Представление зарядово-обменного процесса $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$ под 0° в рамках упругого рассеяния $\mathrm{np} \to \mathrm{np}$ на 180°

Эксперимент «Дельта-Сигма»

ШИНДИН Роман
ЛФВЭ ОИЯИ

Семинар
Релятивистская ядерная динамика
ЛТФ ОИЯИ, 30 января 2020 г.

Содержание

Введение

1. Проект Дельта-Сигма
    1. Поляризованная Протонная Мишень
    2. Измерения $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{np})$, $1995 - 2001$ г.
    3. Катушки для Т-поляризации
2. Гипотеза Померанчука-Чью
3. Формула Дина
4. Конец привлекательной сказки ...

Цели Дельта-Сигма проекта

Начало проекта Дельта-Сигма — 1990 г. Название созвучно его замыслу — измерить наблюдаемые $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{np})$ и $\Delta\sigma_{\mathrm{T}}(\mathrm{np})$ — разности полных сечений при параллельном и антипараллельном состоянии спинов нейтрона и протона, маркеры L и T — направление поляризации спинов частиц пучка и мишени в продольном и поперечном направлениях.

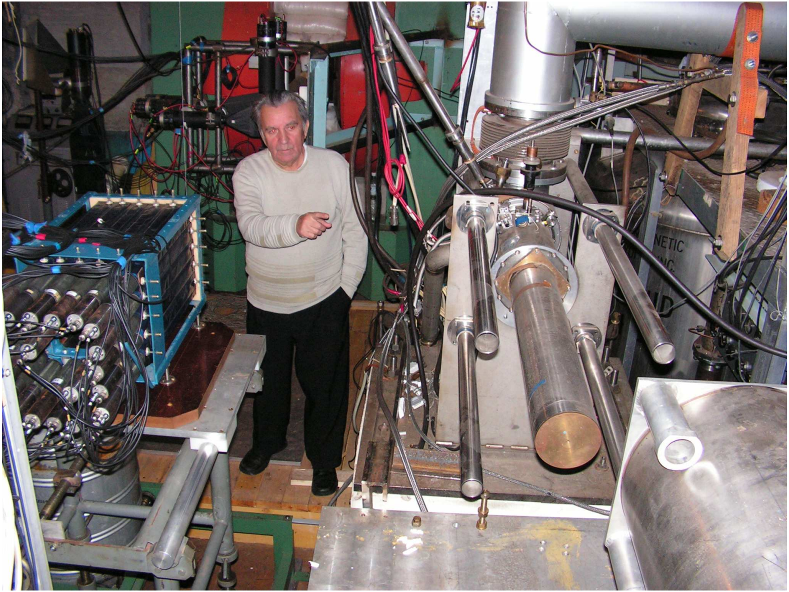
Основная задача — прямое восстановление трёх амплитуд упругого NN-рассеяния под нулём градусов. Для полного комплекта данных необходимо также измерить коэффициенты спиновых корреляций $\mathrm{A}_{00\mathrm{kk}}(\mathrm{np})$ и $\mathrm{A}_{00\mathrm{nn}}(\mathrm{np})$. Шесть наблюдаемых ($\sigma_{0\,\mathrm{tot}}(\mathrm{np})$ и $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{dt}_{\mathrm{np}\to\mathrm{np}}$ известны) позволят найти три вещественные и три мнимые части NN-амплитуд.

С. М. Биленький, Л. И. Лапидус, Р. М. Рындин, **Поляризованная протонная мишень в опытах с частицами высоких энергий**, УСП. ФИЗ. НАУК. 1964. Октябрь. Т. 84. С 243–301.

J. Bystrycky, F. Lehar, P. Wintrenitz **Formalizm of nucleon-nucleon elastic scattering experiments**, Le Journal de Physique. 1978. V. 39, № 1. P. 1–32.

F. Lehar et al. **Measurement of the spin dependent neutron-proton total cross section differences $\Delta\sigma_{\mathrm{T}}$ and $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}$ between 0.63 and 1.08 GeV**, Phys. Lett. 1987. 30 April. V. B, № 189. P. 241–244.

Мишень с замороженными спинами



Резултаты $\boldsymbol{\Delta\sigma}_{\rm L}(\rm np)$, $1995 - 2001$ г.

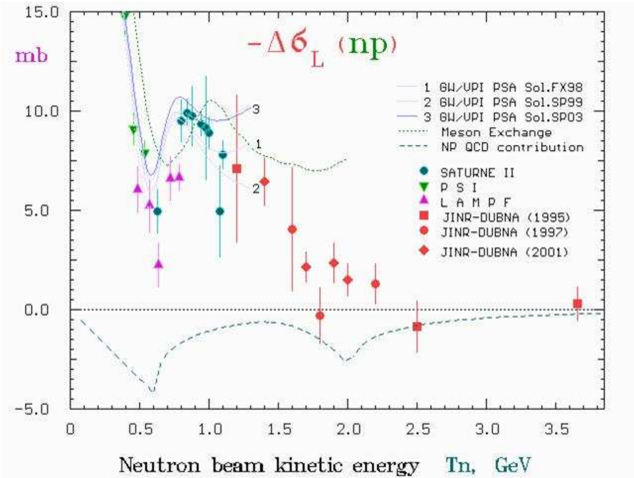
F. Lehar et al. **The movable polarized target as a basic equipment for high energy spin physics experiments at the JINR-Dubna accelerator complex**, Nucl. Instr. Meth. A. 1995. V. 356. P. 58–61.

B. P. Adiasevich et al. **Measurements of the total cross section difference $\Delta\sigma_{\rm L}$(np) in $\rm np$ transmission at 1.19, 2.49 and 3.65 GeV**, Zeit. Phys. 1996. V. C, № 71. P. 65–74.

V. I. Sharov, L. N. Strunov et al., **Measurements of the total cross section difference $\Delta\sigma_{\rm L}$(np) at 1.59, 1.79 and 2.20 GeV**, Eur. Phys. J. 2000. V. C, № 13. P. 255–265.

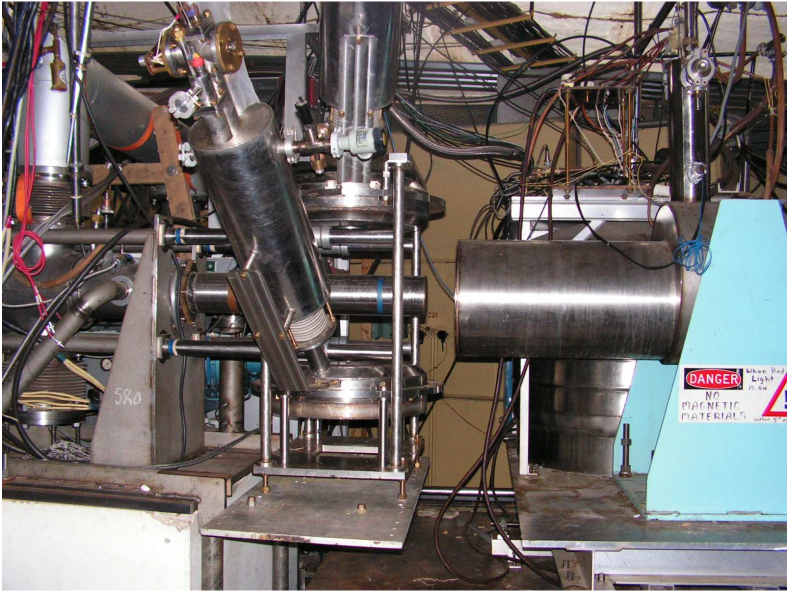
V. I. Sharov, L. N. Strunov et al., **Measurements of the total cross section difference $\Delta\sigma_{\rm L}$(np) at 1.39, 1.69, 1.89 and 1.99 GeV** Eur. Phys. J. 2004. V. C, № 37. P. 79–90, Physics of Atomic Nuclei 2005. V. 68, № 11. P. 1796–1811,.

Энергозависимость $\Delta\sigma_L(\mathrm{np})$

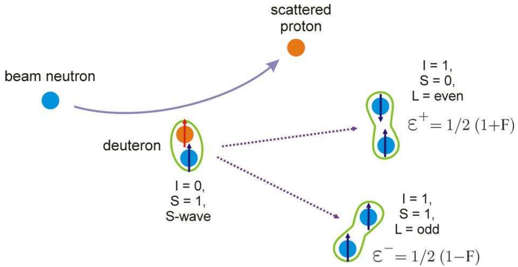


Энергозависимость разности полных сечений $\Delta\sigma_L = \sigma(\rightrightarrows) - \sigma(\rightleftarrows)$ взаимодействия нейтрона и протона с параллельным и антипараллельным состоянием спинов. Особенность возле $\mathrm{T_n} = 1.8$ ГэВ может быть связана с фазовым переходом двух нуклонов в конфигурацию из шести кварков.

Сверхпроводящие катушки для Т-моды



Гипотеза Померанчука-Чью



Получить спиновые характеристики взаимодействия нуклонов, используя неполяризованные нейтроны и дейтроны.

