Self-consistent equations for description of critical behavior of quantum-field systems

Yury Pismak
Department of High Energy and Elementary Particle Physics,
State University of Saint-Petersburg

Definitions. Problem statement We consider a quantum field model with a polynomial action functional

$$S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_I(\varphi)$$

The generating functional of Green's functions is used to describe quantum physics

$$G(j) = c \int e^{iS(\varphi)+j\varphi} D\varphi, \; c^{-1} = \int \exp(iS_0(\varphi) + j\varphi) D\varphi$$

Full Green's functions are the following

$$G_k(x_1, ...x_k) = c \int e^{iS(\varphi)} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) D\varphi = \frac{\delta^k}{\delta j(x_1) \cdots \delta j(x_k)} G(j) \Big|_{j=0}$$

Generating functional of connected Green's function:

$$W(j) = \ln G(j) = \text{Connected part of } G(j)$$

We will calculate the full connected Green's functions

$$W_k(x_1, ...x_k) = \frac{\delta^k}{\delta j(x_1) \cdots \delta j(x_k)} W(j) \Big|_{j=0}$$

in the Euclidean massless field theory at a critical point in a space of dimension d.

Functional Legendre transformations Let us consider the functional

$$G(A) = \int \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k \varphi^k}{k!}\right\} D\varphi, \text{ with } A_k\varphi^k = \int \cdots \int A_k(x_1, ..., x_k)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_k)dx_1\cdots dx_k$$

from a set of potentials $A = \{A_1, ..., A_n\}$. It satisfies the Schwinger equations

$$\frac{\delta}{\delta A_k} G(A) = \frac{1}{k!}\frac{\delta^k}{\delta A_1^k} G(A),\ 1 < k \leq n,\ \left(A_1 + \sum_{k=2}^{n} A_k \frac{\delta}{\delta A_{k-1}}\right) G(A) = 0$$

By substituting $G(A) = \exp WA$ we obtain the Schwinger equations for $W(A)$:

$$\frac{\delta W(A)}{\delta A_k} = \frac{1}{k!} e^{-W(A)} \frac{\delta^k}{\delta A_1^k} e^{W(A)},\ 1 < k \leq n,\ A_1 + \sum_{k=2}^{n} A_k \frac{\delta W(A)}{\delta A_{k-1}} = 0$$

Fennman rules.

$$W(A) = \frac{1}{2} Tr \ln \Delta + W'(A)$$

where $W'(A)$ is the sum of all connected diagrams with vertices A_k, $n \leq k \neq 2$ and lines $\Delta = -A_2^{-1}$.

Legendre transform of order $m \leq n$ of functional $W(A)$

$$\Gamma^{(m)}(\alpha, \bar{A}) = W(A) - \sum_{k=1}^{m} \int \alpha_k(x_1, ..., x_k) A_k(x_1, ..., x_k) dx_1 ... dx_k,$$

whose arguments are a set of functions $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ and potentials $\bar{A} = (A_{m+1}, ..., A_n)$. It is assumed that the potentials $A_1, ..., A_m$ are expressed in terms of the arguments $(\alpha, \bar{A})$ so that the relations

$$\alpha_k = \frac{\delta W(A)}{\delta A_k}, \ k = 1, ..., m.$$

Hence,

$$\frac{\delta \Gamma^{(m)}(\alpha, \bar{A})}{\delta \alpha_k} = -A_k, \quad k = 1, ..., m,$$

and the functional

$$\Phi^{(m)}(\alpha, A) = \Gamma^{(m)}(\alpha, \bar{A}) + \sum_{k=1}^{m} \int \alpha_k(x_1, ..., x_k) A_k(x_1, ..., x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

can be considered as an efficient action for solving the problem of finding the Green's functions $\alpha_1, ..., \alpha_m$. They are solutions to the system of stationarity equations

$$\frac{\delta}{\delta \alpha_k} \Phi^{(m)}(\alpha, A) = 0, \ k = 1, ..., m$$

for the functional $\Phi^{(m)}(\alpha, A)$. Substituting the found solutions of these equations into $\Phi^{(m)}(\alpha, A)$, we obtain the generating functional of the connected Green's functions $W(A)$.

To describe the diagrammatic representation of $\Gamma^{(k)}(\alpha, \bar{A})$ for $k = 2$, it is convenient to pass from α_1, α_2 to the variables β_1, β_2, using the relations

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1^2).$$

Then $\Gamma^{(2)}(\beta, \bar{A})$ can be written as

$$\Gamma^{(2)}(\beta, \bar{A}) = \frac{1}{2} Tr \ln \beta_2 + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A}),$$

where the functional $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A})$ is the sum of the Feynman diagrams at the vertices β_1 and $A_3, ..., A_n$, where the lines β_2 connect A_k vertices to each other, and β_1 vertices are attached to them directly. The β_1 vertices are not connected to each other by a line. All diagrams have the usual symmetry coefficients and are 2-irreducible. A diagram is called 2-irreducible if it is connected and does not split into two non-trivial parts if no more than two lines break in it. A vertex or a line is considered trivial.

Stationarity equations for the functional $\Phi^{(2)}(\beta, \bar{A})$ have the form

$$\frac{\delta}{\delta\beta_1}\Phi^{(2)}(\beta, \bar{A}) = A_1 + A_2\beta_1 + \frac{\delta}{\delta\beta_1}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A}) = 0,$$
$$\frac{\delta}{\delta\beta_2}\Phi^{(2)}(\beta, \bar{A}) = \frac{1}{2}\beta_2^{-1} + \frac{1}{2}A_2 + \frac{\delta}{\delta\beta_2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A}) = 0,$$

and the last equation can be hung in the form of the Dyson-Schwinger

$$D^{-1} = \Delta^{-1} - \Sigma,$$

where $D = \beta_2$ is the full propagator, $\Delta = -A_2^{-1}$ is the seed propagator, and $\Sigma = 2\,\delta\Gamma^{(2)}(\beta, \bar{A})/\delta\beta_2$ is the self-mass operator. In the model, the last equation can be written in the form of the Dyson-Schwinger equation.

$$\Sigma = A_3\beta_1 + \frac{1}{2}A_3\beta_2^2 A_3 + \mathcal{O}'(A_3^3),$$

where $\mathcal{O}'(A_3^3)$ is the sum of diagrams with three or more vertices A_3 and the second equation has the form

$$A_1 + A_2\beta_1 + \frac{1}{2}A_3\beta_1^2 + \frac{1}{2}A_3\beta_2 = 0,$$

For $\Gamma^{(3)}(\alpha, \bar{A})$ it is convenient to express the variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in terms of $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1^2),\ \alpha_3 = \frac{1}{3!}(\beta_1^3 + 3\beta_1\beta_2 + \beta_2^3\beta_3)$$

Then $\Gamma^{(3)}(\beta, \bar{A})$ has the form

$$\Gamma^{(3)}(\beta, \bar{A}) = \frac{1}{3}Tr \ln \beta_2 - \frac{1}{3!}\beta_3\beta_2^3\beta_3 + \tilde{\Gamma}^{(3)}(\beta, \bar{A}),$$

and the lines of the diagrams $\tilde{\Gamma}^{(3)}(\beta, \bar{A})$ are β_2, the vertices are $\beta_3, A_4, ...A_n$. In $\tilde{\Gamma}^{(3)}(\beta, \bar{A})$ is the sum of all 3-irreducible diagrams with ordinary coefficients, containing only two vertices β_3, included in $\tilde{\Gamma}^{(3)}(\beta, \bar{A})$ with a minus sign.

Stationarity equations for the functional $\Phi^{(2)}(\beta, \bar{A})$ have the form

$$\frac{\delta}{\delta\beta_1}\Phi^{(2)}(\beta, \bar{A}) = A_1 + A_2\beta_1 + \frac{\delta}{\delta\beta_1}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A}) = 0,$$
$$\frac{\delta}{\delta\beta_2}\Phi^{(2)}(\beta, \bar{A}) = \frac{1}{2}\beta_2^{-1} + \frac{1}{2}A_2 + \frac{\delta}{\delta\beta_2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A}) = 0,$$

For the model with $n = 3$, in which the interaction action is determined by the potential A_3,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A}) = \frac{1}{3!}A_3\beta_1^3 + \frac{1}{2}A_3\beta_2\beta_1 + \frac{1}{2\cdot 3!}A_3\beta_2^3 A_3 + \mathcal{O}(A_3^3)$$

where $\mathcal{O}(A_3^3)$ denotes the $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A})$ contribution to $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta, \bar{A})$ of all diagrams with three or more vertices A_3 and lines β_2. In this case, the stationarity equations are written in the form

$$A_1 + A_2\beta_1 + \frac{1}{2}A_3\beta_1^2 + \frac{1}{2}A_3\beta_2 = 0,\ D^{-1} = \Delta^{-1} - \Sigma,$$

where $D = \beta_2$ is the full propagator, $\Delta = -A_2^{-1}$ is the seed propagator, and Σ is the self-mass operator.

$$\Sigma = 2\,\delta\Gamma^{(2)}(\beta, \bar{A})/\delta\beta_2 = A_3\beta_1 + \frac{1}{2}A_3\beta_2^2 A_3 + \mathcal{O}'(A_3^3).$$

Scale transformations and the theory of critical phenomena.
The element S_λ of a continuous Abelian scaling group is given by number $\lambda > 0$. For the α parameter, by definition

$$S_\lambda \alpha = \alpha_\lambda = \lambda^{\Delta_\alpha} \alpha.$$

where the number Δ_α is called the dimension of α. If $\Delta_\alpha \neq 0$, then α is called a dimensional parameter, and if $\Delta_\alpha = 0$ is dimensionless. By definition, λ in S_λ is considered dimensionless.

