Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Interpolation Environment of Tensor Mathematics at Corpuscular Stage of Computational Experiment in Hydrodynamics

A.Bogdanov, A.Degtyarev, V.Khramushin, Yu.Shichkina

St.Petersburg State University

Outline

Introduction

Part 1

Direct computational experiment

Part 2

Basic numeric objects and context operations

Part 3

Construction of physical fields and processes in continuous medium

Conclusion

Part 1

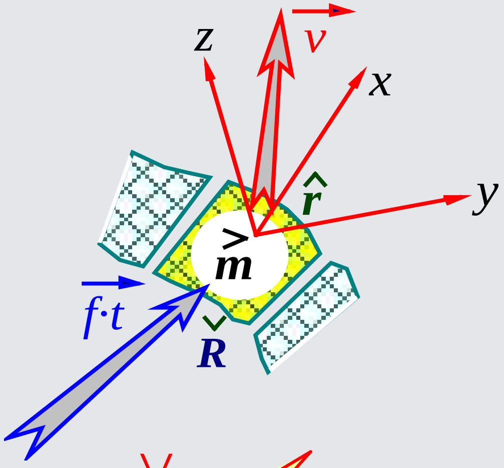
Direct computational experiment

- Numeric objects and operations of mechanics (continuum + corpuscular) ;
- Algorithmic and functional basis of digital modeling;
- Control of the state and adaptation of mathematical models of mechanics.

3D Tensor Mathematics

- I – all numerical objects are determined in dimension form;
- II – all computations are context-dependent;
- III – duality of local and world coordinate systems.

Stages:



> Euler stage (continuum).

calculation of fluid particles kinematics

in original Euler coordinates

(in global frame system)

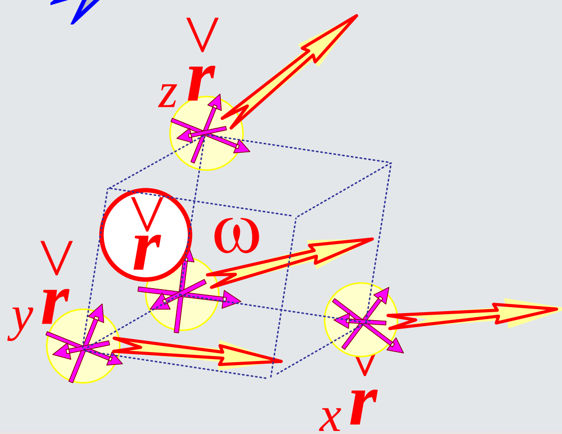
> Lagrange stage (corpuscular).

determination of force interaction

between particles

(in local frame systems

for each particle)



Continuum

(Euler stage – cells in grid notes)

