Квантовая хромодинамика. Лекция 2

Юрий А. Марков

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

(Иркутск, 20 октября 2020 г.)

Почему в КЭД добавка $\triangle\mathcal{L}^{\xi}_{QED} = -\frac{1}{2\xi}\,(\partial^{\mu}A_{\mu})^2$ не влияет на наблюдаемые эффекты? Калибровочные преобразования, оставляющие инвариантным лагранжиан $\mathcal{L}_{QED}$ имеют вид:

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{i\omega(x)}\psi(x), \\ A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \dfrac{1}{e}\,\partial_{\mu}\omega(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Калибровочное преобразование с бесконечно малой фазой $\varepsilon\omega(x)$, $\varepsilon \ll 1$:

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \delta A_{\mu}, \quad \delta A_{\mu} = \frac{1}{e}\,\varepsilon\partial_{\mu}\omega(x),$$

$$\delta\mathcal{S}_{QED} = -\delta\int \frac{1}{2\xi}\,(\partial^{\mu}A_{\mu})^2\,d^4x = -\frac{\varepsilon}{e\xi}\int \omega(x)\Box(\partial^{\mu}A_{\mu})\,d^4x.$$

Из принципа наименьшего действия следует:

$$\Box\eta = 0, \quad \eta \equiv (\partial^{\mu}A_{\mu}). \tag{1.2}$$

Если в начале процесса полагать $\eta = 0$, то это значение сохранится навсегда. Добавка $\triangle\mathcal{L}^{\xi}_{QED}$ есть несущественная константа. Флуктуации продольных фотонов не взаимодействуют с физическими полями, поэтому ограничение амплитуд этих флуктуаций не сказывается на физических процессах.

“Продольные” глюоны

Рассмотрим неабелев случай.

$$\triangle\mathcal{L}^{\xi}_{QCD} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^{2}. \tag{1.3}$$

Закон преобразования калибровочного поля:

$$A_{\mu} \to UA_{\mu}U^{\dagger} + \frac{i}{g}U(\partial_{\mu}U^{\dagger}), \quad A_{\mu} \equiv A^{a}_{\mu}t^{a}, \quad U(x) = \mathrm{e}^{i\omega^{a}(x)t^{a}}.$$

Инфинитезимальное калибровочное преобразование –

$$U \simeq I + i\varepsilon\omega^{a}(x)t^{a}, \quad A_{\mu} \to A_{\mu} + \delta A_{\mu}, \quad \delta A_{\mu} = \frac{1}{g}\,\varepsilon\mathcal{D}_{\mu}\omega(x),$$

$$\delta\mathcal{S}_{QCD} = -\frac{\varepsilon}{g\xi}\int \omega^{a}\left(\mathcal{D}_{\nu}\partial^{\nu}(\partial^{\mu}A_{\mu})\right)^{a} d^{4}x.$$

Введём обозначение: $\eta^{a} \equiv \partial^{\mu}A^{a}_{\mu}$ (“продольные” глюоны), тогда

$$\left(\mathcal{D}_{\mu}\partial^{\mu}\eta\right)^{a} \equiv \Box\eta^{a} + gf^{abc}A^{b}_{\mu}\partial^{\mu}\eta^{c} = 0. \tag{1.4}$$

В отличии от КЭД условие $\eta^{a} = \partial^{\mu}A^{a}_{\mu} = 0$ в начале процесса не означает, что поле η не возникнет с течением времени. Оно может генерироваться полем A^{a}_{μ}.

Добавка $\triangle\mathcal{L}^{\xi}_{QCD}$ приводит к возможности появления η-частиц как в конечных продуктах, так и в петлях. Глюонное поле возбуждает флуктуации η-частиц.