For the function $F(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$

$$S_\lambda F(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = F_\lambda(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = F(S_\lambda \alpha^1, \dots, S_\lambda \alpha^n) = F(\alpha^1_\lambda, \dots, \alpha^n_\lambda).$$

That's why

$$S_\lambda \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) = \prod_{k=1}^{n} \alpha^k_\lambda = \lambda^{\Delta^{(n)}_\alpha} \prod_{k=1}^{n} \alpha^k, \ \Delta^{(n)}_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{\alpha^k},$$
$$S_{\lambda_2} \left(S_{\lambda_1} \alpha \right) = \lambda_1^{\Delta_\alpha} S_{\lambda_2} \alpha = \lambda_1^{\Delta_\alpha} \lambda_2^{\Delta_\alpha} \alpha = (\lambda_1 \lambda_2)^{\Delta_\alpha} \alpha = S_{\lambda_1 \lambda_2} \alpha.$$

Thus, the dimension of the product of the parameters is equal to the sum of their dimensions, and $S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} = S_{\lambda_2 \lambda_1} = S_{\lambda_1} S_{\lambda_2}$. In addition, $(S_\lambda)_{\lambda=1} = 1$ and $(S_\lambda)^{-1} = S_{\lambda^{-1}}$.

Functions $F(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ for which

$$S_\lambda f(\alpha^1, ..., \alpha^n) = f(\lambda^{\Delta_{\alpha^1}} \alpha^1, ..., \lambda^{\Delta_{\alpha^n}} \alpha^n) = \lambda^{\Delta_f} f(\alpha^1, ..., \alpha^n),$$

are called generically homogeneous. They play an important role in the theory of critical phenomena. If in (1) we put $\lambda = (\alpha^n)^{-1/\Delta_{\alpha^n}}$, then we get

$$f(\alpha^1, ..., \alpha^n) = (\alpha^k)^{\frac{\Delta_f}{\Delta_{\alpha^k}}} f(a^1, \dots, a^{n-1}),$$

where $a^j = \alpha^j / |\alpha^n|^{\beta_j}$, $\beta_j = \Delta_j / \Delta_n$.

We consider the interaction model $g(\varphi^2)^2$ in the Euclidean space of dimension d.

For the coordinates x^i, $i = 1, \dots d$ of its point, we define the scaling transformation as follows $x^i_\lambda = x^i/\lambda$, that is, $\Delta_{x^i} = -1$, and $x_\lambda = x/\lambda$, $\Delta_x = -1$ for the vector $x = \{x^1, \dots, x^n\}$. We assume that the action is invariant under scaling $g \to \lambda^{\Delta_g}$ and replacing $\varphi(x) \to \lambda^{\Delta_\varphi} \varphi(\lambda x)$. As a result, we get $\Delta_\varphi = d/2 - 1$, $\Delta_g = 4 - d$ and

$$G(\lambda x_1, ..., \lambda x_{2n}) = \lambda^{-2n\Delta_\varphi} G(x_1, ..., x_{2n})$$

Green's functions with the contribution of a composite operator .
Let us denote

$$\mathcal{G}(A,V)=\int V(\varphi)e^{-\mathcal{S}(A,\varphi)}D\varphi=\int\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}B_j\varphi^j\right)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}A_k\varphi^k\right\}D\varphi,$$

$$\mathcal{G}(A,B,\lambda)=\int e^{-\mathcal{S}'(A,B,\lambda,\varphi)}D\varphi=\int\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(A_k+\lambda B_k)\varphi^k\right\},$$

$$\mathcal{G}_k(A,V;x_1,...,x_k)=\frac{\delta^k\mathcal{G}(A,V)}{\delta A_1(x_1)\cdots A_1(x_k)}=\int V(\varphi)e^{-\mathcal{S}(A,\varphi)}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_k)D\varphi,$$

$$\mathcal{W}(A,B,\lambda)=\ln\mathcal{G}(A,B,\lambda)=\ln\left(\int e^{-\mathcal{S}'(A,B,\lambda,\varphi)}D\varphi\right),\ \mathcal{W}(A,V)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{W}(A,B,\lambda)\Big|_{\lambda=0}.$$

It follows that $\mathcal{W}(A,V)$ is the sum of connected Feynman graphs,

$$\mathcal{G}(A,V)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{G}(A,B,\lambda)\Big|_{\lambda=0}=\mathcal{W}(A,V)\mathcal{G}(A),$$

и $\mathcal{W}(A,V)=$ связная часть $\mathcal{G}(A,V)$.

For large n we get the following result

$$\eta = \eta_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sigma = 2 + \eta_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \ \lambda A^2 B = \frac{\eta_1 \Gamma(\xi - 1, \xi + 1)}{2} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

where

$$\eta_1 = \frac{4(2-\xi)\sin(\pi\xi)\Gamma(d-2)}{\pi\Gamma(\xi-1,\xi+1)} = \frac{2(2-\xi)\sin(\pi\xi)\Gamma(2\xi)}{(2\xi-1)\pi\xi\Gamma(\xi)^2}.$$

In the one-loop approximation, neglecting the contributions of $\mathcal{O}(\lambda^2)$ on the right-hand sides (51), (52), we obtain for $\beta_2(A_3, V)$, $\beta_2'(A_3, V)$ the system of equations

$$\beta_2^{-1}\beta_2(A_3,V)\beta_2^{-1} = \lambda\beta_2'\beta_2(A_3,V) + \lambda\beta_2\beta_2'(A_3,V),$$
$$\beta_2'^{-1}\beta_2'(A_3,V)\beta_2'^{-1} = \lambda\beta_2\beta_2(A_3,V).$$

As a result of their solution, we get the following result

$$\rho = 1 - k + \frac{\eta}{2(k+\xi-2)(k+\xi-1)}\left((1-k)(k+2\xi-2) + \frac{\xi\Gamma(1+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-3)}\right),$$
$$\rho = -k + \frac{\eta}{2(k+\xi-1)(k+\xi)}\left((1-k)k + 2\xi(1-k-\xi) + \frac{\xi\Gamma(2+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-2)}\right),$$
$$\rho = \xi - 1 + \frac{\eta}{2(k+\xi-2)(k+\xi-1)}\left((k-1)(k+2\xi-2) - \frac{\xi\Gamma(1+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-3)}\right),$$
$$\rho_0 = \xi + \frac{\eta}{2(k+\xi-1)(k+\xi)}\left((k-1)k + 2\xi(k+\xi-1) - \frac{\xi\Gamma(2+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-2)}\right).$$

1 Введение

Одним из наиболее распространенных методом расчетов в квантовой теории поля и статистической физике является теория возмущений. Однако, есть проблемы, которые, для которых такие методы неприменимы. Примером тому являются задачи расчетов характеристик критических явлений. В этой области возникли методы, в рамках которых приближенные результаты находятся в виде начальных отрезков степенных рядов, но константы взаимодействия не являются их параметрами разложения. Такие подходы можно рассматривать как модификацию теории возмущений на основе использования для ее построения величин, которые можно считать малыми в рассматриваемой физической ситуации. Для количественного описания критических явлений используются квантово полевые модели, в которых проводятся расчеты в рамках ϵ $1/n$-разложений, где ϵ- отклонение размерности пространства d от некоторого его характерного для каждой модели значения d_{log} (так называемое отклонение от логарифмичности), а n - число компонент поля. Результаты различных исследований, полученные такими методами представлени в книга Васильева.

Для построении такой модифицированной теории возмущений большое значение играют симметрийные свойства систем. Для моделей критических явлений ((в d-мерном евклидовом пространстве)), кроме инвариантности относительно трансляций и вращений в евклидовом пространстве размерности d важными оказываются масштабная и конформная инвариантности.