И. Я. Померанчук, Обменные столкновения быстрых нейтронов с дейтронами, Доклады Академии Наук. 1951. Т. LXXVII. С. 249.

И. Я. Померанчук, *Собрание научных трудов*. Физика Элементарных частиц. Сильные взаимодействия. Издательство «НАУКА», Москва 1972. Т. III. С. 14–27.

G. F. Chew, The Inelastic Scattering of High Energy Neutrons by Deuterons According to the Impulse Approximation, Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 196–202.

G. F. Chew, A Theoretical Calculation of the Inelastic Scattering of 90-Mev Neutrons by Deuterons, Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 710–716.

А. Б. Мигдал, Теория ядерных реакций с образованием медленных частиц, ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С 3–9. Доложено на теор. семинаре в Институте физических проблем, октябрь 1950 г.

Формула Дина

$$\left.\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}\right|_{nd\to p(nn)} = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}\right|^{\text{Flip}}_{np\to pn}. \tag{1}$$

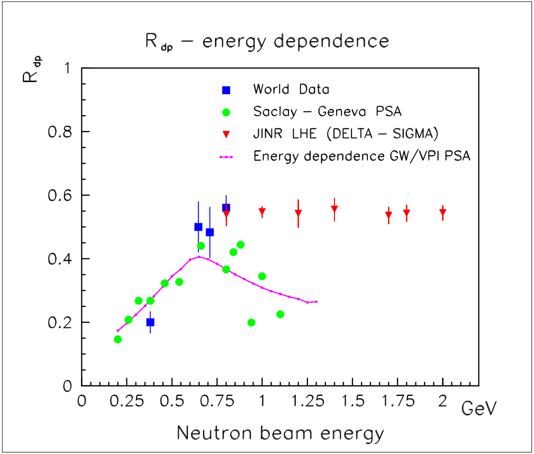
$$r^{\text{nfl/fl}}_{np\to pn\,(0)} = \left.\frac{d\sigma(0)}{dt}\right|^{\text{Non-Flip}}_{np\to pn} \Big/ \left.\frac{d\sigma(0)}{dt}\right|^{\text{Flip}}_{np\to pn} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{R_{dp}(0)} - 1\,. \tag{2}$$

N. W. Dean, Symmetrization Effect in Spectator Momentum Distribution, Phys. Rev. D. 1972. V. 5, № 7. P. 1661–1666.

N. W. Dean, Inelastic Scattering from Deuteron in the Impulse Approximation, Phys. Rev. D. 1972. V. 5, № 11. P. 2832–2835.

V. L. Lyuboshitz *et al.*, Charge-exchange breakup of the deuteron with the production of two protons and spin structure of the amlitude of the transfer reaction, JINR Preprint, E1-99-280, 1999.

R_{dp}-отношение, 2004–05 г., противоречия



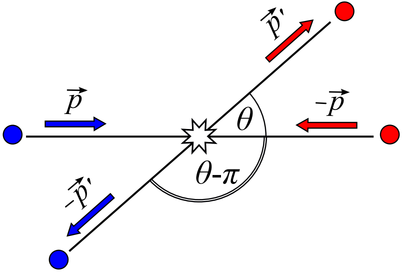
Прети фабула

«Конец привлекательной сказки и неожиданные результаты на нуклотроне», газета «Дубна». 2005. 2 декабря. № 47. С. 2–3. **Франтишек Легар**

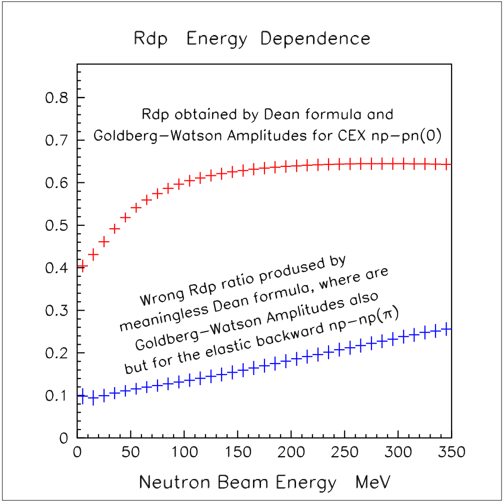
Речь пойдет о том, как физики из группы Василия Шарова и Леонида Струнова в рамках программы исследований на экспериментальной установке «ДЕЛЬТА-СИГМА» в Лаборатории высоких энергий, более-менее независимо от своего желания и убеждения окончательно уничтожили одну очень привлекательную теорию. Надо добавить, что сделали они это благодаря своей совести и этике научной работы, с помощью нового сверхпроводящего ускорителя, заранее полученного нейтронного пучка, современной аппаратуры и вычислительной техники.

55 лет тому назад: Г. Ф. Чью (G.F. Chew) из Беркли (Berkeley), и И. Померанчук из Москвы, оба теоретики, практически одновременно и независимо предложили метод, как определить часть взаимодействия нейтрона и протона, которая зависит от спина. Правда только в случае, если нейтрон и протон обмениваются зарядом, что обычно называется перезарядкой, или рассеянием назад.

What's happening



И всё таки они разные, 2006 г.



- **Любошиц**
- **BLW**
- **One more**

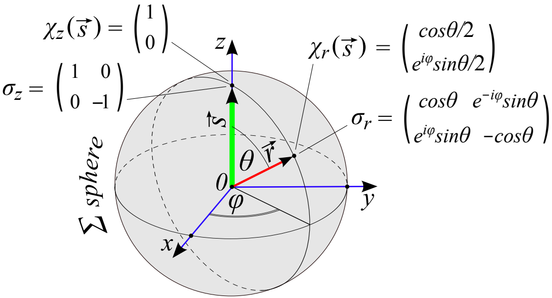
Теория

1. Волновая функция двух фермионов
    1. Принцип запрета Паули
2. Упругое рассеяния фермионов
    1. Рассеянная волна в плоскости реакции
    2. Смена представления
    3. Обобщение для нуклонов
3. Квазиупругая реакция $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$
    1. Формула Дина
    2. Новая формула
    3. Эквивалентность формы
4. Катастрофа PSA?

Оператор Паули $\widehat{\sigma}$

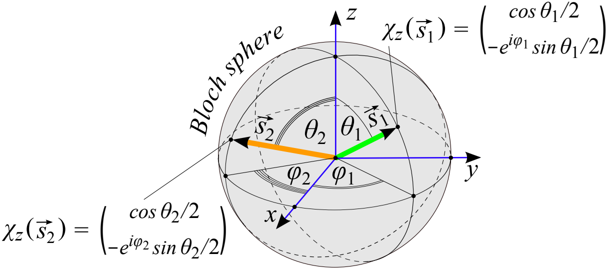
$$\widehat{\sigma} = \vec{\mathrm{i}}\sigma_{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{i}}\sigma_{\mathrm{y}} + \vec{\mathrm{k}}\sigma_{\mathrm{z}} \,, \quad \text{где:}$$

$$\sigma_{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathrm{y}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathrm{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Проекция $\widehat{\sigma}$ на любое направление $\vec{\mathrm{r}}$ равна единице: $|\sigma_{\mathrm{r}}|^2 = 1$, что можно представить в виде Σ-сферы. Каждой её точке соответствует оператор $\sigma_{\mathrm{r}} = (\widehat{\sigma}, \vec{\mathrm{r}})$, имеющий два собственных вектора $\chi_{\mathrm{r}}(\mathrm{s_z} = +\frac{\hbar}{2})$ и $\chi_{\mathrm{r}}(\mathrm{s_z} = -\frac{\hbar}{2})$.

Спин $\frac{1}{2}$, Сфера Блоха



Независимость фермионов факторизует их общую функцию: $\chi_{12} = \chi_1\chi_2$.

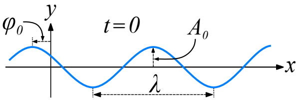
Свобода нумерации — два варианта:

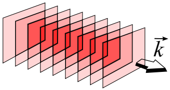
$$|\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2, \quad |\vec{s}_2,\vec{s}_1\rangle = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_2,$$

$$|\alpha|^2+|\beta|^2 = |\gamma|^2+|\delta|^2 = 1\,.$$

Пространственная часть волны

$e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ — *плоская* волна, т.к. $\vec{k}\vec{r} = \mathrm{const}$ — поверхность $\perp$ $\vec{k}$.