Присутствие в пространстве состояний, в котором определены поля, нефизических векторов приводит к нарушению соотношения унитарности. $\hat{S}$-матрица рассеяния является унитарным оператором, т.е.

$$\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{S}\hat{S}^\dagger = I, \qquad \hat{S} = I + i\hat{\mathcal{T}}. \tag{2.1}$$

Мнимая часть амплитуды перехода $\langle a|\hat{\mathcal{T}}|b\rangle$ системы из состояния $|a\rangle$ в состояние $|b\rangle$ из условия унитарности равна

$$\mathrm{Im}\langle a|\hat{\mathcal{T}}|b\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{all},c}\langle c|\hat{\mathcal{T}}|b\rangle\langle c|\hat{\mathcal{T}}|a\rangle^*, \qquad \sum_{\mathrm{all},c}|c\rangle\langle c| = I. \tag{2.2}$$

Разложение по константе взаимодействия:

$$\hat{\mathcal{T}} = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \hat{\mathcal{T}}_n,$$

с точностью до второго порядка малости по g имеем –

$$\mathrm{Im}\langle a|\hat{\mathcal{T}}_2|b\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{all},c}\Big\{\langle c|\hat{\mathcal{T}}_0|b\rangle\langle c|\hat{\mathcal{T}}_2|a\rangle^* + \langle c|\hat{\mathcal{T}}_2|b\rangle\langle c|\hat{\mathcal{T}}_0|a\rangle^* + \langle c|\hat{\mathcal{T}}_1|b\rangle\langle c|\hat{\mathcal{T}}_1|a\rangle^*\Big\}.$$

Выписанное условие унитарности справедливо только в пространстве физических состояний. В калибровке Лоренца соотношение унитарности справедливо для КЭД, но не для КХД, что связано с самодействием глюонов.

Рассеяние кварка на антикварке

Факт нарушения унитарности в неабелевых калибровочных теориях был обнаружен впервые De Witt (1964) и R.P. Feynman (1963).

Простейший пример процесса, приводящего к нарушению унитарности: рассеяние кварка на антикварке во втором порядке теории возмущения. Здесь имеется больше десятка связных диаграмм Фейнмана, из которых только две диаграммы нарушают унитарность:

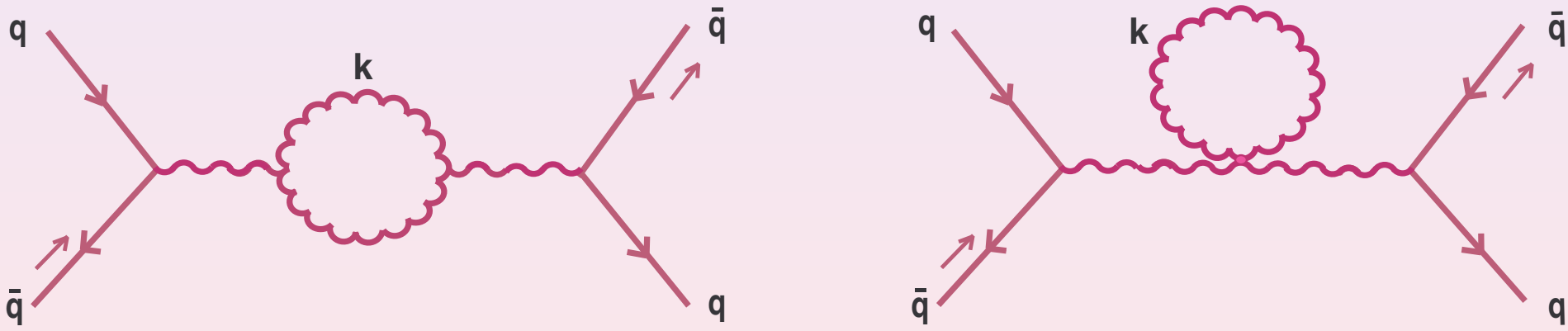

Рис. 1: Диаграммы с глюонной петлей и глюонным “головастиком”, нарушающие унитарность процесса $q\bar{q} \to q\bar{q}$

Мнимая часть амплитуды рассеяния $\mathcal{T}_4$ определяется мнимой частью поляризационного тензора Π_g

$$\mathrm{Im}\langle q\bar{q}|\hat{\mathcal{T}}_4|q'\bar{q}'\rangle \sim \mathrm{Im}\Pi_g^{(2)}(k), \tag{2.3}$$

где

Рис. 2: Глюонный поляризационный тензор во втором порядке теории возмущения

В размерной регуляризации вклад от глюонного “головастика” равен нулю. Вычисления для первой диаграммы приводят к следующему выражению:

$$\mathrm{Im}\Pi^{\mu\nu}_{aa'}(k) = \delta_{aa'} N_c \frac{g^2}{32\pi^2}\,\theta(k^2)\left\{-\frac{19}{6}\,k^2 g^{\mu\nu} + \frac{22}{6}\,k^\mu k^\nu\right\},$$

Мнимая часть поляризационного тензора во втором порядке теории возмущения является конечной величиной при расходимости всего выражения $\Pi_g^{(2)}(k)$.