Элемент S_λ непрерывной абелевой группы масштабных преобразований задаются числом $\lambda > 0$. Параметрами модели мы называем те ее константы, которые могут быть заданы различным образом. Они могут, в частности, меняться при масштабных преобразований. Для параметра α по определению

$$S_\lambda \alpha = \alpha_\lambda = \lambda^{\Delta_\alpha} \alpha.$$

гле число Δ_α называется размерностью α. Если $\Delta_\alpha \neq 0$, то α называют размерным параметром, а при $\Delta_\alpha = 0$ безразмерным. По определению λ в S_λ считается безразмерным.

Для функции $F(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$

$$S_\lambda F(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = F_\lambda(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = F(S_\lambda \alpha^1, \dots, S_\lambda \alpha^n) = F(\alpha^1_\lambda, \dots, \alpha^n_\lambda).$$

Поэтому

$$S_\lambda \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) = \prod_{k=1}^n \alpha^k_\lambda = \lambda^{\Delta^{(n)}_\alpha} \prod_{k=1}^n \alpha^k, \ \Delta^{(n)}_\alpha = \sum_{k=1}^n \Delta_{\alpha^k},$$
$$S_{\lambda_2} (S_{\lambda_1} \alpha) = \lambda_1^{\Delta_\alpha} S_{\lambda_2} \alpha = \lambda_1^{\Delta_\alpha} \lambda_2^{\Delta_\alpha} \alpha = (\lambda_1 \lambda_2)^{\Delta_\alpha} \alpha = S_{\lambda_1 \lambda_2} \alpha.$$

Таким образом, размерность произведения параметров равна сумме их размерностей, и $S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} = S_{\lambda_2 \lambda_1} = S_{\lambda_1} S_{\lambda_2}$. При $\lambda = 1$ преобразование $S_1 = 1$ является тождественным и $(S_\lambda)^{-1} = S_{\lambda^{-1}}$.

Функции $F(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, для которых

$$S_\lambda F(\alpha^1, ..., \alpha^n) = F(\lambda^{\Delta_{\alpha^1}} \alpha^1, ..., \lambda^{\Delta_{\alpha^n}} \alpha^n) = \lambda^{\Delta_F} F(\alpha^1, ..., \alpha^n), \tag{1}$$

называются обобщенно однородными. Они играют важную роль в теории критических явлений. Если в (1) положить $\lambda = (\alpha^k)^{-1/\Delta_{\alpha^k}}$, то мы получим

$$F(\alpha^1, ..., \alpha^n) = (\alpha^k)^{\frac{\Delta_F}{\Delta_{\alpha^k}}} F^{(k)}(a^1, \dots, a^{n-1}),$$

где $a^j = \frac{\alpha^j}{(\alpha^k)}$

$S_\lambda F(\alpha^1, \dots, \alpha_n) = \lambda^{\Delta_F} F(\alpha^1, \dots, \alpha_n)$

В теории критических явлений используются квантовополевые модели в евклидовом пространстве размерности d. Для координат x^i, $i = 1, \dots d$ его точки мы определим масштабное преобразавание следующим обзазом $x^i_\lambda = x^i/\lambda$, то есть, $\Delta_{x^i} = -1$, и $x_\lambda = x/\lambda$, $\Delta_x = -1$ для вектора $x = \{x^1, \dots, x^n\}$.

Масштабным преобразованием функции $F(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ называется

а Δ_F - размерностью функции F.

Если $F_\lambda(\alpha_1, ..., \alpha_n) = F(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, то

Произведение масштабных предбразований

Производящий функционал функций Грина в модели квантовой теории поля с действием $S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_{int}(\varphi)$ записывается в виде

$$G(J) = c \int e^{iS(\varphi) + J\varphi} D\varphi, \ c^{-1} = \int e^{iS_0(\varphi) + J\varphi} D\varphi \tag{2}$$

где $S_0(\varphi)$ - действие свободной теории, и $S_{int}(\varphi)$ обозначает действие взаимодействия. Дифференцируя его по J и полагая $J=0$, мы получаем функции Грина

$$G_n(x_1,...,x_n) = c\int e^{iS(\varphi)}\varphi(x_1)...\varphi(x_n)D\varphi.$$

Составному оператору $\mathbf{V}(\hat{\varphi}(x))$ поля $\hat{\varphi}$ в рамках функционального подхода соответсвует локальный функционал $V(\varphi(x))$, от поля φ и его производных. Свойства системы, связанные с составным оператором $\mathbf{V}(\hat{\varphi})$ характеризуются функциями,

$$G_n(V,x,x_1,...,x_n) = c\int V(\varphi(x))\, e^{iS(\varphi)}\varphi(x_1)...\varphi(x_n)D\varphi,$$

для которых производящим функционалом является

$$G(V,J;x) = c\int V(\varphi(x))\, e^{iS(\varphi)+J\varphi}D\varphi. \tag{3}$$

Если обозначить

$$S'(\varphi) = S(\varphi) + \int \lambda(x)V(\varphi(x))dx,\ G'(J) = c\int e^{iS'(\varphi)+J\varphi}D\varphi,$$

то

$$G(V,J,x) = -i\frac{\delta}{\delta\lambda(x)}G'(J)|_{\alpha=0}. \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать квантовополенвые модели в Евклидовом пространстве с функционалами действия и составными операторами полиномиального вида. В качестве записи наиболее общего вида производящего функционала функций Грина мы будем использовать выражение [1]

$$\mathcal{G}(A) = \int e^{-\mathcal{S}(A,\varphi)}D\varphi = \int \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}A_k\varphi^k\right\}D\varphi. \tag{5}$$

где $A_k = A_k(x_1,...,x_k)$ - функции k аргументов, которые мы будем называть потенциалами. Мы рассматриваем их в качестве аргументов функционала $\mathcal{G}(A)$, где A обозначаем множество всех потенциалов $A_1,...,A_n$. Этот функционал удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\delta}{\delta A_k}\mathcal{G}(A) = \frac{1}{k!}\frac{\delta^k}{\delta A_1^k}\mathcal{G}(A),\ k=2,...,n, \tag{6}$$

$$\left(\sum_{k=2}^{n}A_k\frac{\delta}{\delta A_{k-1}} + A_1\right)\mathcal{G}(A) = 0, \tag{7}$$

где (6) уравнения, связи прпоизводных по различным потенциалам, а (7) - это уравнение Швингера [1]. В рамках теории возмущений функцищнал $\mathcal{G}(A)$ - это сумма всех диаграмм Фейнмана с линями $\Delta = -A_2^{-1}$ и вершинами A_k, при $1\le k\le n$, $k\ne 2$, умноженная на $c^{-1} = \exp(\frac{1}{2}tr\ln\Delta)$. Функционал $\mathcal{W}(A) = \ln\mathcal{G}(A)$ предтставляет собой связную часть $\mathcal{G}(A)$, т.е. сумму всех связных диаграмм $\mathcal{G}(A)$ с обычными симметрийными коэффициентами и $\frac{1}{2}tr\ln\Delta$. Таким образом, для рассматриваемой нами модели $\mathcal{W}(A)$ является производящим функционалом связных функций Грина.

Для построения уравнений, которым удовслетворяют функции Грина, характеризующие составные операторы, удобно воспользоваться формализмом функциональных преобразований Лежандра. Функцилнальным преобразованием Лежандра порядка m производящего функционала связных функций Грина $\mathcal{W}(A)$ является функционал

$$\Gamma^{(m)}(\alpha,\bar{A}) = \mathcal{W}(A) - \sum_{k=1}^{m}\int \alpha_k(x_1,...,x_k)A_k(x_1,...,x_k)dx_1...dx_k, \tag{8}$$

аргументами еоторого являеься набор функций $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m)$ и потенциалов $\bar{A} = (A_{m+1},...,A_n)$. Предполагается, что $m\le n$ и потенциалы $A_1,...,A_m$ в правой части (8) выражены в терминах аргументов $(\alpha,\bar{A})$ так, что выполняются соотношения

$$\alpha_k = \frac{\delta W(A)}{\delta A_k},\ k=1,...,m. \tag{9}$$

Вследствие этого,

$$\frac{\delta\Gamma^{(m)}(\alpha,\bar{A})}{\delta\alpha_k(x_1,...,x_k)} = -A_k(x_1,...,x_k), \quad k=1,...,m, \tag{10}$$

и функционал

$$\Phi^{(m)}(\alpha,A) = \Gamma^{(m)}(\alpha,\bar{A}) + \sum_{k=1}^{m}\int \alpha_k(x_1,...,x_k)A_k(x_1,...,x_k)dx_1\cdots dx_k \tag{11}$$

можно рассматривать как эффективное действие для решения задачи нахождения полных несвязных функций Грина без вакуумных петель

$$\alpha_k = \frac{\delta}{\delta A_k}\mathcal{W}(A) = \frac{1}{\mathcal{G}(A)}\frac{\delta}{\delta A_k}\mathcal{G}(A) = \frac{1}{k!\mathcal{G}(A)}\frac{\delta^k}{\delta A_1^k}\mathcal{G}(A),\ k=1,...,m. \tag{12}$$

в рамматриваемой модели. Они являются решениями системы уравнений стационарности

$$\frac{\delta}{\delta\alpha_k}\Phi^{(m)}(\alpha,A) = 0,\ k=1,...,m \tag{13}$$

для функционала $\Phi^{(m)}(\alpha,A)$. При подстановке найденных решений этих уравнений в $\Phi^{(m)}(\alpha,A)$ мы получаем производящий функционал связных функций Грина $\mathcal{W}(A)$.