$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{r}} = \psi_p(\vec{r}) = \vec{p}\rangle\,.$$

Две частицы:

$$|\vec{p}_1,\vec{p}_2\rangle = |\vec{p}_1\rangle_1\,|\vec{p}_2\rangle_2\,, \quad |\vec{p}_2,\vec{p}_1\rangle = |\vec{p}_2\rangle_1\,|\vec{p}_1\rangle_2\,.$$

В системе центра масс:

$$\psi_{12} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{r}}\,, \quad \psi_{21} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{r}} = \psi_{12}^*\,, \quad \text{где:} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,.$$

Принцип запрета Паули

Два тождественных фермиона не могут находиться в одном и том же состоянии $\Rightarrow$ волновая функция антисимметрична относительно перестановки:

$$\Psi = |\vec{\mathrm{p}}_1, \vec{\mathrm{s}}_1; \vec{\mathrm{p}}_2, \vec{\mathrm{s}}_2\rangle = -|\vec{\mathrm{p}}_2, \vec{\mathrm{s}}_2; \vec{\mathrm{p}}_1, \vec{\mathrm{s}}_1\rangle \,.$$

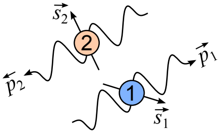
$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} |\vec{\mathrm{p}}_1, \vec{\mathrm{s}}_1\rangle_1 & |\vec{\mathrm{p}}_2, \vec{\mathrm{s}}_2\rangle_1 \\ |\vec{\mathrm{p}}_1, \vec{\mathrm{s}}_1\rangle_2 & |\vec{\mathrm{p}}_2, \vec{\mathrm{s}}_2\rangle_2 \end{vmatrix} \,.$$

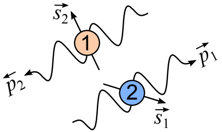
Или:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_2 \psi_{12} - \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_2 \psi_{12}^* \right] \,. \tag{3}$$

Полная перестановка не меняет конфигурацию

Частица, имеющая спин $\vec{s}_1$, летит по направлению $\vec{p}_1$, присвоен ли ей номер 1 или 2. Также связаны между собой состояния $\vec{s}_2$ и $\vec{p}_2$ другого фермиона.





$|\vec{p}_1, \vec{s}_1\rangle_1 \, |\vec{p}_2, \vec{s}_2\rangle_2$ $\qquad$ $|\vec{p}_2, \vec{s}_2\rangle_1 \, |\vec{p}_1, \vec{s}_1\rangle_2$

Лемма (Wave conditions)

Свободная волновая функция однозначно определяет квантовые состояния каждой частицы. Нумерация частиц значения не имеет.

► Блохинцев

Стандартная форма

Волну (3) можно преобразовать к виду:

$$\Psi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\delta - \beta\gamma)\,\chi_0\,\psi_{\mathrm{s}} +$$

$$+ \alpha\gamma\chi_{1,+1}\,\psi_{\mathrm{a}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\delta + \beta\gamma)\,\chi_{1,0}\,\psi_{\mathrm{a}} + \beta\delta\,\chi_{1,-1}\,\psi_{\mathrm{a}}\,. \qquad (4)$$

ψ_{s} и ψ_{a} — чётная и нечётная пространственные функции:

$$\psi_{\mathrm{s}} = \frac{\psi_{12} + \psi_{12}^*}{\sqrt{2}} \qquad \text{и} \qquad \psi_{\mathrm{a}} = \frac{\psi_{12} - \psi_{12}^*}{\sqrt{2}}\,.$$

χ_0 — спин $\mathrm{S} = 0$,
$\chi_{1,+1}$, $\chi_{1,0}$ и $\chi_{1,-1}$ — спин $\mathrm{S} = 1$ с проекциями $+\hbar$, 0 и $-\hbar$:

$$\chi_{1,+1} = \uparrow_1\uparrow_2\,,$$

$$\chi_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2)\,, \qquad \chi_{1,0} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_1\downarrow_2 + \downarrow_1\uparrow_2)\,,$$

$$\chi_{1,-1} = \downarrow_1\downarrow_2\,.$$

▶ **ST-relation**

Матрица рассеяния

Спиновая матрица Гольдбергера-Ватсона:

$$\mathrm{M}(\boldsymbol{\theta}) \;=\; \mathrm{a}+\mathrm{b}\,\boldsymbol{\sigma}_{1\mathrm{n}}\boldsymbol{\sigma}_{2\mathrm{n}}+\mathrm{c}\,(\boldsymbol{\sigma}_{1\mathrm{n}}+\boldsymbol{\sigma}_{2\mathrm{n}})+\mathrm{e}\,\boldsymbol{\sigma}_{1\mathrm{m}}\boldsymbol{\sigma}_{2\mathrm{m}}+\mathrm{f}\,\boldsymbol{\sigma}_{1\mathrm{l}}\boldsymbol{\sigma}_{2\mathrm{l}}\;.$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{n}}=(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{\mathrm{n}})\,,\quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}=(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{\mathrm{m}})\,,\quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{l}}=(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{\mathrm{l}})\;.$$

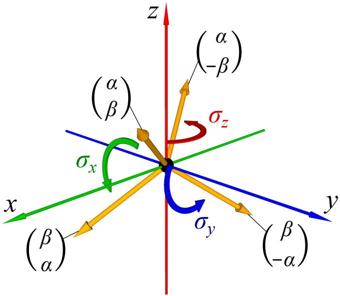
$$\vec{\mathrm{n}}=\frac{\vec{\mathrm{p}}\times\vec{\mathrm{p}}\,'}{|\vec{\mathrm{p}}\times\vec{\mathrm{p}}\,'|}\,,\quad \vec{\mathrm{m}}=\frac{\vec{\mathrm{p}}-\vec{\mathrm{p}}\,'}{|\vec{\mathrm{p}}-\vec{\mathrm{p}}\,'|}\,,\quad \vec{\mathrm{l}}=\frac{\vec{\mathrm{p}}+\vec{\mathrm{p}}\,'}{|\vec{\mathrm{p}}+\vec{\mathrm{p}}\,'|}\,,$$

Амплитуды $(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{e},\mathrm{f})$ – комплексные функции угла рассеяния θ и кинетической энергии частиц. Дифференциальное сечение (частицы неполяризованы):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{d}\Omega}=|\mathrm{a}|^2+|\mathrm{b}|^2+2|\mathrm{c}|^2+|\mathrm{e}|^2+|\mathrm{f}|^2\;.$$

Физический смысл операторов спина

Ось квантования (z) произвольна — система (x, y, z) на векторах $(\vec{m}, \vec{l}, \vec{n})$:



Повороты спина — унитарный оператор $\widehat{R}_t(\varphi) = I\cos\frac{\varphi}{2} + i(\widehat{\sigma}\cdot\vec{t})\sin\frac{\varphi}{2}$,
где $\vec{t}$ — ось вращения, и φ — угол поворота.

Матрицы σ_x, σ_y и σ_z — операторами поворота на 180° вокруг своих осей.

▶ Система волн

Ортогональность состояний

Спиноры $\binom{\alpha}{-\beta}$, $\binom{\beta}{\alpha}$ и $\binom{\beta}{-\alpha}$ ортогональны исходному $\binom{\alpha}{\beta}$ на Сфере Блоха:

$$\forall \quad \vec{\mathrm{r}} \text{ и } \chi = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi}\int \chi^{+}(\widehat{\sigma}\vec{\mathrm{r}})\chi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

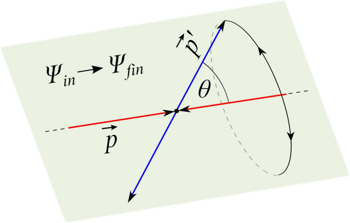
В среднем преобразование $\binom{\alpha}{\beta} \to \binom{\alpha}{-\beta}$, $\binom{\beta}{\alpha}$ или $\binom{\beta}{-\alpha}$ есть spin-flip.

Абсолютный переворот спина — переход $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta^{*} \\ -\alpha^{*} \end{pmatrix}$.

!!! любой спинор можно представить в виде линейной комбинации:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varepsilon \end{pmatrix} = (\alpha^{*}\rho + \beta^{*}\varepsilon)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (\beta\rho - \alpha\varepsilon)\begin{pmatrix} \beta^{*} \\ -\alpha^{*} \end{pmatrix}.$$

Преобразование начальной волны $\Psi_{\rm in}$ в исходящую волну $\Psi_{\rm fin}$:



Для смены направления $\vec{\mathrm{p}} \to \vec{\mathrm{p}}\,'$ — оператор $\widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}) \times \boldsymbol{\psi}_{12} \;=\; \boldsymbol{\psi}'_{12} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\mathrm{p}}\,'\vec{\mathrm{r}}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}} \,,$$

$$|\widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta})|^2 = 1 \,, \quad \widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta})\widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\omega}) \,, \quad \widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}+2\pi\mathrm{n}) \,,$$

$$\Psi_{\rm fin} \;=\; \widehat{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\theta}) \times \Psi_{\rm in} \,.$$

$\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\Omega$

Для вероятностного описания реакции умножаем Ψ_{fin} на амплитуду:

$$\Phi = \mathrm{A}(\theta)\Psi_{\mathrm{fin}}\,.$$

Дифференциальное сечение[1]:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega} = |\Phi|^2 = |\mathrm{A}(\theta)|^2\,.$$

