность* означает отсутствие свободы в выборе общей фазы поля ψ.

Преобразование общей фазы образует отдельную группу $U(1)$ и калибровочная инвариантность относительно последней может быть использована отдельно для описания электромагнитного взаимодействия кварковых полей ψ.

Матрица U описывается $N^2 - 1$ независимыми вещественными параметрами ω^a, $a = 1, \dots, N^2 - 1$. Общее представление группового элемента U задается в виде матричной экспоненты:

$$U = \mathrm{e}^{i\omega^a t^a}, \tag{2.2}$$

где t^a – генераторы группы $SU(N)$, являющиеся матрицами размера $(N \times N)$.

Из условий унитарности и унимодулярности группы $SU(N)$ следует:

$$(t^a)^\dagger = t^a, \quad \mathrm{tr}(t^a) = 0. \tag{2.3}$$

Генераторы группы образуют полный набор, то есть любую эрмитовую бесследовую матрицу размера $(N \times N)$ можно представить в виде линейной комбинации матриц t^a с вещественными коэффициентами и, в частности,

$$\left[t^a, t^b\right] = i f^{abc} t^c, \tag{2.4}$$

где f^{abc} – вещественные антисимметричные структурные константы, обладающие свойством

$$f^{abc} f^{abd} = \mathrm{tr}(T^c T^d) = N \delta^{cd} \equiv C_A \delta^{cd}, \quad (T^a)^{bc} \equiv -i f^{abc}. \tag{2.5}$$

Условие нормировки определяется соотношением:

$$\mathrm{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \equiv T_F \delta^{ab}. \tag{2.6}$$

Матрицы $\{t^a\}, a = 1, \ldots, N^2 - 1$, образуют базис алгебры Ли группы $SU(N)$.

Квадратичный оператор Казимира: $C_q = t^a t^a = \dfrac{N^2 - 1}{2N} I \equiv C_F I$.

Генераторы групп $SU(2)$ и $SU(3)$

Генераторы группы $SU(2)$ выражаются через матрицы Паули: $t^a = \frac{1}{2}\tau^a, a = 1, 2, 3$:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Структурные константы определяются антисимметричным тензором: $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$.
Генераторы группы $SU(3)$ выражаются через матрицы Гелл-Манна: $t^a = \frac{1}{2}\lambda^a$, $a = 1, \ldots, 8$, где

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Компоненты структурных констант, отличные от нуля: $f^{123} = 1$ и

$$f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{367} = \frac{1}{2}, \qquad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Генераторы $t^3 \equiv h_1$ и $t^8 \equiv h_2$ образуют коммутативную подалгебру: $\left[h_1, h_2\right] = 0$.

Лагранжиан свободного спинорного поля имеет вид:

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(0)} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi,$$

где ψ - комплексный вектор в некотором (фундаментальном, присоединенном и т.п.) представлении. Локальное преобразование волновой функции:

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x), \quad U(x) = \mathrm{e}^{i\omega^a(x)t^a} \in SU(N). \tag{3.1}$$

Вводим компенсирующее поле, поле Янга-Миллса $A_{\mu}^a(x)$. Инвариантность лагранжиана достигается заменой производной ∂_{μ} на ковариантную D_{μ}:

$$\partial_{\mu} \to D_{\mu}(x) \equiv \partial_{\mu} - igA_{\mu}^a t^a, \tag{3.2}$$

которая должна обладать следующим свойством:

$$D_{\mu}\psi \to UD_{\mu}\psi.$$

Учитывая унитарность группы ($U^{\dagger}U = 1$), имеем цепочку равенств

$$D_{\mu}\psi \to (\partial_{\mu} - igA_{\mu}^a t^a)U(x)\psi = U(x)[\partial_{\mu} + U^{\dagger}(\partial_{\mu}U) - igU^{\dagger}A_{\mu}^a t^a)U(x)]\psi.$$