Мнимая часть амплитуды рассеяния $\mathcal{T}_4$ должна быть равна величине

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{физ.},\,c}\langle q\bar{q}|\hat{\mathcal{T}}_2|c,\text{физ.}\rangle\langle c,\text{физ.}|\hat{\mathcal{T}}_2^{\dagger}|q'\bar{q}'\rangle\sim$$

$$\sim\delta_{aa'}N_c\sum_{\eta_1,\eta_2}\mathcal{A}_\mu(k_1,k_2;\eta_1,\eta_2)\mathcal{A}^*_\nu(k_1,k_2;\eta_1,\eta_2),\quad k^\mu\mathcal{A}_\mu=0,$$

т.е. квадрату амплитуды процесса $q\bar{q}\to gg$ с физическими глюонами g во внешних линиях. Здесь $k_1+k_2=k$ и $\eta_{1,2}=\pm1$ значения спиральности глюонов.

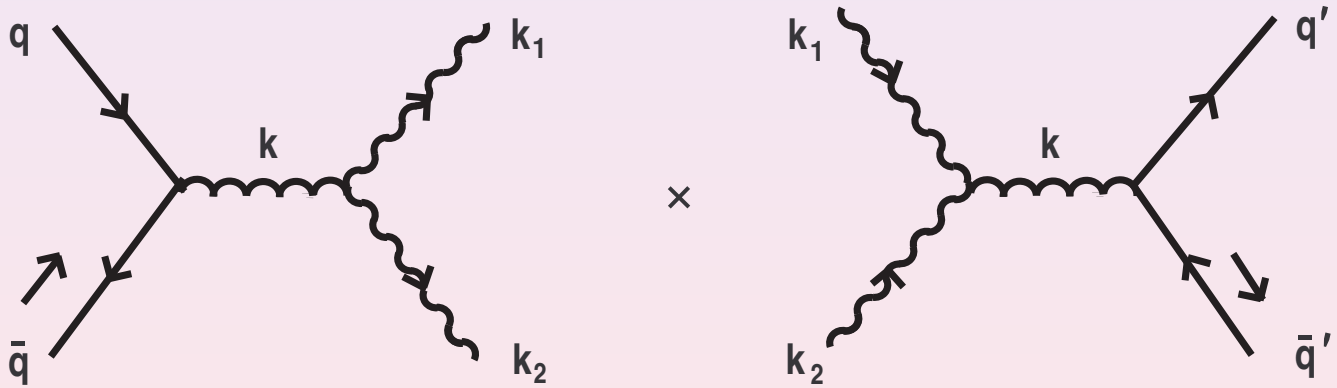

Рис. 3: Амплитуда процесса аннигиляции $q\bar{q}\to gg$

Т.к. $k_\mu\,\mathrm{Im}\Pi^{\mu\nu}_{aa'}(k)\neq0$, то два таким образом вычисленные выражения не совпадают. Лагранжиан $\mathcal{L}^{\xi}_{QCD}$ переводит физические состояния в нефизические.

В конечном состоянии η-частицы можно устранять руками – матрицу плотности каждого конечного глюона выбирать поперечной, т.е. полагать $\partial^\mu A^a_\mu = 0$. Как быть с петлями?

Л.Д. Фаддеев и В.Н. Попов (1967) предложили способ устранения η-частиц из петель: необходимо добавить мультиплет полей c^a, $\bar{c}^a$, называемых "духами" (ghost) Фаддеева-Попова, которые удовлетворяют тому же уравнению, что и продольные глюоны:

$$\left(\mathcal{D}_\mu \partial^\mu c\right)^a \equiv \Box c^a + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu c^c = 0, \tag{3.1}$$

и считать, что *скалярные поля c^a квантуются по статистике Ферми*

$$\left\{\hat{c}^a(p), \hat{\bar{c}}^b(p')\right\} = \delta^{ab}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{3.2}$$

т.е. каждой замкнутой петле с полями c^a следует приписать дополнительный множитель (-1). Два нефизических поля η и c будут взаимно сокращать друг друга. Правила квантования по статистике Ферми можно обеспечить, считая поля c^a и $\bar{c}^a$ принимающими значения в грассмановой алгебре:

$$c^a c^b = -c^b c^a, \quad c^a \bar{c}^b = -\bar{c}^b c^a, \quad \bar{c}^a \bar{c}^b = -\bar{c}^b \bar{c}^a.$$

Духовые поля не появляются ни в начальных, ни в конечных состояниях.