Амплитуда рассеянной волны (одна или несколько) определяется матрицей $\mathrm{M}(\theta)$ — рассеяние полностью детерминировано:

$$\Phi = \widehat{\mathrm{P}}(\theta)\,\mathrm{M}(\theta)\times\Psi_{\mathrm{in}}\,.$$

---

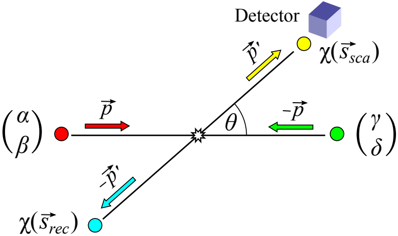
[1] Вектор тока плотности вероятности рассеянной нормированной волны по направлению угла θ в плоскости реакции:

$$\vec{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{ih}}{\mathrm{m}}\left(\Phi\nabla\Phi^* - \Phi^*\nabla\Phi\right) = \vec{\mathrm{v}}\,'\,|\mathrm{A}(\theta)|^2\,, \quad \text{где:} \quad \vec{\mathrm{v}}\,' = \frac{\vec{\mathrm{p}}\,'}{\mathrm{m}}\,.$$

Поток частиц dN, направленных в $\mathrm{d}\Omega$, составляет: $\mathrm{dN} = \mathrm{J}\mathrm{d}\Omega = \mathrm{v}'|\mathrm{A}(\theta)|^2\mathrm{d}\Omega$. Поскольку $|\vec{\mathrm{p}}| = |\vec{\mathrm{p}}\,'| = \mathrm{p}$ и $\mathrm{N} = \mathrm{J}_0 = \mathrm{p}/\mathrm{m}$, для дифф. сечения находим: $\mathrm{d}\sigma(\theta) = \mathrm{dN}/\mathrm{N} = \mathrm{J}\mathrm{d}\Omega/\mathrm{J}_0 = |\mathrm{A}(\theta)|^2\,\mathrm{d}\Omega$.

Смена представления

Рассеянной частицей считаем ту, которая попадает в детектор.
Положение детектора меняем на противоположное, что равносильно смене представления, которую из частиц считать рассеянной или отдачной.



Этот выбор произволен, но !!! от него **не может** зависеть состояние двух частиц после взаимодействия:

$$\Phi = \widehat{\mathrm{P}}(\theta)\mathrm{M}(\theta) \times \Psi_{\mathrm{in}} = \widehat{\mathrm{P}}(\theta - \pi)\mathrm{M}(\theta - \pi) \times \Psi_{\mathrm{in}} \, .$$

Смена представления

Пространство изотропно $\Rightarrow \mathrm{M}(\theta-\pi) = \mathrm{M}(\pi-\theta)$, $\widehat{\mathrm{P}}(\theta-\pi) \equiv \widehat{\mathrm{P}}(\pi)\widehat{\mathrm{P}}(\theta)$.
$\widehat{\mathrm{P}}(\pi)$ инвертирует направления движения: $\widehat{\mathrm{P}}(\pi) \times |\vec{\mathrm{p}}_1, \vec{\mathrm{p}}_2\rangle = |\vec{\mathrm{p}}_2, \vec{\mathrm{p}}_1\rangle$.
В литературе его называют оператором Майораны $\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{M} \equiv \widehat{\mathrm{P}}(\pi)$. Получаем закон:

$$\boxed{\mathrm{M}(\theta) \;=\; \widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{M} \times \mathrm{M}(\pi-\theta)} \tag{5}$$

Теорема (Смена представлений)

Действие оператора Майораны на матрицу упругого рассеяния двух тождественных фермионов равносильно перемещению детектора в диаметрально противоположную точку наблюдения в системе центра масс.

Так как полная перестановка изменяет знак, то:

$$\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{M}\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{B} \times \Psi \;=\; -\Psi \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{M} \;\equiv\; -\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{B} \;=\; -\frac{1}{2}\left(1+\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2\right)$$

▶ **Любошиц**

Определение спина $\frac{1}{2}\hbar$ здесь не играло никакой роли — формула (5) справедлива для любых двух тождественных частиц с любым количеством квантовых чисел. От этого зависит лишь выражение оператора Майораны.

Обобщение для нуклонов

Волновая функция нейтрона и протона

$$\Psi_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{n}_1\mathrm{p}_2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2\psi_{12} - \mathrm{p}_1\mathrm{n}_2\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_2\psi^*_{12}\right]$$

Матрица NN-рассеяния

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathrm{M}_0(\boldsymbol{\theta})\frac{1-\widehat{\boldsymbol{\tau}}_1\widehat{\boldsymbol{\tau}}_2}{4} + \mathrm{M}_1(\boldsymbol{\theta})\frac{3+\widehat{\boldsymbol{\tau}}_1\widehat{\boldsymbol{\tau}}_2}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{M}_1(\boldsymbol{\theta})+\mathrm{M}_0(\boldsymbol{\theta})\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{M}_1(\boldsymbol{\theta})-\mathrm{M}_0(\boldsymbol{\theta})\right)\widehat{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}},\end{aligned}$$

$\widehat{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}(1+\widehat{\boldsymbol{\tau}}_1\widehat{\boldsymbol{\tau}}_2)$ – оператор Бартлетта для изотопических переменных

Оператор Майораны

$$\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{M}}\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}\widehat{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}} \times \Psi = -\Psi \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{M}} \equiv -\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}\widehat{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2}(1+\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_1\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_2)\,\frac{1}{2}(1+\widehat{\boldsymbol{\tau}}_1\widehat{\boldsymbol{\tau}}_2)$$

Формула Дина

Волновая функция трёх нуклонов:

$$\Psi_{3N} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |\xi_1\rangle_1 & |\xi_2\rangle_1 & |\xi_3\rangle_1 \\ |\xi_1\rangle_2 & |\xi_2\rangle_2 & |\xi_3\rangle_2 \\ |\xi_1\rangle_3 & |\xi_2\rangle_3 & |\xi_3\rangle_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\{i,j,k\}} |\xi_1\rangle_i \, \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|\xi_2\rangle_j \, |\xi_3\rangle_k - |\xi_3\rangle_j \, |\xi_2\rangle_k \Big) \,,$$

$$\{i,j,k\} = \{1,2,3\},\ \{2,3,1\},\ \{3,1,2\}\,.$$

Пусть ξ_1 – состояние налетающего нейтрона, а ξ_2 и ξ_3 – нуклоны дейтрона. Все частичные волны ортогональны, достаточно варианта $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$:

$$\Psi_{nd} = |\xi_1\rangle_1 \cdot \Psi_d = n_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_1 |\vec{p}_n\rangle_1 \cdot \frac{p_2 n_3 - n_2 p_3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_3 \psi_{d,23}\,.$$

$$\psi_{d,23} \equiv \Phi_H(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3\hbar^3}} \oint \Phi_H(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}\, d^3\vec{p}\,, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3\,.$$

$\Phi_H(p)$ — решение Хюльтена — S-волна в импульсном представлении.

Формула Дина

$$\Phi_{\mathrm{p(nn)}} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{M}_1(\theta) - \mathrm{M}_0(\theta))\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathrm{P}}(\theta) \times \Psi_{\mathrm{nd}} \ =$$

$$= \sum \mathrm{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{exch}} \mathrm{p}_1 \begin{pmatrix}\alpha_{\mathrm{t}}\\ \beta_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}_1 |\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}{}'\rangle_1 \, \frac{\mathrm{n}_2\mathrm{n}_3}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix}\gamma_{\mathrm{t}}\\ \delta_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_3 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}_2} - \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix}\gamma_{\mathrm{t}}\\ \delta_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}_3 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}_3}\right] \psi_{\mathrm{d},23} \ =$$

$$= \sum \mathrm{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{exch}} \mathrm{p}_1 \begin{pmatrix}\alpha_{\mathrm{t}}\\ \beta_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}_1 |\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}{}'\rangle_1 \cdot \frac{\mathrm{n}_2\mathrm{n}_3}{\sqrt{2}} \left[\chi_{(-)} \cos\tfrac{\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}}{2\hbar} + \mathrm{i}\chi_{(+)} \sin\tfrac{\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}}{2\hbar}\right] \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{nn}}} \psi_{\mathrm{d},23} \, ,$$

$$\chi_{(\pm)} = \begin{pmatrix}\gamma_{\mathrm{t}}\\ \delta_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_3 \pm \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix}\gamma_{\mathrm{t}}\\ \delta_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}_3 .$$

Здесь $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{nn}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathrm{r}}_2 + \vec{\mathrm{r}}_3)$ — радиус вектор nn-пары, $\mathrm{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{exch}}$ — амплитуда матрицы рассеяния: $\mathrm{A}_1^{\mathrm{exch}} = \mathrm{a}^{\mathrm{exch}} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0)$ и т.д.