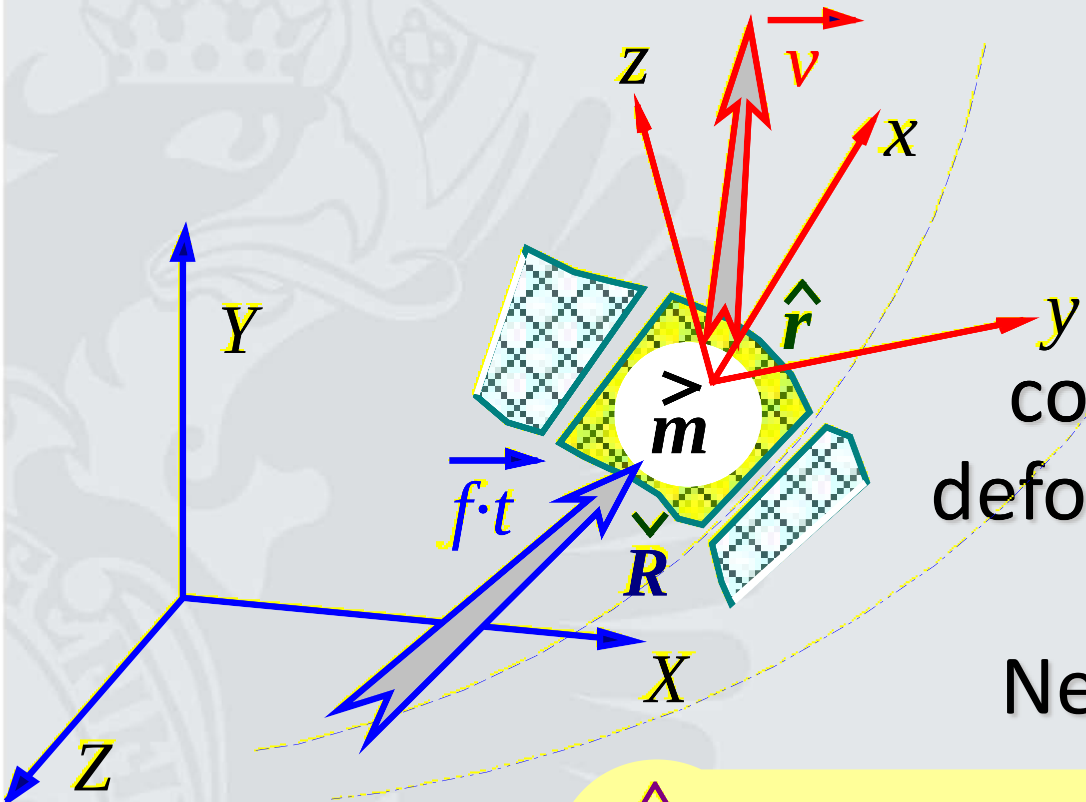
PREHISTORY

$$\overset{<}{\mathbf{m}}\cdot(\vec{F}+\hat{\mathbf{f}}\cdot\overleftarrow{a})\cdot t/2=(\hat{\mathbf{r}}+\hat{\mathbf{v}}\cdot t)\cdot\overleftarrow{\omega}$$

$$^{+}\vec{V}={}^{o}\vec{V}+\overset{<}{\mathbf{m}}\cdot\vec{f}\cdot t$$

$$\vec{v}\cdot\overset{>}{\mathbf{m}}=\vec{f}\cdot t$$

$$\overset{>}{\mathbf{m}}=\overset{\vee}{\rho}\cdot\hat{r}$$



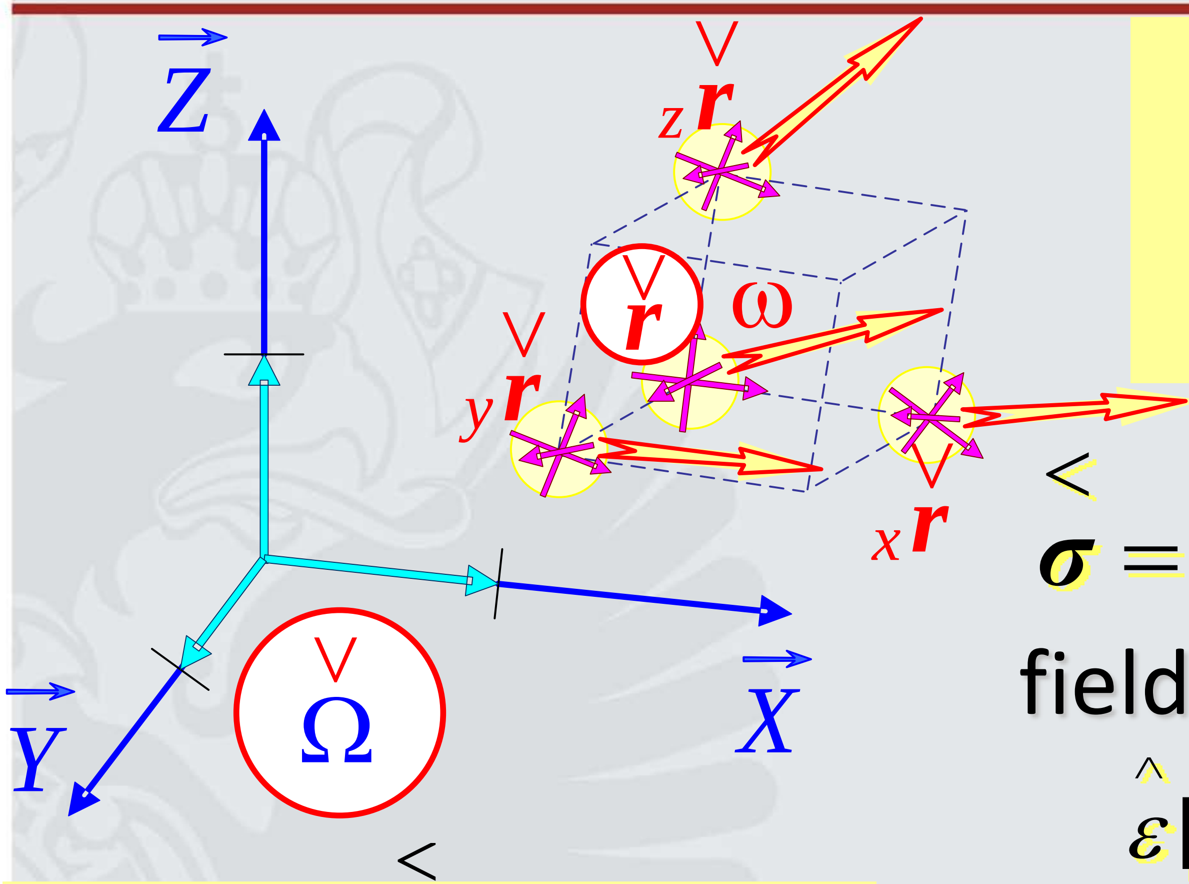
… tensor of mass corrects kinematics and deformation of flows with the inertia tensor for Newton's law of motion