Ведение c-полей можно описать лагранжианом $\mathcal{L}_{\rm gh} = \left(\partial^\mu \bar{c}^a\right)\left(\mathcal{D}_\mu c\right)^a$. Полный эффективный лагранжиан квантовой хромодинамики –

$$\mathcal{L}^{\rm eff}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD} + \triangle\mathcal{L}^{\xi}_{QCD} + \mathcal{L}_{\rm gh}.$$

Духовая добавка $\mathcal{L}_{\rm gh}$ генерирует новые элементы в диаграммы Фейнмана:

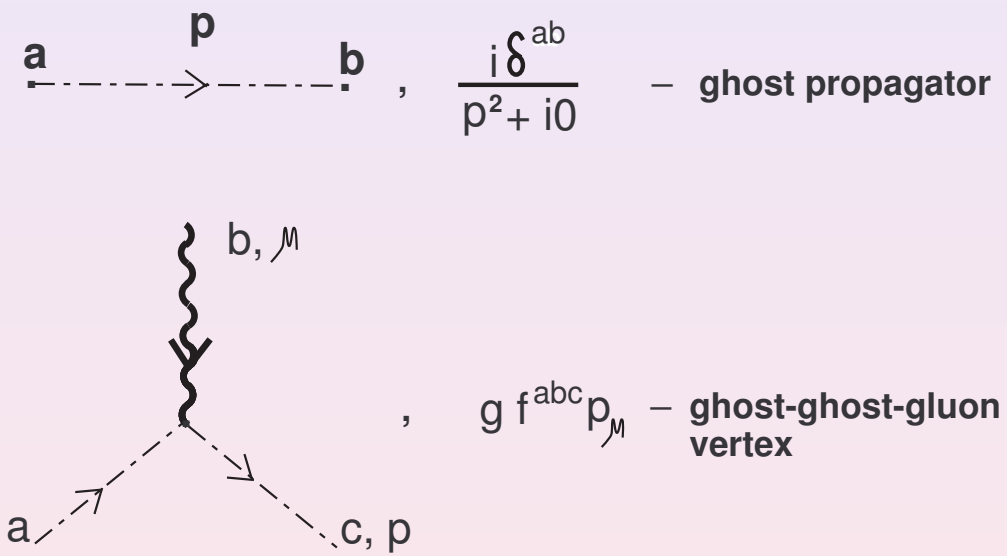

Рис. 4: Духовый пропагатор и дух-дух-глюонная вершина

Вершина выражается через импульс только входящей скалярной частицы, в отличие от обычной вершины взаимодействия физических скалярных частиц с векторной (сумма импульсов входящей и выходящей скалярной частицы).

По построению, духи распространяются только в петлях, с множителем (-1). Для восстановления унитарности в процессе рассеяния кварка на антикварке необходимо добавить график с петлей духов:

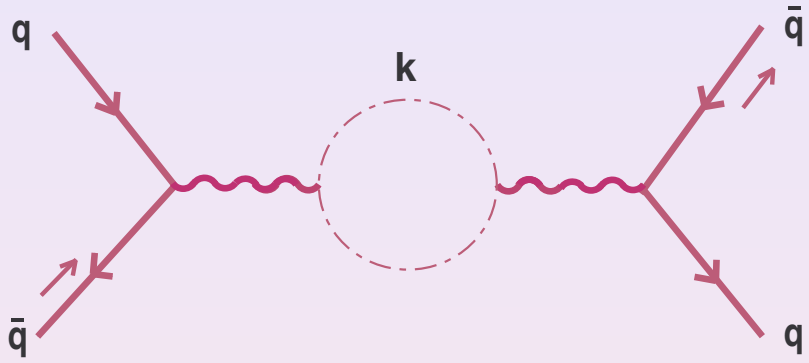

Рис. 5: Духовый вклад в процесс рассеяния $q\bar{q} \to q\bar{q}$

Полное выражение для глюонного поляризационного тензора:

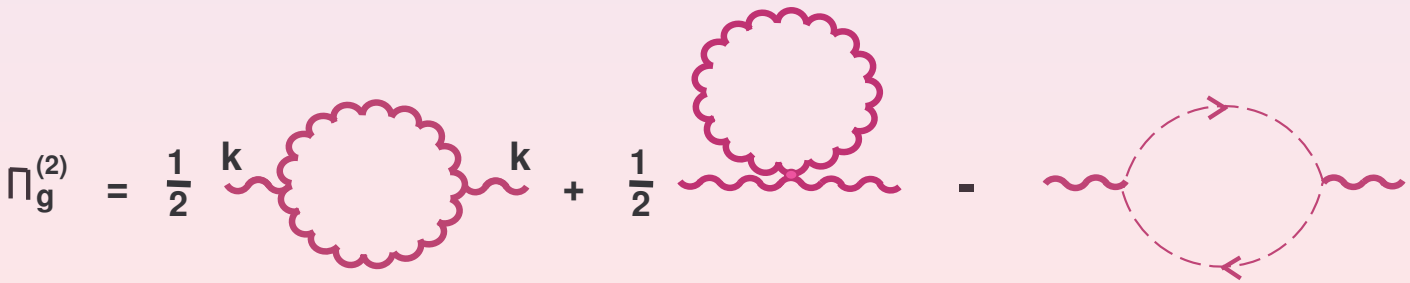

Рис. 6: Глюонный поляризационный тензор во втором порядке теории возмущения

BRST-преобразование

Введение духовых полей можно рассматривать как способ восстановления калибровочной инвариантности КХД лагранжиана. В работах C. Becchi, A. Rouet, R. Stora (1975) и независимо советским физиком И.В. Тютиным (1975) было показано, что полный лагранжиан инвариантен относительно нелинейного преобразования, содержащего инфинитезимальный антикоммутирующий параметр ε, такой что

$$\varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon c = -c\varepsilon, \quad \varepsilon\psi_f = -\psi_f\varepsilon, \quad \varepsilon A_\mu = A_\mu\varepsilon.$$

Преобразование Бекки-Рюэ-Стора-Тютина (BRST-transformation):

$$\begin{cases} A^a_\mu(x) \to A^a_\mu(x) + \left(\mathcal{D}_\mu c\right)^a \varepsilon, \qquad \omega^a(x) = \varepsilon c^a(x), \\ \psi_f \to \psi_f - i\varepsilon c^a t^a \psi_f, \\ c^a(x) \to c^a(x) - \dfrac{1}{2} f^{abd} c^b c^d(x)\varepsilon, \\ \bar{c}^{\,a}(x) \to \bar{c}^{\,a}(x) + \dfrac{1}{\xi}\left(\partial^\mu A^a_\mu\right)\varepsilon. \end{cases} \tag{3.3}$$

Преобразования, нетривиальным образом перепутывающие коммутирующие и антикоммутирующие величины, получили название суперпреобразований.

BRST-преобразования приводят к обобщенным тождествам Уорда и играют ключевую роль в доказательстве калибровочной инвариантности и унитарности перенормированной S-матрицы.

BRST-оператор

Из глобальной инвариантности полного эффективного действия квантовой хромодинамики относительно BRST-преобразований, в силу теоремы Нетер, следует сохранение тока:

$$J^B_\mu = F^a_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}^\nu c\right)^a - \left(\partial^\nu A^a_\nu\right)^2\left(\mathcal{D}_\mu c\right)^a + \frac{1}{2}\partial_\mu \bar{c}^a f^{abd} c^b c^d. \tag{3.4}$$

Заряд (BRST-оператор)

$$Q_B = \int J^B_0 d\mathbf{x}$$

сохраняется во времени и является генератором BRST-преобразований. В дополнение существует ещё один закон сохранения, связанный с масштабным преобразованием духовых полей:

$$c \to \mathrm{e}^{\alpha} c, \quad \bar{c} \to \mathrm{e}^{-\alpha}\bar{c}.$$

Сохраняющийся ток имеет вид –

$$J^c_\mu = \bar{c}^a\left(\mathcal{D}_\mu c\right)^a - \partial_\mu \bar{c}^a c^a. \tag{3.5}$$

Заряд

$$Q_c = \int J^c_0 d\mathbf{x}$$

называется духовым зарядом, а его собственные значения – духовыми числами.