Дифф. сечение реакции $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$ определяется как интеграл $|\Phi_{\mathrm{p(nn)}}|^2$ по объему ядра дейтерия и усредняется по всем направлениям спинов нейтронов:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega}_{\mathrm{nd}\to\mathrm{p(nn)}} = \oint \overline{|\Phi_{\mathrm{p(nn)}}|^2}\, \mathrm{dV} \ =$$

$$= \frac{1}{2} \sum |\mathrm{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{exch}}|^2 \left[\overline{|\chi_{(-)}|^2} \oint |\psi_{\mathrm{d}}|^2 \cos^2\tfrac{\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}}{2\hbar}\, \mathrm{dV} + \overline{|\chi_{(+)}|^2} \oint |\psi_{\mathrm{d}}|^2 \sin^2\tfrac{\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}}{2\hbar}\, \mathrm{dV}\right] .$$

Формула Дина

$$|\chi_{(-)}|^2 = 2|\delta\gamma_t - \gamma\delta_t|^2 \,, \quad |\chi_{(+)}|^2 = 4 - |\chi_{(-)}|^2 \,,$$

$$\overline{|\delta\gamma_t - \gamma\delta_t|^2} = \begin{cases} 0, \text{ если: } \begin{pmatrix}\gamma_t \\ \delta_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix}, \\ 2/3, \text{ если: } \begin{pmatrix}\gamma_t \\ \delta_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma \\ -\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\delta \\ \gamma\end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix}-\delta \\ \gamma\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Весовые доли спиновых состояний $\chi_{(-)}$ и $\chi_{(+)}$.

A_t^{exch}	γ_t	δ_t	$\overline{\lvert\chi_{(-)}\rvert^2}$	$\overline{\lvert\chi_{(+)}\rvert^2}$
a^{exch}	γ	δ	0	4
b^{exch}	γ	$-\delta$	4/3	8/3
c^{exch}	γ	δ	0	4
	γ	$-\delta$	4/3	8/3
e^{exch}	δ	γ	4/3	8/3
f^{exch}	$-\delta$	γ	4/3	8/3

Формула Дина

$$\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|_{nd\to p(nn)} = \frac{2}{3}\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|^{Flip}_{np\to pn}\oint|\psi_d|^2\cos^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\,dV\,+$$

$$+\left(2\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|^{Non\text{-}Flip}_{np\to pn}+\frac{4}{3}\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|^{Flip}_{np\to pn}\right)\oint|\psi_d|^2\sin^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\,dV\,. \quad (6)$$

Это и есть формула[2] Натана Дина, которую он получил в 1972 г. Если частица рассеивается под нулём, переданный импульс $\vec{q}$ стремится к нулю, поэтому: $\cos^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\approx 1$ и $\sin^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\approx 0$, что даёт:

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}\right|_{nd\to p(nn)} = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}\right|^{Flip}_{np\to pn}} \quad (1)$$

[2] В литературе распространено представление формулы Дина, в котором используется форм-фактор дейтрона: $F(q)=\oint|\psi_d|\cos\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}\,dV$:

$$\oint|\psi_d|^2\cos^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\,dV=\frac{1}{2}\oint|\psi_d|^2(1+\cos\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar})\,dV=\frac{1}{2}(1+F(q))\,,$$

$$\oint|\psi_d|^2\sin^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\,dV = \frac{1}{2}(1-F(q))\,.$$

Новая формула

Начальные условия те же самые:

$$\Psi_{nd} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\{i,j,k\}} n_i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_i |\vec{p}_n\rangle_i \cdot \frac{p_j n_k - n_j p_k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_k \psi_{d,jk} \,,$$

$$\{i,j,k\} = \{1,2,3\},\ \{2,3,1\},\ \{3,1,2\}\,.$$

В представлении $np \to np$ рассеянной частицей является нейтрон (образующий с нейтроном-спектатором nn-пару), а протон становится частицей отдачи:

$$\Phi_{(nn)p} \quad = \quad \frac{1}{2}(M_1(\pi-\theta)+M_0(\pi-\theta))\widehat{P}(\pi-\theta)\times\Psi_{nd}\,.$$

Если протон имел номер j, действие оператора $\widehat{P}(\pi-\theta)$ можно представить так:

$$\widehat{P}(\theta)\widehat{P}(\pi)\times|\vec{p}_n\rangle_i\,\psi_{d,jk} \;=\; \widehat{P}(\theta)\widehat{P}(\pi)\times|\vec{p}_n\rangle_i\,|\vec{p}_{p^*}\rangle_j\,|\vec{p}_{n^*}\rangle_k \;=$$

$$=\;\widehat{P}(\theta)\times|\vec{p}_n\rangle_j\,|\vec{p}_{p^*}\rangle_i\,|\vec{p}_{n^*}\rangle_k \;= e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}\,|\vec{p}_n\rangle_j\,|\vec{p}_{p^*}\rangle_i\,|\vec{p}_{n^*}\rangle_k \;=\; |\vec{p}_p{}'\rangle_j\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}_i}\,\psi_{d,ik}\,.$$

Новая формула

$$\Phi_{(nn)p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\{i,j,k\}} \sum_t A_t \left[\frac{n_i p_j n_k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \gamma_t \\ \delta_t \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_k |\vec{p}_p{}'\rangle_j \, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}_i} \psi_{d,\,ik} \; + \right.$$

$$\left. - \; \frac{n_i n_j p_k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \gamma_t \\ \delta_t \end{pmatrix}_k |\vec{p}_p{}'\rangle_k \, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}_i} \psi_{d,\,ij} \right] .$$

Упорядочиваем по номерам протонов. С учётом ортогональности системы волновых функций снимаем суммирование по $\{i, j, k\}$:

$$\Phi_{(nn)p} = \sum_t A_t \, p_1 \begin{pmatrix} \gamma_t \\ \delta_t \end{pmatrix}_1 |\vec{p}_p{}'\rangle_1 \cdot \frac{n_2 n_3}{\sqrt{2}} \left[\chi_{(-)} \cos\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar} - i\chi_{(+)} \sin\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}_{nn}} \psi_{d,\,23} \,,$$

$$\chi_{(\pm)} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix}_3 \pm \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_3 .$$

Новая формула

Интегрируем $|\Phi_{(\mathrm{nn})\mathrm{p}}|^2$ по объёму дейтрона и усредняем по всем направлениям спинов нейтронов:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\pi-\theta)}{\mathrm{d}\Omega}_{\mathrm{nd}\to(\mathrm{nn})\mathrm{p}} = \oint \overline{|\Phi_{(\mathrm{nn})\mathrm{p}}|^2}\,\mathrm{dV} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum |\mathrm{A_t}|^2 \left[\overline{|\chi_{(-)}|^2} \oint |\psi_\mathrm{d}|^2 \cos^2 \tfrac{\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}}{2\hbar}\,\mathrm{dV} + \overline{|\chi_{(+)}|^2} \oint |\psi_\mathrm{d}|^2 \sin^2 \tfrac{\vec{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{r}}}{2\hbar}\,\mathrm{dV}\right].$$

Так как состояния нейтронов теперь некоррелированы, при подстановке любого спинора $\binom{\alpha_\mathrm{t}}{\beta_\mathrm{t}} = \binom{\alpha}{\beta}$, $\binom{\alpha}{-\beta}$, $\binom{\beta}{\alpha}$ или $\binom{\beta}{-\alpha}$ получаем точные равенства:

$$\overline{|\chi_{(-)}|^2} = 2\overline{|\gamma\beta_\mathrm{t} - \delta\alpha_\mathrm{t}|^2} = 1 \quad , \qquad \overline{|\chi_{(+)}|^2} = 3\,.$$

Новая формула

$$\left.\frac{d\sigma(\pi-\theta)}{d\Omega}\right|_{nd\to(nn)p} = \left.\frac{d\sigma(\pi-\theta)}{d\Omega}\right|_{np\to np}\left(\frac{1}{2}+\oint|\psi_d|^2\sin^2\frac{\vec{q}\vec{r}}{2\hbar}\,dV\right)$$

Учитывая определение форм-фактора дейтрона, а также эквивалентность перезарядки вперёд и рассеяния нейтрона назад, получаем:

$$\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|_{nd\to p(nn)} = \left(1-\frac{1}{2}F(q)\right)\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|_{np\to pn} \quad . \tag{7}$$

Так как $F(0)=1$, получаем новую закономерность:

Теорема (Одна вторая)

Дифференциальное сечение квазиупругой реакции $nd\to p(nn)$ при рассеянии протонов под нулём равно половине дифференциального сечения свободного процесса $np\to pn$.

В своей работе Натан Дин высказал мысль о нецелесообразности использовать формализм реакции $np\to np\,(\pi-\theta)$ для описания процесса квазиупругой перезарядки нейтрона на дейтроне: ≪For the non-charge-exchange reaction, however, no such simple result follows≫. Тем не менее, полученный здесь результат (7) оказался даже более простым, чем формула Дина (6).