Для функциональных преобразований Лежандра произвольного порядка существуют представления в виде бесконечной суммы диаграмм Фейнмана. Для поставленной нами задачи мы ограничимся использованием второго преобразования Лежанжра $\Gamma^{(2)}(\alpha,\bar{A})$. Для описания диаграммного представления этого функционала более удобныыми, чем $(\alpha,\bar{A})$ являются аргументы $(\beta,\bar{A})$, где $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ и $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ связаны соотношениями

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_2+\beta_1^2),$$

из которых следует, что $\beta_k = \frac{\delta^k\mathcal{W}(A)}{\delta A_1^k}$ при $k=1,2$ - это полные связные функции Грина: среднее поле β_1 и полный пропагатор β_2. Второе преобразование Лежандра $\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})$ может быть записано в виде

$$\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A}) = \frac{1}{2}Tr\ln\beta_2 + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A}), \tag{14}$$

где функционал $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})$ является суммой диаграмм Фейнмана в вершинами β_1 и $A_3,...,A_n$, в которых линии β_2 соединяют между собой вершины A_k, а вершины β_1 присоединяются к ним непосредственно, т.е. присоединяющим их r вершинам A_k линиям соответствует единица. Вершины β_1 между собой линией не соединяются. Все диаграммы имеют обычные симметрийные коэффициенты и являются 2-неприводимыми. Диаграмма назавается 2-неприводимой, если она связна и не распадается на две нетривиальные части при разрыве в ней не более двух линий. Тривиальной считается вершина или линия. Из выше сказанного следует, что

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,0) = 0,\ \tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})\Big|_{\beta_2=0} = \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!}A_k\beta_1^k,$$

и линейная по потенциалам $\bar{A}$ часть $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})$ может быть записана в виде

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\beta_1}\beta_2\frac{\delta}{\delta\beta_1}\right\}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!}A_k\beta_1^k.$$

Для модели с $n=3$, в которой действие взаимодействия определяется единственным потенциалом A_3,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A}) = \frac{1}{3!}A_3\beta_1^3 + \frac{1}{2}A_3\beta_2\beta_1 + \frac{1}{2\cdot 3!}A_3\beta_2^3A_3 + \mathcal{O}(A_3^3) \tag{15}$$

где $\mathcal{O}(A_3^3)$ обозначает не зависящий от β_1 вклад в $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})$ всех диаграмм с тремя и более вершинами A_3 и линиями β_2.

Уравнения стационарности для функционала $\Phi^{(2)}(\beta,\bar{A})$ имеют вид

$$\frac{\delta}{\delta\beta_1}\Phi^{(2)}(\beta,\bar{A}) = A_1 + A_2\beta_1 + \frac{\delta}{\delta\beta_1}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A}) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\delta}{\delta\beta_2}\Phi^{(2)}(\beta,\bar{A}) = \frac{1}{2}\beta_2^{-1} + \frac{1}{2}A_2 + \frac{\delta}{\delta\beta_2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A}) = 0, \tag{17}$$

и (17) можно зависать в виде уравнения Дайсона-Швингера

$$D^{-1} = \Delta^{-1} - \Sigma, \tag{18}$$

где $D = \beta_2$ - полный пропагатор, $\Delta = -A_2^{-1}$ - затравочный пропагатор и $\Sigma = 2\,\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})/\delta\beta_2$ - оператор собственной массы. В модели (15)

$$\Sigma = A_3\beta_1 + \frac{1}{2}A_3\beta_2^2 A_3 + \mathcal{O}'(A_3^3), \tag{19}$$

где $\mathcal{O}'(A_3^3)$ - сумма диаграмм с тремя и более верпшинами A_3 и уравнение (16) имеет вид

$$A_1 + A_2\beta_1 + \frac{1}{2}A_3\beta_1^2 + \frac{1}{2}A_3\beta_2 = 0, \tag{20}$$

Функции Грина с вкладом составного оператора.

Обозначим

$$\mathcal{G}(A,V) = \int V(\varphi)e^{-\mathcal{S}(A,\varphi)}D\varphi = \int\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}B_j\varphi^j\right)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}A_k\varphi^k\right\}D\varphi, \tag{21}$$

$$\mathcal{G}(A,B,\lambda) = \int e^{-\mathcal{S}'(A,B,\lambda,\varphi)}D\varphi = \int\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(A_k+\lambda B_k)\varphi^k\right\}, \tag{22}$$

$$\mathcal{G}_k(A,V;x_1,...,x_k) = \frac{\delta^k\mathcal{G}(A,V)}{\delta A_1(x_1)\cdots A_1(x_k)} = \int V(\varphi)e^{-\mathcal{S}(A,\varphi)}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_k)D\varphi, \tag{23}$$

$$\mathcal{W}(A,B,\lambda) = \ln\mathcal{G}(A,B,\lambda) = \ln\left(\int e^{-\mathcal{S}'(A,B,\lambda,\varphi)}D\varphi\right),\ \mathcal{W}(A,V) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{W}(A,B,\lambda)\Big|_{\lambda=0}. \tag{24}$$

Из (21), (22) следует, что $\mathcal{W}(A,V)$ - сумма связных графов Фейнмана,

$$\mathcal{G}(A,V) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{G}(A,B,\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \mathcal{W}(A,V)\mathcal{G}(A), \tag{25}$$

и $\mathcal{W}(A,V) =$ связная часть $\mathcal{G}(A,V)$. Так как

$$\beta_1(A,V) \equiv \frac{\delta}{\delta A_1}\mathcal{W}(A,V) = \frac{\mathcal{G}_1(A,V)}{\mathcal{G}(A)} - \frac{\mathcal{G}(A,V)\mathcal{G}_1(A)}{\mathcal{G}(A)^2}, \tag{26}$$

$$\beta_2(A,V) \equiv \frac{\delta^2}{\delta A_1^2}\mathcal{W}(A,V) = \frac{\mathcal{G}_2(A,V)}{\mathcal{G}(A)} - 2\frac{\mathcal{G}_1(A,V)\mathcal{G}_1(A)}{\mathcal{G}(A)^2} + 2\frac{\mathcal{G}(A,V)\mathcal{G}_1^2(A)}{\mathcal{G}(A)^3} - \frac{\mathcal{G}(A,V)\mathcal{G}_2(A)}{\mathcal{G}(A)^2} \tag{27}$$

и $\beta_k(A,V) =$ связная часть $\beta_k(A,V)$, $k = 1,2$, мы видим, что

$$\beta_k(A,V) = \text{связная часть } \mathcal{G}_k(A,V),\ k = 1,2. \tag{28}$$

Пользуясь техникой функциональных преобразований Лежандра мы получим аналогичные (16-17) уравнения для функций $\beta_1(A,V)$, $\beta_2(A,V)$.

$$\frac{\delta}{\delta\beta_1}\Phi^{(2)}(\beta,A+\lambda B) = A_1 + \lambda B_1 + (A_2+\lambda B_2)\beta_1 + \frac{\delta}{\delta\beta_1}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A}+\lambda\bar{B}) = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\delta}{\delta\beta_2}\Phi^{(2)}(\beta,A+\lambda B) = \frac{1}{2}\beta_2^{-1} + \frac{1}{2}(A_2+\lambda B_2) + \frac{\delta}{\delta\beta_2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A}+\lambda\bar{B}) = 0, \tag{30}$$

Продифференцировав эти равенства по λ и положив $\lambda = 0$, мы получим

$$P_1 + Q_{11}\beta_1(A,V) + Q_{12}\beta_2(A,V) = 0,\ P_2 + Q_{21}\beta_1(A,V) + Q_{22}\beta_2(A,V) = 0 \tag{31}$$

где

$$P_1 = B_1 + B_2\beta_1 + \sum_{k=3}^{n} B_k \frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta A_k \delta\beta_1},\ Q_{11} = A_2 + \frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1^2},\ Q_{12} = \frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1\delta\beta_2},$$

$$P_2 = \frac{1}{2}B_2 + \sum_{k=3}^{n} B_k \frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta A_k \delta\beta_2},\ Q_{21} = \frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2\delta\beta_1},\ Q_{22} = \frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2^2} - \frac{1}{2}\beta_2^{-2}.$$