Справедливы соотношения

$$[Q_c, c(x)] = c(x), \quad [Q_c, \bar{c}(x)] = -\bar{c}(x), \tag{3.6}$$

т.е. духовое число духа $+1$, антидуха -1. Операторы Q_B и Q_c образуют BRST-алгебру:

$$\begin{aligned} &\{Q_B, Q_B\} = 2Q_B^2 = 0, \\ &[Q_c, Q_B] = Q_B, \quad \mathrm{gh}(Q_B) = +1, \\ &[Q_c, Q_c] = 0, \qquad \mathrm{gh}(Q_c) = 0. \end{aligned}$$

BRST-оператор Q_B является нильпотентным. Физический сектор можно выделить условиями:

$$\hat{Q}_B|\Phi\rangle = 0, \quad \hat{Q}_c|\Phi\rangle = 0. \tag{3.8}$$

Операторы $\hat{Q}_B$ и $\hat{Q}_c$ коммутируют с оператором Гамильтона $\hat{H}$, поэтому подпространство $|\Phi\rangle$ инвариантно относительно временных сдвигов и матрица рассеяния переводит физические состояния в физические.

В 1978 г. В.Н. Грибовым было показано, что калибровка Лоренца

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

не решает полностью проблему фиксации калибровки. Рассмотрим чистую теорию Янга-Миллса, без полей материи ψ. Основной принцип калибровочной теории: *полевые конфигурации калибровочного поля*

$$A_\mu(x) \quad \text{и} \quad A^U_\mu(x) = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}\,U(\partial_\mu U^\dagger) \tag{4.1}$$

описывают физически идентичные поля. Здесь $A_\mu = A^a_\mu t^a$, $U(x) = \mathrm{e}^{i\omega^a(x)t^a}$ и матрицы t^a – генераторы цветовой группы $SU(N_c)$. Общий вид условия, фиксирующего калибровку:

$$\Phi(A^U; x) = 0. \tag{4.2}$$

Это уравнение должно иметь единственное решение для произвольного A_μ. В рамках пертурбативной теории (слабые поля) это выполняется. В силу существенной нелинейности уравнения (4.2) для функции $U = U(x)$ возможно проявление неоднозначности решений.

Неопределенность в фиксации калибровки возникает при условии:

$$AL \sim 1/g_s,$$

где A – эффективная величина калибровочного поля и L – характерный пространственный размер поля, т.е. в непертурбативном режиме.

Потребуем, чтобы для произвольного $A_\mu(x)$ существовало $U{=}U(x)$ такое, что

$$\partial^\mu A^U_\mu(x) = 0 \quad \text{или} \quad \partial_\mu\big(U\big(D^\mu[A]U^\dagger\big)\big) = 0, \tag{4.3}$$

где $D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu$. Различают три типа решений:

1. решения, принадлежащие калибровочным орбитам, пересекающие гиперповерхность, фиксирующую калибровку только раз (идеальное калибровочное условие);
2. решения, относящиеся к калибровочным орбитам никогда непересекающим гиперповерхность, фиксирующую калибровку;
3. решения, относящиеся к калибровочным орбитам, пересекающим гиперповерхность больше чем один раз.

Графически это можно представить следующим образом:

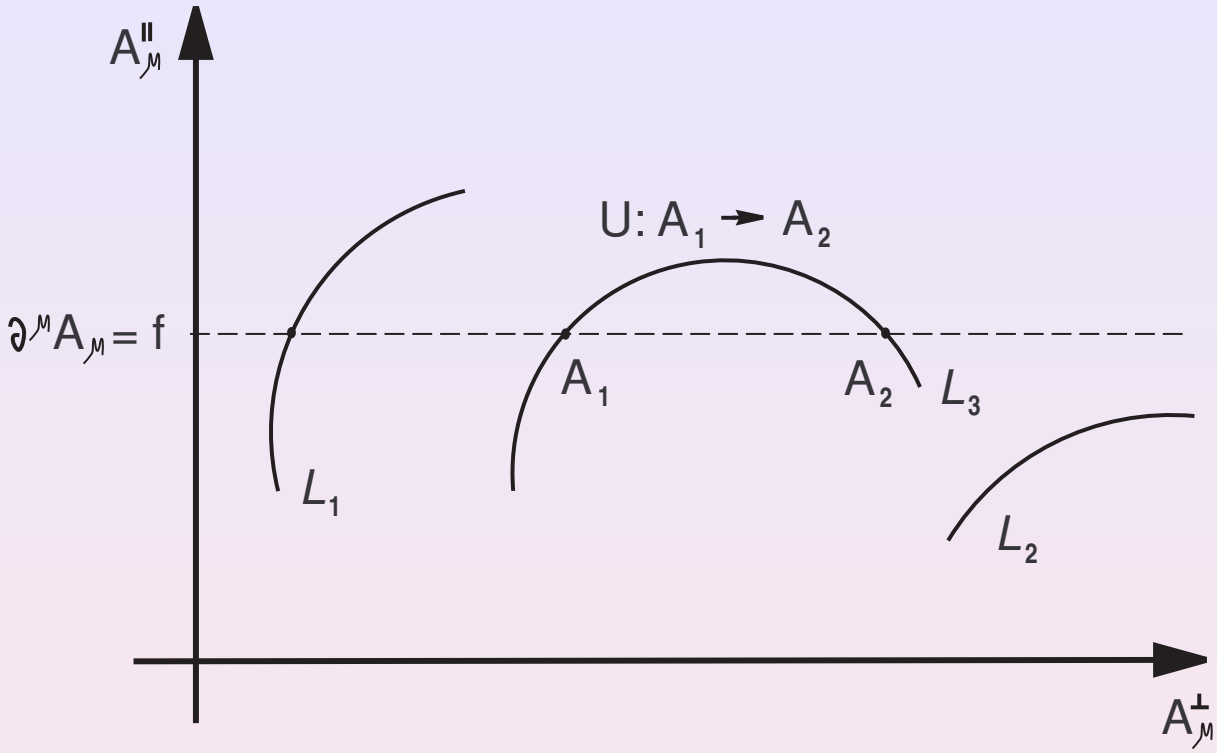

Рис. 7: Три типа калибровочных орбит

Здесь $f = f(x)$ – некоторая заданная функция и разложение $A_\mu = A^{\parallel}_\mu + A^{\perp}_\mu$:

$$A^{\parallel}_\mu = \partial_\mu \frac{1}{\Box}(\partial^\nu A_\nu), \quad A^{\perp}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \frac{1}{\Box}(\partial^\nu A_\nu). \tag{4.4}$$

Для фиксированного A_μ, калибровочное преобразование определяет линию L (как функцию U), на которой лагранжиан $\mathcal{L}_{QCD} = \text{const}$.

Третий случай был открыт В.Н. Грибовым. Эта многозначность решений была названа копиями Грибова, т.е. для каждой конфигурации, удовлетворяющей калибровочному условию, существуют калибровочно-эквивалентные конфигурации, удовлетворяющие тому же самому условию

$$\partial^\mu A_{1\mu}(x) = \partial^\mu A_{2\mu}(x) = 0, \qquad A_{2\mu}(x) = \frac{i}{g} U\big(D^\mu[A_1]U^\dagger\big).$$

Матрица преобразований $U(x) = \mathrm{e}^{i\omega^a(x)t^a}$ удовлетворяет уравнению:

$$\partial_\mu\big(U\big(D^\mu[A_1]U^\dagger\big)\big) = 0$$

или получающемуся из него заменой $A_{1\mu}$ на $A_{2\mu}$ и U на $U^\dagger$. Бесконечно малое калибровочное преобразование $\varepsilon\omega(x)$, где $\omega \equiv \omega^a t^a$ и $\varepsilon \ll 1$, приводит к

$$\hat{M}_L\omega = \partial_\mu\big(\partial^\mu\omega - ig[A^\mu, \omega]\big) = 0. \tag{4.5}$$

Появление грибовских копий эквивалентно требованию, чтобы оператор Фаддеева-Попова имел нулевые моды (нулевые собственные значения).