Эквивалентность формы

Налетающий нейтрон в состоянии $\binom{\alpha}{\beta}_1$. Дейтрон мишени в состоянии $\binom{\gamma}{\delta}_2\binom{\gamma}{\delta}_3$. Перезарядка нейтрона на дейтроне $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$ под нулём:

$$\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}_{\mathrm{nd}\to\mathrm{p(nn)}} = \frac{1}{2}\sum |A_t^{\mathrm{exch}}|^2 \overline{\left|\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}\gamma_t\\ \delta_t\end{pmatrix}_3 - \begin{pmatrix}\gamma_t\\ \delta_t\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_3\right|^2},$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_t\\ \delta_t\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma\\ -\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\delta\\ \gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\delta\\ -\gamma\end{pmatrix}\right\}.$$

Выбивание нейтроном протона вперёд, представление $\mathrm{nd} \to \mathrm{(nn)p}$:

$$\frac{d\sigma(\pi)}{d\Omega}_{\mathrm{nd}\to\mathrm{(nn)p}} = \frac{1}{2}\sum |A_t|^2 \overline{\left|\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}\alpha_t\\ \beta_t\end{pmatrix}_3 - \begin{pmatrix}\alpha_t\\ \beta_t\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_3\right|^2},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_t\\ \beta_t\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}\right\}.$$

Если nd-взаимодействие называется реакцией $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$, нейтрон — частица отдачи и его спин $\binom{\gamma_t}{\delta_t}$ представлен одним из 4-х вариантов изменения спинового состояния протона ядра дейтерия. Когда $\binom{\gamma_t}{\delta_t} = \binom{\gamma}{\delta}$, вклад нефлиповой амплитуды $a^{\mathrm{exch}}(0)$ исчезает. Наоборот, все флиповые спиноры $\binom{\gamma}{-\delta}$, $\binom{\delta}{\gamma}$ и $\binom{\delta}{-\gamma}$ входят с весом $\frac{4}{3}$. После умножения на $\frac{1}{2}$ остаётся $\frac{2}{3}$ от Flip-части дифференциального сечения упругой перезарядки $\mathrm{np} \to \mathrm{pn}\,(0)$. Если используется представление $\mathrm{nd} \to \mathrm{(nn)p}$, нейтрон в np-системе считается рассеянным на 180°. Все состояния $\binom{\alpha_t}{\beta_t}$ входят с равным весом 1 поэтому никакого разделения Flip и Non-Flip частей не происходит и от дифф. сечения реакции $\mathrm{np} \to \mathrm{np}\,(\pi)$ остаётся $\frac{1}{2}$.

Катастрофа PSA?

Формулы (6) и (7) дублируют выражение дифф. сечения $\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{nd}\to\mathrm{p(nn)}}$.
Приводя подобные слагаемые и сокращая одинаковые сомножители, находим:

$$\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{F(q)}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega}_{\mathrm{np}\to\mathrm{pn}} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\mathrm{F(q)}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega}^{\mathrm{Flip}}_{\mathrm{np}\to\mathrm{pn}} + \left(1-\mathrm{F(q)}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega}^{\mathrm{Non\text{-}Flip}}_{\mathrm{np}\to\mathrm{pn}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega}^{\mathrm{Flip}}_{\mathrm{np}\to\mathrm{pn}} = 3\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega}^{\mathrm{Non\text{-}Flip}}_{\mathrm{np}\to\mathrm{pn}}} \quad . \tag{8}$$

Гипотеза (3 : 1)

Соотношение между флиповой и нефлиповой частями дифференциального сечения перезарядки $\mathrm{np}\to\mathrm{pn}$ *под любыми углами рассеяния находится в пропорции 3 к 1.*

Если верим Closure Approximation.

Результаты измерения $\mathrm{R_{dp}}$

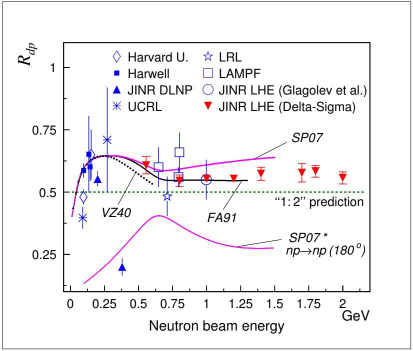
Таблица: Значения $\mathrm{R_{dp}}$-отношения дифференциальных сечений квазиупругой $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$ и упругой $\mathrm{np} \to \mathrm{pn}$ реакций перезарядки при рассеянии под нулём градусов и независимые источники ошибок наблюдаемых величин.

$\mathrm{T_n}$, ГэВ	0.55	0.8	1.0	1.2	1.4	1.7	1.8	2.0
$\mathrm{R_{dp}}$	0.608	0.546	0.553	0.554	0.574	0.550	0.584	0.557
ε	0.035	0.024	0.012	0.010	0.027	0.034	0.024	0.024

L. N. Strunov *et al.*, **Measurements of neutron-proton spin observables at 0° using highest energy polarized $\mathrm{d, n}$ probes**, Proceedings of International conference SPIN-PRAHA 2005, *Czech. J. Phys., Suppl. C*, vol. 56, pp. C434–C357, 2006.

V. I. Sharov, A. A. Morozov, R. A. Shindin, *et al.*, **Measurements of the ratio $\mathrm{r_{dp}}$ of the quasi-elastic $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$ to the elastic $\mathrm{np} \to \mathrm{pn}$ charge-exchange process yields at zero proton emission angle over the $0.55 - 2.0$ GeV neutron beam energy region**, *Eur. Phys. J. A*, vol. 39, pp. 267–280, March 2009.

R_{dp}-отношение



Энергетическая зависимость R_{dp} -отношения выходов протонов квазиупругой $nd \to p(nn)$ и упругой $np \to pn$ реакций перезарядки при рассеянии под нулём.

Решения фазового анализа VZ40, FA91 и SP07, взятые из базы данных SAID как амплитуды $np \to np\,(\theta = \pi)$ реакции, переведены унитарным преобразованием в представление $np \to pn\,(\theta = 0)$, и значения R_{dp} рассчитаны по формуле Дина (1). Кривая SP07* получена нами по рекомендации Ф. Легара подстановкой Non-Flip и Flip частей реакции $np \to np\,(\theta = \pi)$, т.е. игнорируя разницу представлений. Прямая пунктирная линия "1:2" — правильный расчёт отношения R_{dp} в рамках реакции $np \to np\,(\theta = \pi)$ и выражает идею экранирования протона в ядре дейтерия нейтроном-спектатором в половине случаев nd-взаимодействия.

Расчёт $r^{nfl/fl}_{np\to pn}$-отношения

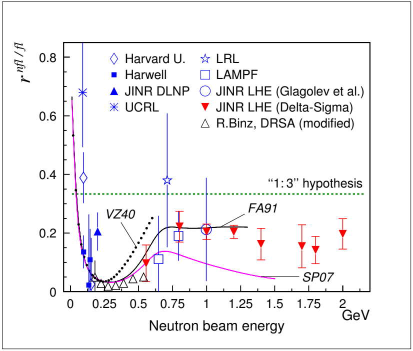
$$r^{nfl/fl}_{np\to pn\,(0)} = \frac{d\sigma(0)}{dt}^{\text{Non-Flip}}_{np\to pn} \Big/ \frac{d\sigma(0)}{dt}^{\text{Flip}}_{np\to pn} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{R_{dp}(0)} - 1\,. \qquad (2)$$

Таблица: Экспериментальные значения отношения $r^{nfl/fl}_{np\to pn\,(0)}$ между нефлиповой и флиповой частями дифф. сечения свободного процесса $np\to pn$ при рассеянии под нулём градусов.

T_n, ГэВ	0.55	0.8	1.0	1.2	1.4	1.7	1.8	2.0
$r^{nfl/fl}_{np\to pn}$	0.097	0.222	0.204	0.204	0.162	0.155	0.142	0.197
ε	0.062	0.053	0.026	0.023	0.054	0.074	0.046	0.052

R. A. Shindin, D. K. Guriev, A. A. Morozov, *et al.*, Separation of flip and non-flip parts of $np\to pn$ charge exchange at energies $T_n = 0.5-2.0$ GeV, *Eur. Phys. J. ST*, vol. 162, No. 1, pp. 117–123, 2008.

Р. А. Шиндин, Д. К. Гурьев, А. А. Морозов *и др.*, Разделение дифференциального сечения перезарядки $np\to pn$ на flip и non-flip части при энергии $T_n = 0.5-2.0$ ГэВ, *Письма в ЭЧАЯ*, vol. 8, №. 2 (165), pp. 157–168, 2011.



Энергозависимость $r^{nfl/fl}_{np\to pn}$ процесса упругой $np \to pn$ перезарядки под нулём.

Экспериментальные точки получены прямым расчётом по значениям R_{dp}. Решения фазового анализа VZ40, FA91 и SP07 взяты из базы данных SAID как амплитуды упругого $np \to np\,(\theta = \pi)$ рассеяния назад и переведены в представление $np \to pn\,(\theta = 0)$ перезарядки, после чего вычислено отношение $r^{nfl/fl}_{np\to pn}$. Точки Р. Бинца, полученные путём прямого восстановления амплитуд упругой реакции $np \to np\,(\theta = \pi)$, также приведены нами к представлению зарядово-обменного процесса $np \to pn\,(\theta = 0)$. Пунктирная линия "1:3" — предсказание (8) отношения Non-Flip и Flip частей рассеяния, которое следует из формулы Дина (6) и новой закономерности (7).