Преобразование Лежандра $\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})$ удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1} = \frac{1}{2}A_3(\beta_2 + \beta_1^2) + \sum_{k=3}^{n-1} A_{k+1}\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta A_k}, \tag{32}$$

$$2\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2} = \beta_2^{-1} + \frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1^2} - \frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1\delta\beta_2}\left[\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2^2}\right]^{-1}\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2\delta\beta_1}, \tag{33}$$

$$\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta A_k} = \frac{1}{k!}(\beta_1 + \mathcal{D})^k,\ \mathcal{D} = \beta_2\left[\frac{\delta}{\delta\beta_1} - \frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1\delta\beta_2}\left(\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2^2}.\right)^{-1}\frac{\delta}{\delta\beta_2}\right],\ 3 \le k \le n. \tag{34}$$

и вследствие (10),

$$\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2} = \frac{\delta\alpha_2}{\delta\beta_2}\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\alpha,\bar{A})}{\delta\alpha_2} = -\frac{1}{2}A_2.$$

Таким образом,

$$Q_{11} = \frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1\delta\beta_2}\left[\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2^2}\right]^{-1}\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2\delta\beta_1} - \beta_2^{-1} = \frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_1^2} - 2\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,\bar{A})}{\delta\beta_2}.$$

Уравнения (31) могут быть записаны в виде

$$(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21})\beta_1(A,V) + P_1 - Q_{12}Q_{22}^{-1}P_2 = 0, \tag{35}$$

$$(Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12})\beta_2(A,V) + P_2 - Q_{21}Q_{11}^{-1}P_1 = 0. \tag{36}$$

Это нужно проверить !!!

В рассммотрим модель с $A_k = 0$ при $k > 3$. В этом случае уравнения улравнения (32-34) приобретают вид

$$\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta\beta_1} = \frac{1}{2}A_3(\beta_2 + \beta_1^2), \tag{37}$$

$$2\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta\beta_2} = \beta_2^{-1} + A_3\beta_1 - \frac{1}{4}A_3\left(\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta\beta_2^2}\right)^{-1}A_3, \tag{38}$$

$$\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta A_3} = \frac{1}{3!}(\beta_1 + \mathcal{D})^2\beta_1,\ \mathcal{D} = \beta_2\left[\frac{\delta}{\delta\beta_1} - \frac{1}{2}A_3\left(\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta\beta_2^2}\right)^{-1}\frac{\delta}{\delta\beta_2}\right]. \tag{39}$$

и

$$Q_{11} = \frac{1}{4}A_3\left(\frac{\delta^2\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta\beta_2^2}\right)^{-1}A_3 - \beta_2^{-1} = A_3\beta_1 - 2\frac{\delta\Gamma^{(2)}(\beta,A_3)}{\delta\beta_2}$$

Если в трансляционно инвариантной квнтново-полевой системе реализуется масштвбная инвариантность (критическая точка), то все парные корреляционные функции локальных операторов с несовпадающми размерностями, а также их средние значения равны нулю.

В этом случае $P_1 = P_2 = \beta_1(A,V) = 0$ и уравнения (31) представляют собой систему двух однородных линейных уравнений для $\beta_2(V,A)$

$$Q_{12}\beta_2(A,V) = 0,\ Q_{22}\beta_2(A,V) = 0. \tag{40}$$

Если в качестве $\beta_2(A,V,x_1,x_2)$ подставить в (31) функцию вида

$$\frac{T^{(n)}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^{2\alpha}} \tag{41}$$

где $T^{(n)}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1-x_2)$ тензор, построенный из символов Кронекера и компонент вектора x_1-x_2, то первое из этих уравнений удовлетворяется тривильным образом, так как в рамках размерной регуляризации масштабно инвариантные фушкции одной переменной равны нулю. В общем случе в правой части втоторго из уравнений (31) возникнет сумма выражений аналогичных (41) с той же размерностью $2\alpha-n+2k$, где k - число символов Кронекера в тензоре $T^{(n)}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ и размерность координаты x считается равной -1. Таким образом, решения $\beta_2(A,V,x_1,x_2)$ уравнений (41) мы можем искать в виде линейной комбинации тензорных функций (41) одинакового ранга n и размерности α.

В терминах преобразования Лежандра функция $\beta_2(A,V,x_1,x_2)$ удлвлетвлряет однородному линейному интегральному уравнению

$$\int\int\left(\beta_2^{-1}(x_1,y_1)\beta_2^{-1}(x_2,y_2)-2\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2,\bar{A})}{\delta\beta_2(x_1,x_2)\delta\beta_2(y_1,y_2)}\right)\beta_2(A,V,y_1,y_2)dy_1dy_2=0, \tag{42}$$

где $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2,\bar{A})=\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta,\bar{A})\big|_{\beta_1=0}$. Следовательно, $\beta_2(A,V,y_1,y_2)$ - собственная функция с собственным значением $\frac{1}{2}$ интегрального оператора с ядром

$$\beta_2^2\frac{\delta^2}{\delta\beta^2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2,\bar{A}). \tag{43}$$

Здесь предполашаеься, что β_2 - это полный пропагатор поля φ рассматриваемой модели, который, если аномальная размерность φ нетривиальна, является масштабно инвариантным решением самосогласованного уравнения Швингера-Дайсона

$$\beta_2^{-1}=2\frac{\delta\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2,\bar{A})}{\delta\beta_2}. \tag{44}$$

Оно следует из (18) если в этом уравнении положить $D=\beta_2$, $\beta_1=0$ и отбросить Δ^{-1}, т.е. оставить только те величины, которые имеют размерность обратного полного пропагатора β_2^{-1}, не совпадающую с размерностью Δ^{-1}, в силу предположения о наличия аномальной размерности у поля φ.

2 Простой пример

Продемонстрируем методы расчетов аномальных размерностей составных операторов с помощью уравнения самосогласования (44) в модели безмассового скалярного n-компонентного поля $\varphi=(\varphi,\ldots,\varphi_n)$ в Эвклидовом пространстве размерности d с действием

$$S(\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{d}\partial_\mu\varphi^2+\frac{1}{4}\lambda(\varphi^2)^2 \tag{45}$$

где мы воспользовались обозначениями $\partial_\mu\varphi^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^\mu}$, $\varphi^2=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2$.

Производящий функуонал функций Грина в этой модели можно представить в виде

$$G(J)=c\int e^{-S(\varphi)+\varphi J}D\varphi=c'\int e^{-S(\varphi,\psi)+\varphi J}D\varphi D\psi \tag{46}$$

где

$$S(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{d}\partial_\mu\varphi^2+\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\varphi^2\psi \tag{47}$$

и нормировочные константы c,c' определяются условием $G(0)\big|_{\lambda=0}=1$.

Обозначим

$$G(J,J') = c' \int e^{-S(\varphi,\psi)+\varphi J+\psi J'} D\varphi D\psi,\ W(J,J') = \ln G(J,J') \tag{48}$$

производящий функционал функций Грина системы полей φ, ψ, а также связные функции Грина

$$\beta_1(x) = \frac{\delta W(J,J')}{\delta J(x)}\bigg|_{J=J'=0},\ \beta_2(x_1,x_2) = \frac{\delta^2 W(J,J')}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\bigg|_{J=J'=0},$$
$$\beta_1'(x) = \frac{\delta W(J,J')}{\delta J'(x)}\bigg|_{J=J'=0},\ \beta_2'(x_1,x_2) = \frac{\delta^2 W(J,J')}{\delta J'(x_1)\delta J'(x_2)}\bigg|_{J=J'=0}.$$

Рассматривая β_i, β_i' как компоненты вектора $\vec{\beta}_i = (\beta_i, \beta_i')$ для $i = 1, 2$, введем в качестве потенциала взаимодействия A_3 симметричный тензор третьего ранга для которого его свертка $A_3\vec{\beta}_i$ с векторами $\vec{\beta}_1$ имеет вид

$$A_3\vec{\beta}_1^3 = \sqrt{\lambda}\,\beta_1^2\beta_1' = \sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{k}\int \beta_1^k(x)^2\beta_1'(x)dx.$$

Используя второе преобразование Лежандра

$$\Gamma^{(2)}(\vec{\beta}, A_3) = \Gamma^{(2)}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, A_3) = \frac{1}{2}Tr\ln\beta_2 + \frac{1}{2}Tr\ln\beta_2' + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, A_3),$$

где

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, A_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\beta_1'\beta_2 + \frac{1}{4}\lambda\beta_2' Tr(\beta_2\beta_2) + \mathcal{O}(\lambda^{3/2})$$