Если поле A_μ достаточно мало, т.е. $LA \sim 1/g_s$, тогда не существует нулевых мод. Уравнение

$$-\hat{M}_L \omega = \epsilon_i \omega, \qquad \epsilon_i = \epsilon_i[A] \tag{4.6}$$

разрешимо только для $\epsilon_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$. При возрастании амплитуды появ-

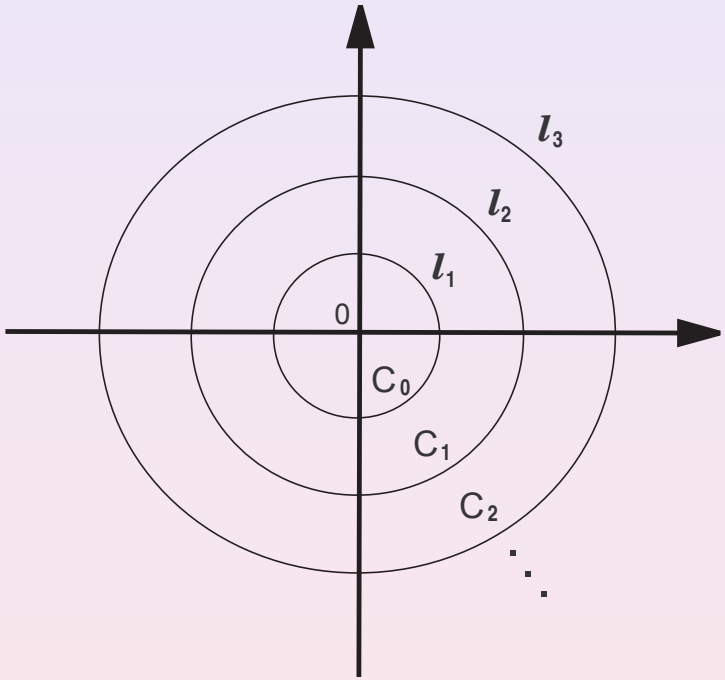

Рис. 8: Грибовские горизонты

ляется решение с $\epsilon_i = 0$, которое становится решением с $\epsilon_i < 0$ по мере возрастания. Для большей амплитуды уровень $\epsilon_i = 0$ может появится снова и т.д.. Линии уровня l_i называются горизонтами Грибова.

Область Грибова

Поля, для которых уравнение $\hat{M}_L\omega = 0$ разрешимо, разделяют функциональное пространство на области, в каждой из которых уравнение

$$-\hat{M}_L\omega = \epsilon\omega$$

имеет нетривиальное собственное значение. При пересечении горизонта знак функционального определителя $\mathbf{Det}\hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}}[\mathbf{A}]$ изменяется.

Если существуют два близких эквивалентных поля, то они всегда будут лежать на разных сторонах соответствующей кривой l_n. Для любой конфигурации поля, лежащей в области C_n близко к горизонту l_n всегда будет существовать эквивалентная конфигурация в области C_{n-1}, близкая к тому же самому горизонту l_n.

Учёт грибовских копий необходим при функциональном интегрировании. Интегрирование должно быть ограничено вблизи нуля, т.е. в области C_0 (область Грибова). Калибровочные поля должны быть отделены конечной областью от границы l_1, чтобы не существовало бы пути, соединяющего конфигурации полей A_μ малой амплитуды (для которых выполняется теория возмущений) с полями из других областей.

Литература

1. Индурайн Ф. “Квантовая хромодинамика”, 1986, Москва, Мир.
2. Grosin A. “Lectures on QED and QCD”, hep-ph/0508242.
3. Smilga A.V. “Lectures on the foundation of QCD”, hep-ph/9901412.
4. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. “Введение в квантовую теорию калибровочных полей”, 1988, Москва, Наука.
5. Ченг Т.П., Ли Л.-Ф. “Калибровочные теории в физике элементарных частиц”, 1987, Москва, Мир.
6. Шестакова Т.П. “Метод континуального интеграла в квантовой теории поля”, 2005, Москва - Ижевск, $\mathcal{R}\&\mathcal{C}\ Dynamics$.
7. Грибов В.Н. “Квантование неабелевых калибровочных теорий”, Материалы XII зимней школы ЛИЯФ, стр.64 (1977).

Спасибо за внимание!