Discrete approximation for digital computer

$^{+}\hat{\mathbf{r}}$ ***- tensor notation***
of finite differences and volumes

Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Corpuscular (Lagrange stage)



rheology and state
of corpuscles in a flow

$$\sigma = (\hat{\varepsilon} \cdot \check{c} + \hat{\upsilon} \cdot \check{\eta}) \times \lambda$$

field deformation:

$\hat{\varepsilon}[m^3]$ $\check{c}$ [N/m^2]

flow transformation:

$\hat{\upsilon}[m^3/s]$ $\check{\eta}$ [N·s/m^2]

Fluid ≈ **σ** [N·m²]
viscosity **η**
+ elasticity **c**

Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Part 2

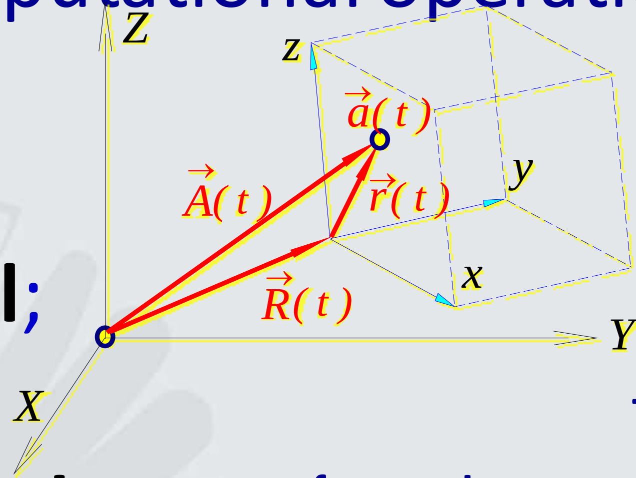
Basic numeric objects and context operations

- Numeric structures and object-oriented procedures;
- Adaptive grid nodes and adjacent centers of numerical corpuscles;
- Virtual reconfiguration of hybrid computing models.

Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Base numerical objects

& related computational operations (methods) in C++



$\vec{A} = \vec{R} + \hat{r}\cdot\overleftarrow{a}$

$\overleftarrow{a} = \vec{a}\cdot\check{r} = (\vec{A}-\vec{R})\cdot\check{r}$

Scalars:

indexes: **int**;

numbers: **real**;   typedef **double** real;

Vectors: typedef **double** Real;

points: **point** struct{ Real x,y,z; };

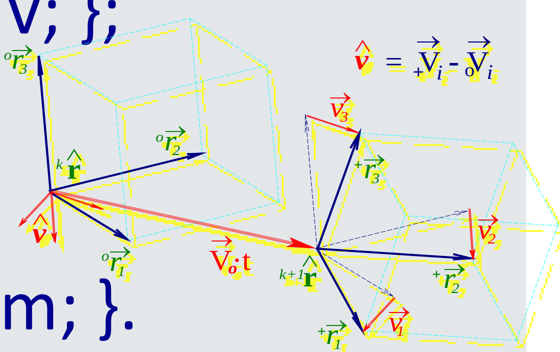
points: **vector** struct{ real x,y,z; };

vectors: **edge** struct{ point A, vector v; };

Tensors: $^{+}\vec{V} = \vec{V} + (\hat{r} + \hat{v}\cdot t)\cdot\overleftarrow{v}$

matrixes: **tensor** struct{ vector x,y,z; };

bazises: **basis** struct{ point A; tensor m; }.