Отсюда вытекает закон преобразования калибровочного поля:

$$A_{\mu}^a t^a \to UA_{\mu}^a t^a U^{\dagger} + \frac{i}{g}U(\partial_{\mu}U^{\dagger}). \tag{3.3}$$

Тензор напряжённости поля Янга-Миллса есть обобщение соответствующего выражения электродинамики:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{e}\left[D_\mu, D_\nu\right], \qquad D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x).$$

Тогда тензор напряжённости поля Янга-Миллса определяется как

$$F^a_{\mu\nu} t^a = \frac{i}{g}\left[D_\mu, D_\nu\right], \qquad D_\mu \equiv \partial_\mu - igA^a_\mu t^a,$$

откуда следует

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{3.4}$$

Тензор $F^a_{\mu\nu}$ преобразуется по присоединённому представлению группы $SU(N)$:

$$F^a_{\mu\nu} t^a \to U F^a_{\mu\nu} t^a U^\dagger, \quad F_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu}\, t^a.$$

Калибровочно-инвариантный кинетический член полей A^a_μ:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\, F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \tag{3.5}$$

Хромодинамика, или теория Янга-Миллса является теорией калибровочных полей, в которой роль группы калибровочной симметрии выполняет цветовая группа $SU(N_c)$, где $N_c = 3$. Новое дополнительное квантовое число было введено M.Y. Han и Y. Nambu (1965) и независимо советским учёным Б.В. Струминским (1965), которое позднее в работах M. Gell-Mann и других (1972, 1973) было названо *цветом*.

Лагранжиан **хромодинамики**, обладающий локальной $SU(N_c)$ цветовой инвариантностью, имеет вид:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f \big(\gamma^\mu (i\partial_\mu + g A^a_\mu t^a) - m_f\big)\psi_f - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}. \qquad (3.6)$$

Здесь кварки каждого сорта f (flavour) $f = u, d, s, c, b, t$ с массой m_f образуют изотопические векторы с N_c-компонентами:

$$\psi_f = \begin{pmatrix} \psi_f^1 \\ \vdots \\ \psi_f^{N_c} \end{pmatrix} = (\psi_f^i), \quad i = 1, \ldots, N_c, \qquad (3.7)$$

и преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(N_c)$:

$$\psi_f \to U\psi_f.$$

Глюонное поле. Уравнения движения

Поля A^a_μ в квантовой теории поля описывают безмассовые глюоны (glue - клей). Из действия $\mathcal{S}$, отвечающего лагранжиану $\mathcal{L}_{QCD}$, получаем уравнения движения для калибровочного поля в хромодинамике: уравнение Янга-Миллса –

$$\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu} \equiv [D^\mu, F_{\mu\nu}] = -g t^a \sum\nolimits_f \bar{\psi}_f \gamma_\nu t^a \psi_f \equiv -J^a_\nu t^a, \tag{3.8}$$

где J^a_ν – ток материи и уравнение Дирака –

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi_f(x) = m_f \psi_f. \tag{3.9}$$

Прямым вычислением можно показать, что $\mathcal{D}^\nu \mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu}(x) = 0$, откуда вытекает

$$\mathcal{D}^\mu J_\mu = [D^\mu, J^a_\mu t^a] = 0.$$

Последнее равенство не означает сохранения цветного заряда, отвечающего току J^a_μ и вообще сохранения чего-либо. Отсутствие сохраняющегося ковариантного тока, порождаемого только «материей», связано с тем, что групповые заряды переносятся также и самими полями A^a_μ и, следовательно, могут перетекать с полей материи на поля A^a_μ и обратно.