можно вычислить функции Грина $\vec{\beta}_i = (\beta_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$. решив уравнения стпационарности для соответсвующего функционала $\Phi^{(2)}(\vec{\beta}, A)$. В критетической точке $\beta_1 = \beta_1' = 0$ и уравнение (44) представляет собой систему двух уравнений для β_2 и β_2'

$$\beta_2^{-1} = 2\frac{\delta\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2, \beta_2', A_3)}{\delta\beta_2} = \lambda\beta_2\beta_2' + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{49}$$

$$\beta_2'^{-1} = 2\frac{\delta\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2, \beta_2', A_3)}{\delta\beta_2} = \frac{1}{2}\lambda Tr\beta_2\beta_2 + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{50}$$

а для (42) записывается в виде двух уравнений для $\beta_2(A_3, V)$, $\beta_2'(A_3, V)$

$$\beta_2^{-1}\beta_2(A_3,V)\beta_2^{-1} = 2\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2, \beta_2', A_3)}{\delta\beta_2\delta\beta_2}\beta_2(A_3,V), + 2\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2, \beta_2', A_3)}{\delta\beta_2\delta\beta_2'}\beta_2'(A_3,V) = \tag{51}$$
$$= \lambda\beta_2'\beta_2(A_3,V) + \lambda\beta_2\beta_2'(A_3,V) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

$$\beta_2'^{-1}\beta_2'(A_3,V)\beta_2'^{-1} = 2\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2', \beta_2', A_3)}{\delta\beta_2'\delta\beta_2}\beta_2(A_3,V), + 2\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{(2)}(\beta_2, \beta_2', A_3)}{\delta\beta_2'\delta\beta_2'}\beta_2'(A_3,V) = \tag{52}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\beta_2\beta_2(A_3,V) + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Мы предполагаем, что система в критической точке обладает свойствами трансляционной и ротационной инвалиантности, предполагаем также, что она инвариантна относительно вращения b - компонентного поля φпалато. Тогда, в силу масштабной инвариантности, пропагатор $\beta_2(x, x')$ поля φ, который является $n \times n$ - матрицей, и пропагатор $\beta_2'(x, x')$ поля ψ в самом общем случае могут быть представлены в виде

$$\beta_2(x,x') = \mathbf{1}\frac{A}{(x-x')^{2\alpha}},\ \beta_2'(x,x') = \frac{B}{(x-x')^{2\sigma}} \tag{53}$$

где $\mathbf{1}$ - единичная $n \times n$ - матрица, а A, S, α, σ постоянные параментры. Из них α - размерность поля φ и σ - размерность поля ψ.

Мы использем следующие соотношения для интегралов в пространстве размерности d

$$\int \frac{e^{ipx}dx^d}{x^{2\alpha}} = \pi^{\xi} H(\alpha) \left(\frac{4}{p^2}\right)^{\alpha'}, \tag{54}$$

$$\int \frac{dy^d}{(x-y)^{2\alpha}(y-x')^{2\beta}} = \frac{\pi^{\xi} H(\alpha,\beta,d-\alpha-\beta)}{(x-x')^{2(\alpha+\beta-\xi)}}. \tag{55}$$

Здесь p, x, x', y - это вектора d-мерного пространства, $\xi = d/2$, $H(\alpha)$ - это отношение двух гамма-функций: $H(\alpha) = \Gamma(\alpha')/\Gamma(\alpha)$, где $\alpha' = \xi - \alpha$, использовано обозначение $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = H(\alpha_1) \cdots H(\alpha_n)$, которое, и ему аналогичное $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)$ будет полезным и в дальнейшем для сокращения записи формул.

Из (54) мы получаем представление для дельта-функции

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ipx} dp^d = \frac{1}{(4\pi)^{\xi}} \lim_{\alpha\to 0} H(\alpha) \left(\frac{4}{x^2}\right)^{\xi-\alpha} = \frac{1}{\pi^{\xi}} \lim_{\alpha\to 0} \frac{H(\alpha)}{x^{2\alpha'}}. \tag{56}$$

Воспользовавшись (55), для интегральных операторов K, K' в координатном представлении с ядрами

$$K(x,y) = \frac{c}{(x-y)^{\alpha}}, \; K'(x,y) = \frac{1}{c(x-y)^{2(d-\alpha-\epsilon)}}, \tag{57}$$

гле c, α, ϵ - заданные числа, мы получаем

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int K(x,y) K'(y,x') dy^d = \pi^{\xi} H(\alpha, d-\alpha) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{H(\epsilon)}{(x-x')^{2\epsilon'}} = \pi^d H(\alpha, d-\alpha) \delta(x-x'). \tag{58}$$

Следовательно, ядро обратного к K оператора имеет вид

$$K^{-1}(x,y) = p(\alpha) K'(x,y) = \frac{p(\alpha)}{c(x-y)^{2(d-\alpha)}}, \; p(\alpha) = \frac{1}{\pi^d H(\alpha, d-\alpha)} = \frac{H(\alpha', -\alpha')}{\pi^d}. \tag{59}$$

В следствие того, что $\Gamma(x,-x) = \Gamma(x)\Gamma(-x) = -\pi/(x\sin(\pi x))$, для $p(\alpha)$ имеется также представление

$$p(\alpha) = -\frac{\alpha' \sin(\pi\alpha')\Gamma(\alpha, d-\alpha)}{\pi^{d+1}}. \tag{60}$$

В главном однопетлевом приближении уравнения (49), (50) в координатной форме записи имеют вид

$$\frac{p(\alpha)}{A(x-y)^{2(d-\alpha)}} = -\lambda \frac{AB}{(x-y)^{2(\alpha+\sigma)}}, \; \frac{p(\sigma)}{B(x-y)^{2(d-\sigma)}} = -\lambda \frac{n}{2} \frac{A^2}{(x-y)^{4\alpha}}. \tag{61}$$

Из (61) следует, что

$$\sigma = d - 2\alpha, \; \lambda A^2 B + p(\alpha) = 0, \; np(\alpha) = 2p(d-2\alpha). \tag{62}$$

Записав α в виде $\alpha = \xi - 1 - \eta/2$ и воспользовавшись (60), (62), мы плучаем уравнение

$$n(1+\eta/2)\sin(\pi(1+\eta/2))\Gamma(\xi-1-\eta/2, \xi+1+\eta/2) = 2(\xi-2-\eta)\sin\pi(\xi-2-\eta)\Gamma(2+\eta, d-2-\eta).$$

При больших n мы получаем следующий результат

$$\eta = \eta_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sigma = 2 + \eta_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \; \lambda A^2 B = \frac{\eta_1 \Gamma(\xi-1, \xi+1)}{2} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{63}$$

где

$$\eta_1 = \frac{4(2-\xi)\sin(\pi\xi)\Gamma(d-2)}{\pi\Gamma(\xi-1, \xi+1)} = \frac{2(2-\xi)\sin(\pi\xi)\Gamma(2\xi)}{(2\xi-1)\pi\xi\Gamma(\xi)^2}. \tag{64}$$

В однопетлнвом приближении, пренебрегая вкладами $\mathcal{O}(\lambda^2)$ в правых частях (51), (52), мы получим для $\beta_2(A_3, V)$, $\beta_2'(A_3, V)$ систему уравнений

$$\beta_2^{-1} \beta_2(A_3, V) \beta_2^{-1} = \lambda \beta_2' \beta_2(A_3, V) + \lambda \beta_2 \beta_2'(A_3, V), \tag{65}$$

$$\beta_2'^{-1} \beta_2'(A_3, V) \beta_2'^{-1} = \lambda \beta_2 \beta_2(A_3, V). \tag{66}$$

Обозначим $t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$ симметричеый тензор ранга k построенный из компонент x_μ вектора $x = \{x_1, ..., x_d\}$ в d-мерном пространстве такой что его след по любой паре компонент с номерами i, j равен нулю:

$$Tr^{(ij)} t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \sum_{\mu_i,\mu_j=1}^{d} \delta_{\mu_i\mu_j} t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = 0 \tag{67}$$

где $\delta_{\mu_i\mu_j}$ - символ Кронекера. Кроме того, предполагается, что

$$t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_k} + \tilde{t}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x), \tag{68}$$

и $\tilde{t}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$ является линейной комбинацией тензоров, каждый из которых построен из произведения $n > 0$ символов Кронеккера, $k-2n \geq 0$ компонент вектора x и $(x^2)^n$. Этими условиями тензор $t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$, который мы будем называть неприводимым, определяется однозначно.