Base\Space+Screen / formulae

Tensor basis – construction of objects and functions for 3’D tensor mathematics in the implementation to continuous and corpuscular flow simulation

Vector = Point–Point ←#→ Point = Vector+Point …

Edge = Vector + Point – *(edge or associated vector)*

Base = Tensor + Point – *(different-scale entities)*

Space= Base ~*Function*(Point) – *(space mechanics)*

Space << Point; Space >> Point – *(one of 4 variants)*

Screen – Window/Place – *(contextual visualization)*

"Functional environment" - Space Mathematics

Current state of cell = internal tensor

$${}^{+}\overset{>}{M} = (\hat{r} + \hat{v}\cdot t)\cdot\check{\rho}$$

kinematic computational stages form defects of tensor of fluid particle mass, which shows its rheology.

$$\check{f} = \check{\varepsilon}\cdot\overset{>}{v}_0\cdot t + \check{\mu}\cdot\overset{>}{v}_H + \check{c}\cdot\overset{>}{v}_\Gamma\cdot t = \check{f}_0 + \check{f}_H + \check{f}_\Gamma$$

$\overset{>}{v}_0 :\ I \neq 0$ – compressibility;

$\overset{>}{v}_H :\ II \neq 0$ – rotation;

$\overset{>}{v}_\Gamma :\ III \neq 0$ – deformation.

1. Cavitational density gap:

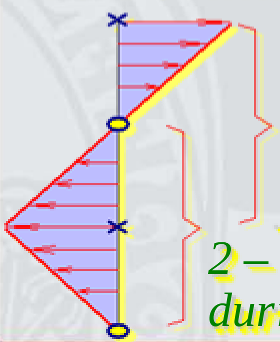
$\check{\rho}_H$ – do not considered;

$\check{\rho}_0 = det(\check{\rho}_0) < 0$ – pure vacuum (effervescence);

$\check{\rho}^* = det(\check{\rho}_0 + \check{\rho}_\Gamma) = 0$ density gap

with the normal along principal axis of elasticity tensor: $\check{\rho}_\Gamma$

2. Formation of free jet or turbulent vortex:



Conjugate cells of two calculation stages:

1 – vortex cell of *first calculation stage*

2 – deformation of adjacent cell during vortex formation.

Degeneration of the determinant of the internal field in the conjugate particles $\rho_0 > 0$.

After the transfer of the vortex in the tensor "the masses", the new fluid particle becomes free (turbulent) vortex.