Тождество Бьянки

В электродинамике имеется также вторая пара уравнений Максвелла:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0,$$

или

$$\partial^\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right) = 0,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ – антисимметричный тензор 4 ранга. Аналог этого уравнения в теории полей Янга-Миллса следует из тождества Якоби для ковариантой производной:

$$[D^\mu, [D^\nu, D^\lambda]] + [D^\nu, [D^\lambda, D^\mu]] + [D^\lambda, [D^\mu, D^\nu]] = 0,$$

что даёт тождество Бьянки

$$\mathcal{D}^\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right) = 0, \qquad F_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu}\, t^a.$$

Это тождество играет важную роль в теории инстантонов, при вычислении действия для инстантонных решений уравнения Янга-Миллса, удовлетворяющих условию самодуальности или антисамодуальности:

$$F^a_{\mu\nu} = \pm \widetilde{F}^a_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad \widetilde{F}^a_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{a\lambda\sigma}.$$

В теории полей Янга-Миллса возникают те же проблемы с определением пропагатора глюонного поля. Они решаются добавлением выражения:

$$\triangle\mathcal{L}^{\xi}_{QCD} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^{2}. \tag{3.10}$$

Представим лагранжиан хромодинамики в виде суммы трёх частей:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}^{(0)}_{QCD} + \mathcal{L}_{(q\bar{q}A)} + \mathcal{L}_{(A^3+A^4)},$$

где

$$\mathcal{L}^{(0)}_{QCD} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \frac{1}{4}\left(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu}\right)^{2} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^{2}$$

– свободная часть лагранжиана,

$$\mathcal{L}_{(q\bar{q}A)} = gA^{a}_{\mu}\sum\nolimits_{f}\left(\bar{\psi}_{f}\,\gamma^{\mu}t^{a}\psi_{f}\right)$$

– лагранжиан взаимодействия поля Янга-Миллса с кварковыми полями и

$$\mathcal{L}_{(A^3+A^4)} = \frac{1}{2}\,gf^{abc}(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu})A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{1}{4}\,g^{2}f^{abc}f^{ade}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}A^{d\mu}A^{e\nu}$$

– лагранжиан самодействия поля Янга-Миллса.

Диаграммная техника. Трёхглюонная вершина

Рассмотрим правило вычисления трёхглюонной вершины. Для этого поле $A^a_\mu(x)$, рассматриваемое как вторично-квантованный оператор, представим в виде разложения по операторам рождения и уничтожения:

$$\hat{A}^a_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \sum_\lambda \{\hat{a}^a(k,\lambda)\epsilon_\mu(k,\lambda)\mathrm{e}^{-ik\cdot x} + \hat{a}^{\dagger a}(k,\lambda)\epsilon^*_\mu(k,\lambda)\mathrm{e}^{ik\cdot x}\},$$

где $k_0 = |\mathbf{k}|$ и $\epsilon_\mu(k,\lambda)$, $\lambda \in \{0,1,2,3\}$ – некоторые канонические тетрады, связанные со светоподобным 4-вектором k_μ следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \epsilon_\mu(k,0) = \delta_{\mu 0}, & \\ \epsilon_0(k,i) = 0, & i = 1,2,3, \\ \epsilon_\mu(k,3) = \dfrac{1}{k_0}\, k_\mu - \delta_{\mu 0}, & \\ \boldsymbol{\epsilon}(k,i) \cdot \mathbf{k} = 0, & i = 1,2, \\ \epsilon_\mu(k,i)\, \epsilon^\mu(k,j) = -\delta_{ij}, & i,j = 1,2,3. \end{cases} \tag{3.11}$$

Операторы рождения и уничтожения имеют коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{a}^a(k,\lambda), \hat{a}^{\dagger b}(k',\nu)\right] = g_{\lambda\nu}\, \delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad [\hat{a},\hat{a}] = [\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger] = 0, \tag{3.12}$$

вакуумное состояние определяется как $\hat{a}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$. Из коммутационных соотношений (3.12) следует:

$$\langle 0|\hat{a}^a(k,\lambda)\, \hat{a}^{\dagger b}(k',\nu)|0\rangle = g_{\lambda\nu}\, \delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{3.13}$$