Если ∂_x - вектор $\partial_x = \{\partial_1, \ldots \partial_d\}$, где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, то

$$t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \frac{(-1)^k x^{2(\gamma+k)}\Gamma(\gamma)}{2^k\Gamma(\gamma+k)} t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(\partial)\frac{1}{x^{2(\gamma)}} = \frac{x^{2k}}{2^k\Gamma(k)} t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(\partial_x)\ln x^2, \tag{69}$$

Нетрудно также убедиться, воспользовавшмсь (55),(69), что

$$\begin{aligned}
&\int\int dx_1^{(d)} dx_2^{(d)} \frac{1}{(x-x_1)^{2a}} \frac{t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^{2b}} \frac{1}{(x_2-x')^{2c}} = \\
&= \frac{(-1)^k\Gamma(b-k)}{2^k\Gamma(b)} t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(\partial_x) \int\int dx_1^{(d)} dx_2^{(d)} \frac{1}{(x-x_1)^{2a}} \frac{1}{(x_1-x_2)^{2(b-k)}} \frac{1}{(x_2-x')^{2c}} = \\
&= \frac{(-1)^k\pi^d H(a, b-k, c, 3\xi-a-b-c+k)\Gamma(b-k)}{2^k\Gamma(b)} t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(\partial_x) \frac{1}{(x-x')^{2(a+b+c-k-d)}} = \\
&= \frac{\pi^d H(a, b-k, c, 3\xi-a-b-c+k)\Gamma(b-k, a+b+c-d)}{\Gamma(b, a+b+c-k-d)} \frac{t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x-x')}{(x-x')^{2(a+b+c-d)}}.
\end{aligned} \tag{70}$$

Ищем решение уравнений (65), (66) в координатном представлении в виде

$$\beta_2(A_3, V) = \beta_2(A_3, V; x, x')_{\mu_1,\ldots,\mu_k} = C\frac{t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x-x')}{(x-x')^{2\gamma}}, \tag{71}$$

$$\bar{\beta}_2(A_3, V) = \bar{\beta}_2(A_3, V; x, x')_{\mu_1,\ldots,\mu_{k'}} = \bar{C}\frac{t^{(\bar{k})}_{\mu_1\ldots\mu_{\bar{k}}}(x-x')}{(x-x')^{2\bar{\gamma}}} \tag{72}$$

где $C, \bar{C}, \gamma, \bar{\gamma}$ постоянные параметны, мы видим, что (59), (65), (66) могут удовлетворяться только при $k = \bar{k}$. При этом их прававя и левая части оказываются пропорциональны тензору $t^{(k)}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x-x')$, и в качестве следствий из (65), (66) мы получаем уравнения

$$\frac{Cp(\alpha)q^{(k)}(\alpha,\gamma)}{A^2(x-x')^{2(d-2\alpha+\gamma)}} + \frac{\lambda BC}{(x-x')^{2(\sigma+\gamma)}} + \frac{\lambda A\bar{C}}{(x-x')^{2(\alpha+\bar{\gamma})}} = 0, \tag{73}$$

$$\frac{\bar{C}p(\sigma)q^{(k)}(\sigma,\bar{\gamma})}{B^2(x-x')^{2(d-2\sigma+\bar{\gamma})}} + \frac{n\lambda AC}{(x-x')^{2(\alpha+\gamma)}} = 0, \tag{74}$$

в которых мы использовали обозначение $q^{(k)}(\zeta,\chi)$ для функции

$$q^{(k)}(\zeta,\chi) = \frac{H(\xi-\zeta, d-\zeta, \chi-k, 2\zeta-\chi+k-\xi)\Gamma(\chi-k, d-2\zeta+\chi)}{\Gamma(\chi, d-2\zeta+\chi-k)} \tag{75}$$

Для того, чтобы уравнения (73), (74) имели решение, должны выполнятьтся соотношения

$$\bar{\gamma} = \gamma + \sigma - \alpha = \gamma + d - 3\alpha \tag{76}$$

$$Cp(\alpha)q^{(k)}(\alpha,\gamma) + \lambda A^2BC + \lambda A^3\bar{C} = 0, \tag{77}$$

$$2\bar{C}p(\sigma)Q^{(k)}(\sigma,\bar{\gamma}) + n\lambda AB^2C = 0. \tag{78}$$

Здесь равенства (76) обеспечивают совпадение показателей степеней при $(x-x')^2$ в (73) и (74), а (77), (78) - это система однородных линейных уравнений для констант $C, \bar{C}$. Условие ее разрешимости записывается в виде

$$p(\sigma)q^{(k)}(\sigma,\bar{\gamma})(p(\alpha)q^{(k)}(\alpha,\gamma)+\lambda A^2B)+n\lambda^2A^4B^2=0.$$

Подставив сюда $p(\alpha)=\lambda A^2B$, $p(\sigma)=n\lambda A^2B/2$, $\sigma=d-2\alpha$, $\bar{\gamma}=\gamma+d-3\alpha$, мы получаем уравнение

$$q^{(k)}(\sigma,\bar{\gamma})(q^{(k)}(\alpha,\gamma)+1)=2. \tag{79}$$

Обозначив $\alpha-\gamma=\sigma-\bar{\gamma}=\rho$, и подставив в (79) $\gamma=\alpha-\rho, \bar{\gamma}=\sigma-\rho$ мы запишем (79) в виде уравнения на индекс ρ

$$Q^{(k)}(\sigma,\rho)(Q^{(k)}(\alpha,\rho)+1)=2, \tag{80}$$

где использовано обозначение

$$Q^{(k)}(\zeta,\rho)=\frac{H(\xi-\zeta,d-\zeta,\zeta-\rho-k,\rho+\zeta+k-\xi)\Gamma(\zeta-\rho-k,d-\zeta-\rho)}{\Gamma(\zeta-\rho,d-\zeta-\rho-k)}=$$
$$=\frac{\Gamma(\zeta,-\zeta',d-\zeta-\rho,\rho+k+\zeta')}{\Gamma(\zeta',d-\zeta,\zeta-\rho,\rho+k-\zeta')}. \tag{81}$$

При $k=0$ мы получаем

$$Q^{(0)}(\zeta,\rho)=H(\xi-\zeta,d-\zeta,\zeta-\rho,\rho+\zeta-\xi).$$

Для анализа решений уравнения (80) нам удобно записать его в виде

$$Q^{(k)}(\alpha,\rho)-\frac{2}{Q^{(k)}(\sigma,\rho)}+1=0, \tag{82}$$

а ункции $Q^{(k)}(\alpha,\rho), 2/Q^{(k)}(\sigma,\rho)$ представить как произведения двух функций:

$$Q^{(k)}(\alpha,\rho)=u_1^{(k)}(\alpha,\rho)u_2^{(k)}(\alpha,\rho),\ \frac{2}{Q^{(k)}(\sigma,\rho)}=v_1^{(k)}(\sigma,\rho)v_2^{(k)}(\sigma,\rho),$$

где при $\alpha=\xi-1-\eta/2,\ \sigma=2-\eta$

$$u_1^{(k)}(\alpha,\rho)=\frac{(\eta-2\rho+2\xi-2)(\eta-2\rho+2\xi)(\eta+2(\rho+k-1))(\eta+2(\rho+k))}{(\eta+2\xi-2)(\eta+2\xi)(\eta-2)\eta}, \tag{83}$$

$$u_2^{(k)}(\alpha,\rho)=\frac{\Gamma(1+\eta/2,1-\eta/2+\rho+k,1+\eta/2+\xi,1-\eta/2-\rho+\xi)}{\Gamma(1-\eta/2,1+\eta/2+\rho+k,1-\eta/2+\xi,1+\eta/2-\rho+\xi)}, \tag{84}$$

$$v_1^{(k)}(\sigma,\rho)=\Gamma(2-\eta-\rho,2-\eta+\rho+k-\xi), \tag{85}$$

$$v_2^{(k)}(\sigma,\rho)=\frac{2\Gamma(\eta+\xi-2,\eta+2\xi-2)}{\Gamma(2-\eta,2-\eta-\xi,\eta+\rho+k+\xi-2,\eta-\rho+2\xi-2)}. \tag{86}$$

Мы ищем решение уравнения (82) в виде $\rho=\rho(\eta)=\rho_0+\rho_1\eta+\mathcal{O}(\eta^2)$. При $\eta=0$ функция $u_1^{(k)}(\alpha,\rho)$ может быть сингулярной, а $u_2^{(k)}(\alpha,\rho)$ при малых η конечна:

$$u_1^{(k)}(\alpha,\rho)=\frac{2(\rho_0+k-1)(\rho_0+k)(\rho_0-\xi)(1+\rho_0-\xi)}{\eta(1-\xi)\xi}+\mathcal{O}(\eta^0),\ u_2^{(k)}(\alpha,\rho)=1+\mathcal{O}(\eta). \tag{87}$$