Заключение

1. Исследован вопрос о различии двух представлений упругого взаимодействия двух тождественных частиц. Представления зависят от нашего выбора, которую из частиц считать рассеянной, что приводит к двум эквивалентным, но не тождественным разложениям волновой функции в конечном состоянии. Переход между представлениями обеспечивает оператор Майораны.

2. Предложен способ вывода формулы Дина для реакции квазиупругой перезарядки $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$, в котором волновая функция протона и двух нейтронов в конечном состоянии получается прямым действием нуклонной матрицы рассеяния.

   Используя альтернативное представление упругого взаимодействия нейтрона и протона, то есть $\mathrm{np} \to \mathrm{np}$ рассеяние назад, определена новая формула, согласно которой дифференциальные сечения процессов $\mathrm{nd} \to \mathrm{p(nn)}$ и $\mathrm{np} \to \mathrm{pn}$ при рассеянии протонов под нулём градусов должны относиться как 1:2.

3. В диапазоне энергий $\mathrm{T_n} = 0.55 \div 2.0$ ГэВ определённое экспериментально отношение $\mathrm{R_{dp}}$ подобно константе на уровне 0.56. Это превышает расчётное значение $\mathrm{R_{dp}} = 1/2$ на 12 % и связано в основном с погрешностью метода импульсного приближения. Величина $\mathrm{r^{nfl/fl}_{np\to pn\,(0)}}$ распределена на уровне 0.17 с ошибкой 0.05, что соответствует 15 % вклада Non-Flip части.

Приложение

Собственные вектора оператора $(\widehat{\sigma}\cdot\vec{\mathrm{r}})$

Пусть единичный вектор $\vec{\mathrm{r}}$ определён в сферической системе координат значениями азимутального и полярного углов θ и φ, тогда:

$$\sigma_{\mathrm{r}} \;=\; \sigma_{\mathrm{x}} \sin\theta\cos\varphi + \sigma_{\mathrm{y}}\sin\theta\sin\varphi + \sigma_{\mathrm{z}}\cos\theta \;=$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \chi^{(+)} \otimes \left(\chi^{(+)}\right)^{+} - \chi^{(-)} \otimes \left(\chi^{(-)}\right)^{+}\,, \tag{9}$$

$$\text{где:}\quad \chi^{(+)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi^{(-)} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \left|\chi^{(\pm)}\right|^2 = 1\,.$$

Вектора $\chi^{(+)}$ и $\chi^{(-)}$ ортогональны, поэтому согласно (9) очевидно, что:

$$\sigma_{\mathrm{r}}\chi^{(+)} = \chi^{(+)} \quad , \qquad \sigma_{\mathrm{r}}\chi^{(-)} = -\chi^{(-)}\,.$$

Вернуться

Правильная волновая функция

Из книги Д. И. Блохинцева «Основы квантовой механики» (стр. 471):

Чтобы получить состояние протона и нейтрона, следует взять суперпозицию состояний с $T=1$ и $T=0$. Например, для синглетного состояния $S=0$, необходимая первичная волна напишется в виде:

$$\Psi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_a^0(r)\overbrace{S_a(s_{z1},\, s_{z2})\, S_a(t_{31},\, t_{32})}^{T=0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_s^0(r)\overbrace{S_a(s_{z1},\, s_{z2})\, S_s'''(t_{31},\, t_{32})}^{T=1} =$$

$$= e^{i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} S_{+\frac{1}{2}}(t_{31})\, S_{-\frac{1}{2}}(t_{32})\, S_a(s_{z1},s_{z2}) +$$

$$+ e^{i\vec{k}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)} S_{+\frac{1}{2}}(t_{32})\, S_{-\frac{1}{2}}(t_{31})\, S_a(s_{z1},\, s_{z2}). \qquad (134.19)$$

Действительно, эта суперпозиция представляет собой такую волну, что частица, имеющая импульс $+\vec{k}$, имеет изотопический спин $t_3 = +{}^1/_2$ (т. е. является протоном), а частица, имеющая импульс $-\vec{k}$, имеет изотопический спин $t_3 = -{}^1/_2$ (т. е. является нейтроном). Это есть правильный выбор первичной волны, представляющей протон с импульсом $+\vec{k}$ и нейтрон с импульсом $-\vec{k}$. Нумерация же частиц 1 и 2 не имеет никакого значения.

$$[\mathrm{n}_1\mathrm{p}_2\,\varphi_{12} + \mathrm{p}_1\mathrm{n}_2\,\varphi_{12}^*]\,\chi_0\,.$$

Вернуться

Условие волны в стандартной форме

$$\Psi \;=\; \mathrm{A}_0\,\chi_0\,\psi_{\mathrm{s}} \;+\; \mathrm{A}_{1,+1}\,\chi_{1,+1}\,\psi_{\mathrm{a}} \;+\; \mathrm{A}_{1,0}\,\chi_{1,0}\,\psi_{\mathrm{a}} \;+\; \mathrm{A}_{1,-1}\,\chi_{1,-1}\,\psi_{\mathrm{a}}\,.$$

$$\mathrm{A}_{1,+1} = \alpha\gamma\,,$$

$$\mathrm{A}_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\delta-\beta\gamma)\,, \qquad \mathrm{A}_{1,0} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\delta+\beta\gamma)\,,$$

$$\mathrm{A}_{1,-1} = \beta\delta\,,$$

Лемма (ST-relation)

Свободная волновая функция двух тождественных фермионов удовлетворяет условию:

$$\mathrm{A}_{1,0}^2 - \mathrm{A}_0^2 \;=\; 2\,\mathrm{A}_{1,+1}\mathrm{A}_{1,-1}\,.$$

Обратная задача восстановления проекций спина каждой частицы:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{A}_{1,0}-\mathrm{A}_0}{\sqrt{2}\,\mathrm{A}_{1,+1}} = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{A}_{1,-1}}{\mathrm{A}_{1,0}+\mathrm{A}_0}\,, \qquad \theta_{\vec{\mathrm{p}}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha}\,, \quad \varphi_{\vec{\mathrm{p}}} = -\arg\frac{\beta}{\alpha}\,;$$

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\mathrm{A}_{1,0}+\mathrm{A}_0}{\sqrt{2}\,\mathrm{A}_{1,+1}} = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{A}_{1,-1}}{\mathrm{A}_{1,0}-\mathrm{A}_0}\,, \qquad \theta_{-\vec{\mathrm{p}}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\delta}{\gamma}\,, \quad \varphi_{-\vec{\mathrm{p}}} = -\arg\frac{\delta}{\gamma}\,.$$

Вернуться

Ψ_0 и $\Psi_{1,0}$ — смешанные состояния

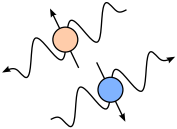
$$\Psi_0 \;=\; \chi_0\,\psi_{\rm s} \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2)\,(\psi_{12} + \psi^*_{12}) \;=$$

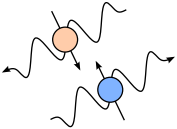
$$\tfrac{1}{2}\,[\uparrow_1\downarrow_2\;\psi_{12} - \downarrow_1\uparrow_2\;\psi^*_{12}] \;-\; \tfrac{1}{2}\,[\downarrow_1\uparrow_2\;\psi_{12} - \uparrow_1\downarrow_2\;\psi^*_{12}]$$

$$\Psi_{1,0} \;=\; \chi_{1,0}\,\psi_{\rm a} \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\uparrow_1\downarrow_2 + \downarrow_1\uparrow_2)\,(\psi_{12} - \psi^*_{12}) \;=$$

$$\tfrac{1}{2}\,[\uparrow_1\downarrow_2\;\psi_{12} - \downarrow_1\uparrow_2\;\psi^*_{12}] \;+\; \tfrac{1}{2}\,[\downarrow_1\uparrow_2\;\psi_{12} - \uparrow_1\downarrow_2\;\psi^*_{12}]$$

Каждая частичная волна Ψ_0 и $\Psi_{1,0}$ представляет два противоположных случая:





Вернуться

$$\Psi_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2\psi'_{12} - \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_2\psi'^{*}_{12}\right], \tag{10a}$$

$$\Psi_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\gamma\\ -\delta\end{pmatrix}_2\psi'_{12} - \begin{pmatrix}\gamma\\ -\delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}_2\psi'^{*}_{12}\right], \tag{10b}$$

$$\Psi'_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_2\psi'_{12} - \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}_2\psi'^{*}_{12}\right], \tag{10c}$$

$$\Psi''_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\gamma\\ -\delta\end{pmatrix}_2\psi'_{12} - \begin{pmatrix}\gamma\\ -\delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_2\psi'^{*}_{12}\right], \tag{10d}$$

$$\Psi_{\mathrm{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\delta\\ \gamma\end{pmatrix}_2\psi'_{12} - \begin{pmatrix}\delta\\ \gamma\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}_2\psi'^{*}_{12}\right], \tag{10e}$$

$$\Psi_{\mathrm{f}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\delta\\ -\gamma\end{pmatrix}_2\psi'_{12} - \begin{pmatrix}\delta\\ -\gamma\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}_2\psi'^{*}_{12}\right]. \tag{10f}$$