Трёхглюонная вершина, в которой все импульсы – «выходящие»:

$$\int d^4x \langle 0| \hat{a}^a(k_1, \mu)\, \hat{a}^b(k_2, \nu)\, \hat{a}^c(k_3, \lambda)\, i\hat{\mathcal{L}}_{QCD}|0\rangle, \tag{3.14}$$

где необходимо оставить только слагаемое, кубичное по полю A^a_μ:

$$i\hat{\mathcal{L}}_{QCD} \to igf^{a'b'c'}\big(\partial^{\mu'}A^{a'\nu'}(x)\big)A^{b'}_{\mu'}(x)A^{c'}_{\nu'}(x). \tag{3.15}$$

Подставляя $A^a_\mu(x)$ в (3.15) и используя правила коммутации (3.12), находим вершину. При вычислении диаграмм следует добавить общий множитель $(2\pi)^4\delta(p_i - p_f)$, описывающий сохранение полного 4-импульса и коэффициент (-1) на каждую замкнутую фермионную петлю.

Для полноты картины запишем также разложение кварковой ψ-функции по операторам рождения и уничтожения:

$$\hat{\psi}^i_\alpha(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_f}{p_0}}\sum_{\pm s}\Big[\hat{b}^i(p,s)\, u_\alpha(p,s)\, e^{-ip\cdot x} + \hat{d}^{*i}(p,s)\, v_\alpha(p,s)\, e^{ip\cdot x}\Big],$$

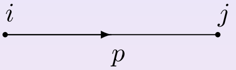
$$\hat{\bar{\psi}}^i_\alpha(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_f}{p_0}}\sum_{\pm s}\Big[\hat{d}^i(p,s)\, \bar{v}_\alpha(p,s)\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^{*i}(p,s)\, \bar{u}_\alpha(p,s)\, e^{ip\cdot x}\Big],$$

где $p_0 = (\mathbf{p}^2 + m_f^2)^{1/2}$ и правила антикоммутации имеют вид:

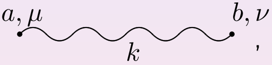
$$\big\{\hat{b}^i(p,s), \hat{d}^{*j}(p',s')\big\} = \delta^{ij}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ss'}.$$

Элементы фейнмановских диаграмм

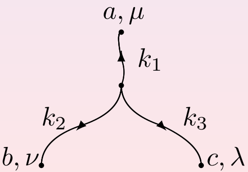
Правила Фейнмана, которые генерируются основным лагранжианом (3.6) и добавкой (3.10) представлены ниже на рисунке 1:



, $\dfrac{i}{\hat{p} - m_f + i0}\,\delta^{ij}$ – пропагатор кварка; $i, j = 1, \ldots, N_c$;

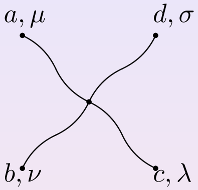


, $\dfrac{-i}{k^2 + i0}\,\delta^{ab}\left(g_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} + \xi\,\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0}\right)$ – пропагатор глюона, $a, b = 1, \cdots, N_c^2 - 1$;



, $-g f^{abc}[(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\mu\lambda}]$ – трёхглюонная вершина;

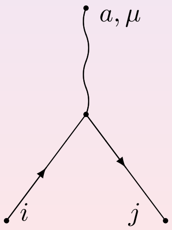
Элементы фейнмановских диаграмм



,

$$
\begin{aligned}
-ig^2[f^{abe}f^{cde}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) &+ \\
+f^{ace}f^{bde}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) &+ \\
+f^{ade}f^{cbe}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\lambda\sigma}&]
\end{aligned}
$$

– четырёхглюонная вершина;



,

$ig\,\gamma^\mu(t^a)^{ji}$ – вершина кварк-глюонного взаимодействия.

Рис. 1. Правила Фейнмана для квантовой хромодинамики

Спасибо за внимание!