Санкт-Петербургский государственный университет
www.spbu.ru

Part 3

Construction of physical fields and processes in continuous medium

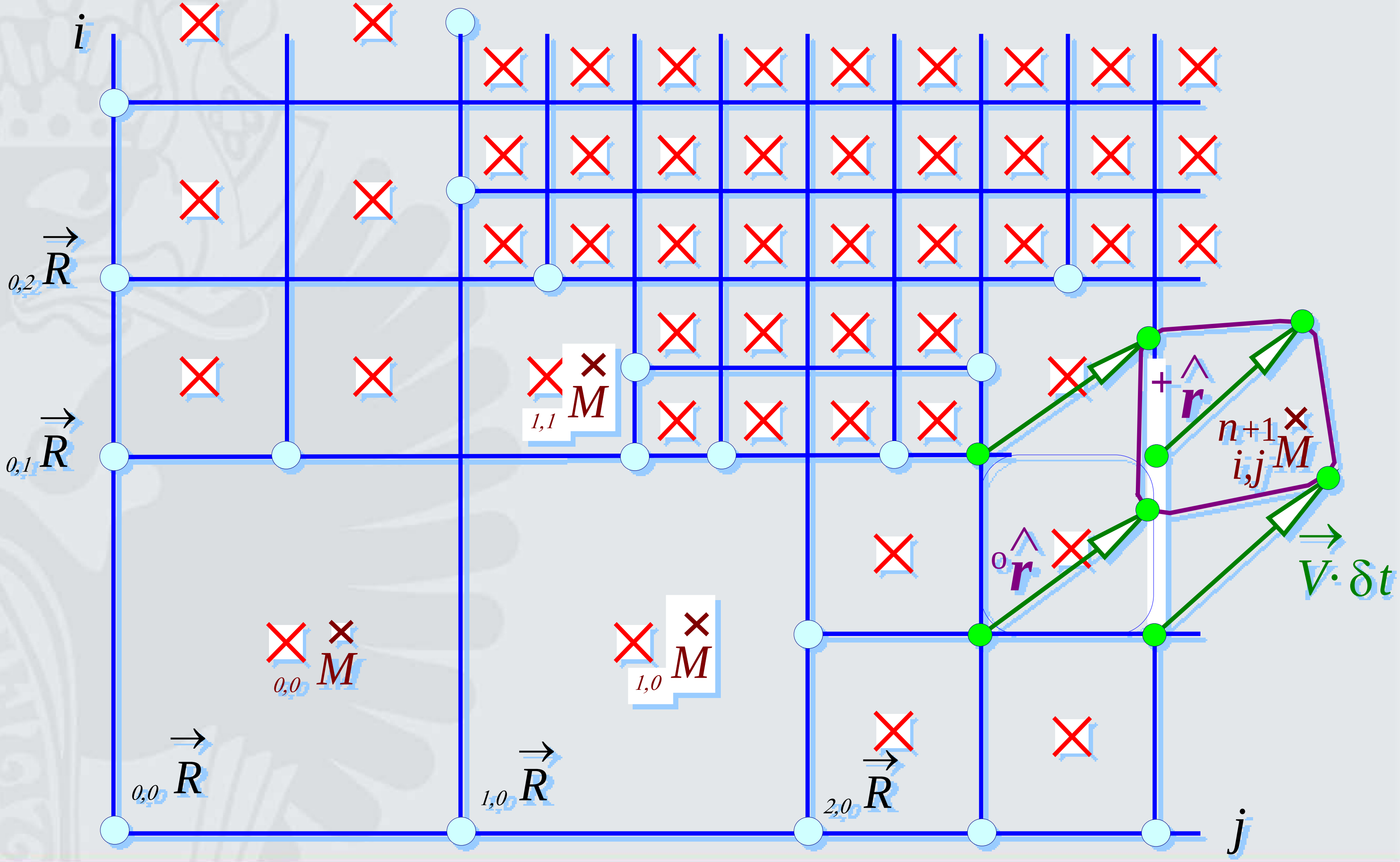
- Arrays of grid nodes with displaceable centers of volumes and masses;
- Tensor objects with prehistory of motion and deformation;
- Interpolation of large particles into the original grid nodes.

++1. Base~Space~Screen / OpenGL

- **Volume** - a software package for interactive visualization of graphical objects **(Basis)** in three-dimensional curvilinear function space **(Space)** with submission of images in perspective projection screen scenes **(Screen)** in the contextual environment of programming **OpenGL.**
- Multi-window interface **(Window)** with overlay of graphics and text fragments / pads **(Place)** with a support for keyboard, mouse and timer.

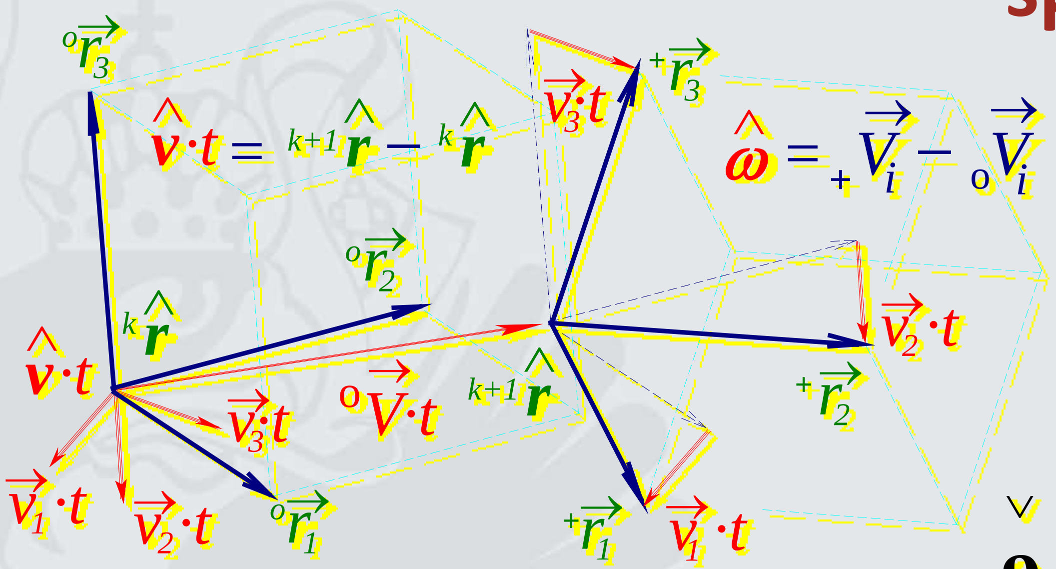
Санкт-Петербургский государственный университет
www.spbu.ru