Вернуться

Ортогональность волн 10 a – f

	Ψ_a	Ψ_b	Ψ'_c	Ψ''_c
Ψ_a^+	1	$\cos\theta_1\cos\theta_2$	$\cos\theta_1$	$\cos\theta_2$
Ψ_b^+	$(\Psi_a^+\Psi_b)^*$	1	$\cos\theta_2$	$\cos\theta_1$
$\Psi_c'^+$	–	–	1	$\cos\theta_1\cos\theta_2$
$\Psi_c''^+$	–	–	–	1
Ψ_e^+	–	–	–	–
Ψ_f^+	–	–	–	–

$\Rightarrow$

	Ψ_e	Ψ_f
Ψ_a^+	$\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2$	$\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$
Ψ_b^+	$-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$	$-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2$
$\Psi_c'^+$	$i\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2$	$-i\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2$
$\Psi_c''^+$	$i\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2$	$-i\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2$
Ψ_e^+	1	$\cos\theta_1\cos\theta_2$
Ψ_f^+	–	1

Нет поляризации — нет интерференции волн!

Вернуться

$$\overline{\Psi_a^+\Psi_b} = \frac{1}{16\pi^2}\oint_0^{4\pi}\oint_0^{4\pi}\cos\theta_1\cos\theta_2\,d\Omega_1 d\Omega_2 = 0\,.$$

Согласно обобщенному принципу Паули, амплитуда $\hat{f}_{T=1}(\theta)$ антисимметрична относительно замены $\theta \to \pi - \theta$ и <u>перестановки</u> проекций спина двух частиц., а амплитуда $\hat{f}_{T=0}(\theta)$ – симметрична по отношению к этим операциям. Таким образом

$$\hat{f}_{T=1}(\theta) = -\hat{P}^{(1,2)}\hat{f}_{T=1}(\pi-\theta),$$

$$\hat{f}_{T=0}(\theta) = \hat{P}^{(1,2)}\hat{f}_{T=0}(\pi-\theta),$$

где

$$\hat{P}^{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\right)$$

оператор перестановки спиновых проекций.

Отсюда следует формула

$$\hat{f}_{np\to pn}(\theta) = -\hat{P}^{(1,2)}\hat{f}_{np\to np}(\pi-\theta)$$

Быстрицкий-Легар-Винтерниц

$$\mathrm{M}(\mathrm{k}',\mathrm{k}) = \mathrm{M}_0(\mathrm{k}',\mathrm{k})\,\frac{1-\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2}{4} + \mathrm{M}_1(\mathrm{k}',\mathrm{k})\,\frac{3+\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2}{4}\quad .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_\mathrm{T}(\mathrm{k}',\mathrm{k}) \quad &= \quad (\mathrm{a}_\mathrm{T}+\mathrm{b}_\mathrm{T}) + (\mathrm{a}_\mathrm{T}-\mathrm{b}_\mathrm{T})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\mathrm{n})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\mathrm{n}) + \mathrm{e}_\mathrm{T}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\mathrm{n}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\mathrm{n}) + \\
&+ \quad (\mathrm{c}_\mathrm{T}+\mathrm{d}_\mathrm{T})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\mathrm{m})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\mathrm{m}) + (\mathrm{c}_\mathrm{T}-\mathrm{d}_\mathrm{T})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\mathrm{l})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\mathrm{l})\,.
\end{aligned}$$

Таблица: Свойства симметрии амплитуд упругого NN-рассеяния.

$\mathrm{T}=0$	$\mathrm{T}=1$
$\mathrm{a}_0(\theta) = +\mathrm{a}_0(\pi-\theta)$	$\mathrm{a}_1(\theta) = -\mathrm{a}_1(\pi-\theta)$
$\mathrm{b}_0(\theta) = +\mathrm{c}_0(\pi-\theta)$	$\mathrm{b}_1(\theta) = -\mathrm{c}_1(\pi-\theta)$
$\mathrm{c}_0(\theta) = +\mathrm{b}_0(\pi-\theta)$	$\mathrm{c}_1(\theta) = -\mathrm{b}_1(\pi-\theta)$
$\mathrm{d}_0(\theta) = -\mathrm{d}_0(\pi-\theta)$	$\mathrm{d}_1(\theta) = +\mathrm{d}_1(\pi-\theta)$
$\mathrm{e}_0(\theta) = -\mathrm{e}_0(\pi-\theta)$	$\mathrm{e}_1(\theta) = +\mathrm{e}_1(\pi-\theta)$

Диагональный вид NN-матрицы

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 \frac{1-\widehat{\tau}_1\widehat{\tau}_2}{4} + \mathrm{M}_1 \frac{3+\widehat{\tau}_1\widehat{\tau}_2}{4} \; .$$

NN-матрица разделяется на 4 независимых варианта:

$$\mathrm{M}^{\mathrm{pp}} = \mathrm{M}_1 \frac{1}{4}\left(1-\tau_{1,3}-\tau_{2,3}+\tau_{1,3}\tau_{2,3}\right) \; ,$$

$$\mathrm{M}^{\mathrm{nn}} = \mathrm{M}_1 \frac{1}{4}\left(1+\tau_{1,3}+\tau_{2,3}+\tau_{1,3}\tau_{2,3}\right) \; ,$$

$$\mathrm{M}^{\mathrm{np}\to\mathrm{np}} = \mathrm{M}^{\mathrm{pn}\to\mathrm{pn}} = \frac{1}{2}(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_0)\,\frac{1}{2}\left(1-\tau_{1,3}\tau_{2,3}\right) \; ,$$

$$\mathrm{M}^{\mathrm{np}\to\mathrm{pn}} = \mathrm{M}^{\mathrm{pn}\to\mathrm{np}} = \frac{1}{2}(\mathrm{M}_1-\mathrm{M}_0)\left[\tau_{1+}\tau_{2-}+\tau_{1-}\tau_{2+}\right] \; .$$

Оператор Бартлетта $\widehat{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}(1+\widehat{\tau}_1\widehat{\tau}_2)$ инвертирует смысл обменного оператора:

$$\frac{1}{2}\left(1-\tau_{1,3}\tau_{2,3}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\widehat{\tau}_1\widehat{\tau}_2\right)\times\left[\tau_{1+}\tau_{2-}+\tau_{1-}\tau_{2+}\right] \; .$$

Ошибка Франсуа Легара

Эта ошибка[3] закладывается на уровне определений NN-формализма.

$$\sigma_{\rm tot} \;=\; \sigma_0 \,-\, \frac{1}{2}\,\Delta\sigma_{\rm L}(\vec{\rm e}\vec{\rm P}_{\rm n})(\vec{\rm e}\vec{\rm P}_{\rm p}) \,-\, \frac{1}{2}\,\Delta\sigma_{\rm T}(\vec{\rm e}\times\vec{\rm P}_{\rm n})(\vec{\rm e}\times\vec{\rm P}_{\rm p})\,,$$

$$\Delta\sigma_{\rm L} = \sigma(\leftrightarrows) - \sigma(\rightrightarrows)\,, \quad \Delta\sigma_{\rm T} = \sigma(\uparrow\downarrow) - \sigma(\uparrow\uparrow)\,.$$

$$\begin{aligned} {\rm Im\,a}(0) &= \frac{\rm k}{4\pi}\,\sigma_0\,, \\ {\rm Im\,b}(0) &= {\rm Im\,e}(0) \,=\, -\frac{\rm k}{8\pi}\,\Delta\sigma_{\rm T}\,, \\ {\rm Im\,f}(0) &= -\frac{\rm k}{8\pi}\,\Delta\sigma_{\rm L}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\rm Im\,a^{exch}}(0) &= \frac{\rm k}{4\pi}\,(\sigma_0^{\rm (pp)} - \sigma_0\;)\,, \\ {\rm Im\,b^{exch}}(0) &= {\rm Im\,e^{exch}}(0) \,=\, -\frac{\rm k}{8\pi}\,(\Delta\sigma_{\rm T}^{\rm (pp)} - \Delta\sigma_{\rm T}\;)\,, \\ {\rm Im\,f^{exch}}(0) &= -\frac{\rm k}{8\pi}\,(\Delta\sigma_{\rm L}^{\rm (pp)} - \Delta\sigma_{\rm L}\;)\,. \end{aligned}$$

[3] F. Lehar, Quasi-elastic end elastic charge-exchange differential cross section: critical review, ЭЧАЯ. 2009. V. 40, № 6. P. 1526–1562. http://www1.jinr.ru/Pepan/2009-v40/v-40-6/03_leh.pdf