Функцмя $v_1^{(k)}(\alpha,\rho)$ сингулярна в точке $\eta=0$ при $\rho_0=2+n$ и $\rho_0=\xi-2-n-k$, где $n\geq 0$ - целое число:

$$v_1^{(k)}(\alpha,\rho)\big|_{\rho_0=2+n}=\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(4+k+n-\xi)}{\eta\, n!(1+\rho_1)}+\mathcal{O}(\eta^0), \tag{88}$$

$$v_1^{(k)}(\alpha,\rho)\big|_{\rho_0=\xi-2-n-k}=\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(4+k+n-\xi)}{\eta\, n!(1-\rho_1)}+\mathcal{O}(\eta^0). \tag{89}$$

Функции $v_2^{(k)}(\alpha,\rho)$ при этих значениях ρ_0 и $\eta=0$ конечна и

$$Q^{(k)}(\alpha,\rho)\Big|_{\rho_0=2+n}=\frac{2F_1^{(k)}(\xi,n)}{\eta}+\mathcal{O}(\eta^0),\ Q^{(k)}(\alpha,\rho)\Big|_{\rho_0=\xi-2-n-k}=\frac{2F_1^{(k)}(\xi,n)}{\eta}+\mathcal{O}(\eta^0), \tag{90}$$

$$\frac{1}{Q^{(k)}(\sigma,\rho)}\Bigg|_{\rho_0=2+n}=\frac{F_2^{(k)}(\xi,n)}{\eta(1+\rho_1)}+\mathcal{O}(\eta^0),\ \frac{1}{Q^{(k)}(\sigma,\rho)}\Bigg|_{\rho_0=\xi-2-n-k}=\frac{F_2^{(k)}(\xi,n)}{\eta(1-\rho_1)}+\mathcal{O}(\eta^0), \tag{91}$$

где

$$F_1^{(k)}(\xi,n)=\frac{(1+k+n)(2+k+n)(2+n-\xi)(3+n-\xi)}{(1-\xi)\xi}, \tag{92}$$

$$F_2^{(k)}(\xi,n)=\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(4+k+n-\xi,\xi-2,2\xi-2)}{n!\,\Gamma(2-\xi,n+k+\xi,2\xi-n-4)}. \tag{93}$$

$$\rho^{(k)}(\xi,n)=2+n-\rho_1^{(k)}(\xi,n)\eta,\ \rho^{(k)}(\xi,n)=\xi-2-n-k+\rho_1^{(k)}(\xi,n)\eta, \tag{94}$$

$$\rho_1^{(k)}(\xi,n)=1+\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(4+k+n-\xi,\xi-2,2\xi-2)}{n!(1+k+n)(2+k+n)(2+n-\xi)(3+n-\xi)\Gamma(-\xi,k+n+\xi,2\xi-4-n)}. \tag{95}$$

Если $\rho_0=1-k,-k,\xi,\xi-1$, то $u_1^{(k)}(\alpha,\rho)$ конечно при $\eta\to 0$ и ρ_1 определяется подстановкой $\rho=\rho_0+\rho_1\eta$ в (82) и требованием, чтобы полученное таким образом уравнение удовлетворялось с точносттью до $\mathcal{O}(\eta)$. Воспользовавшись (83- 86), нетрудно убедиться, что если $\rho=\rho_0+\rho_1\eta$, и $\rho_0=1-k,-k,\xi,\xi-1$ то $Q^{(k)}(\alpha,\rho)=u_1^{(k)}(\alpha,\rho)$ несингулярно при $\eta\to 0$ и $1/Q^{(k)}(\sigma,\rho)=1/Q^{(k)}(2,\rho_0)+\mathcal{O}(\eta)$. Учитывая эти функции в приближении $\eta=0$, мы получаем 4 уравнения для ρ_1

$$\frac{(1+2\rho_1)(k+\xi-2)(k+\xi-1)}{(1-\xi)\xi}+\frac{2k!\Gamma(2\xi-2)}{\Gamma(2\xi+k-3)}+1=0,\ \text{при}\ \ \rho_0=1-k,$$
$$\frac{(1+2\rho_1)(1-k-\xi)(k+\xi)}{(1-\xi)\xi}-\frac{2(k+1)!\Gamma(2\xi-2)}{\Gamma(k+2\xi-2)}+1=0,\ \text{при}\ \ \rho_0=-k,$$
$$\frac{(1-2\rho_1)(2-k-\xi)(1-k-\xi)}{(1-\xi)\xi}+\frac{2k!\Gamma(2\xi-2)}{\Gamma(k+2\xi-3)}+1=0,\ \text{при}\ \ \rho_0=\xi-1,$$
$$\frac{(1-2\rho_1)(1-k-\xi)(k+\xi)}{(1-\xi)\xi}-\frac{2(k+1)!\Gamma(2\xi-2)}{\Gamma(2\xi+k-2)}+1=0,\ \text{при}\ \ \rho_0=\xi.$$

В результате их решения мы получаем следующий результат

$$\rho=1-k+\frac{\eta}{2(k+\xi-2)(k+\xi-1)}\left((1-k)(k+2\xi-2)+\frac{\xi\Gamma(1+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-3)}\right), \tag{96}$$

$$\rho=-k+\frac{\eta}{2(k+\xi-1)(k+\xi)}\left((1-k)k+2\xi(1-k-\xi)+\frac{\xi\Gamma(2+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-2)}\right), \tag{97}$$

$$\rho=\xi-1+\frac{\eta}{2(k+\xi-2)(k+\xi-1)}\left((k-1)(k+2\xi-2)-\frac{\xi\Gamma(1+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-3)}\right), \tag{98}$$

$$\rho_0=\xi+\frac{\eta}{2(k+\xi-1)(k+\xi)}\left((k-1)k+2\xi(k+\xi-1)-\frac{\xi\Gamma(2+k,2\xi-1)}{\Gamma(k+2\xi-2)}\right). \tag{99}$$

Сингулярная часть

Сингулярности могут возникать и в

Список литературы

[1] A.N. Vasiliev, Functional Methods in Quantum Field theory and Statistical Physics, CRS Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York (1998).

[2] K. G. Wilson, J. Kogut, The renormalization group and the ϵ-expansion; Physics Reports (Section C of Physics Letters) 12, No. 2 (1974) 75-200.

[3] J. A. Gracey, Four loop renormalization of ϕ^3 theory in six dimensions, Phys. Rev. D92 (2015) no.2, 025012; arXiv: 1506.03357v1 [hep-th].

[4] Andrej B. Arbuzov, Diego Julio Cirilo-Lombardo, arXiv:1812.06805v1 [hep-th].

[5] G. Vitiello, Topological defects, fractals and the structure of quantum field theory, arXiv: 0807.2164 [hep-th], secI,V.

[6] A.Iorio, G.Vitiello, Quantum dissipation and Quantum Groups, arXiv: hep-th/9503136.

[7] M.Chernodub, A gauge invariant object in non-Abelian gauge theory, arXiv: hep-lat/0503018.

[8] I. V. Kharuk, Theoretical and Mathematical Physics volume 209, pages 1423-1436 (2021).

[9] A. L. Pismensky, Yu. M. Pis'mak, Scaling violation in massless scalar quantum field models in logarithmic dimensions, J. Phys. A. 48 (2015) 325401.

[10] Gerhard Mack, arXiv:0907.2407v1 [hep-th].

[11] Gerhard Mack, Bulg. J. Phys., 36 (2009), Pp. 214-226; arXiv:0909.1024 [hep-th].

[12] A. N. Vasiliev, Y. M. Pis'mak, Y. R. Khonkonen, Teor. Mat. Fiz. 46 (1981a) 157.

[13] A. N. Vasiliev, Y. M. Pis'mak, Y. R. Khonkonen, Teor. Mat. Fiz. 47 (1981b) 291.

[14] A. N. Vasiliev, Y. M. Pis'mak, Y. R. Khonkonen, Teor. Mat. Fiz. 50 (1981c) 127.

[15] A. L. Pismenskii, Theoretical and Mathematical Physics, 185(1): 1516-1521 (2015).

[16] A. L. Pismensky, International Journal of Modern Physics A. 30-24 (2015) 1550138; arXiv: 1511.03211 [hep-th], 2015.

[17] T. Huber, D. Maître, Computer Physics Communications 178 (2008) 755-776.

[18] A. V. Kotikov (2001) arXiv:hep-ph/0102177v1.

[19] D. I. Kazakov (1984) Translated from Teor. Mat. Fiz. 62 l 127-135, January, 1985. Original article submitted January 16, 1984.

[20] P. A. Baikova, K. G. Chetyrkin, Nucl. Phys. B837 (2010) 186-220; arXiv:1004.1153v2 [hep-ph], 2010.

[21] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, Nucl. Phys. B192 (1981) 159-204.