3D Unregulated mesh area with eightfold crushing



```
//     Сеточная область Space определяет нерегуляризованное интерполяционное
//       пространство динамически перестраиваемых узлов, содержащих скалярные,
//       векторные и/или тензорные физические объекты/величины, определяющие
//       густоту сеточного покрытия в зависимости от локальной кривизны
//       моделируемых параметров состояния сплошных/неразрывных сред и, по
//       возможности, с режимом прогноза трансформации гидродинамических потоков
//
struct Node       // узел с координатами X,Y,Z, смежными и внутренними связями
     : Point      // координаты центра масс для простого физического объекта...
{ Node *x,*y,*z;  // ссылки на смежные узлы настоящего/внешнего уровня рекурсии
       *in;       // и восемь вложенных узловых ячеек, если таковые необходимы
};                //
//    По ходу вперед выполняется перенастройка сетки
//      с уточнением граничных условий и заданной густоты расчетных ячеек
//    На обратном пути выполняется ускоренный поиск для интерполяции или
//      приближенной аппроксимации моделируемых физических явлений и процессов
//
struct Space: Base        // функциональное связывание текущих координат узлов
{ const int nX,nY,nZ;     // размерность исходных узлов расчетной сетки в целом
  Node ***Ns;             //   трехмерный массив узлов базового уровня рекурсии
                          //   X6(вправо),Y4(вверх),Z5(ближе) + базис и масштаб
   Space( int x=24,int y=16,int z=20, Point=(Point){0,0,0}, Real=1.0 );
  ~Space();               //  выполняется освобождение всех рекурсивных уровней
  _Space operator=( _Point R ){ Point::operator=( R ); return *this; } // место
};
//    Корпускулярное покрытие моделируемой сплошной среды осуществляется
//    независимыми числовыми объектами, участвующими в построениях законов
//       движения и определяющих сложные и производные физические процессы
//         с возможностью параллельного исполнения весьма тяжелых расчетов
struct Volume
{  int nV;           // общее количество независимо сосуществующих корпускул
   Node **out;       // список адресов опорных базисов в пространстве Space
   Matrix *part;     // список частиц в последовательной Space-индексации
};
```

Explicit linear and inverse geometric relationships between grid nodes and spatial particles - cells



Interpolation field at the stage II (displaced centers of mass of free corpuscles)

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\rho}} \mathrel{+}= \overset{\vee}{\mathbf{v}} \cdot \overset{<}{\mathbf{f}} \cdot t$$

$$\overset{<}{f} = \hat{v} \cdot \overset{\vee}{\rho} / t$$ evaluation based on deformation prehistory;

$$\hat{f} = (\overset{\wedge}{\varepsilon} \cdot \overset{>}{\kappa} + \overset{\wedge}{\upsilon} \cdot \overset{>}{\eta}) / \lambda$$ interpolation in accordance with rehology;

λ [m] – estimated distance between corpuscles;

$\overset{>}{\kappa} = \overset{\vee}{\kappa} \cdot \hat{r}$ elasticity and $\overset{>}{\eta} = \overset{\vee}{\eta} \cdot \hat{r}$ viscosity of fluid

Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Conclusion (1)

Physics

- The continual (first) stage in tensor form models the main part of the reconstruction of continuous flows over a small (calculated) time interval;
- At the corpuscular (second) stage, active particles (cells) rearrange fluxes, velocity fields, and scalar functions in accordance with the given rheological properties of a continuous medium.

Санкт-Петербургский государственный университет
www.spbu.ru

Conclusion (2)

Algorithmics

- In result we have direct numerical modeling with end-to-end parallelization;
- In proposed approach algorithm functionally splits computational process on many independent reentrant functions.

Thank you for attention

Research is supported by Russian Fund for Basic Research grants N 16-07-00886, 16-07-01113

Saint-Petersburg State University
spbu.ru