Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики – процессов управления

кафедра компьютерного моделирования и многопроцессорных систем

Алгоритмическое построение явных численных схем и визуализация объектов и процессов в вычислительном эксперименте в гидромеханике

(тензорная арифметика, математика, исчисление флюксий и метод крупных частиц)

Тема: ***«Вычислительная гидромеханика»***, ресурс v886: Методология вычислительного эксперимента в гидромеханике на базе современных компьютерных технологий *(трехмерная тензорная математика)*

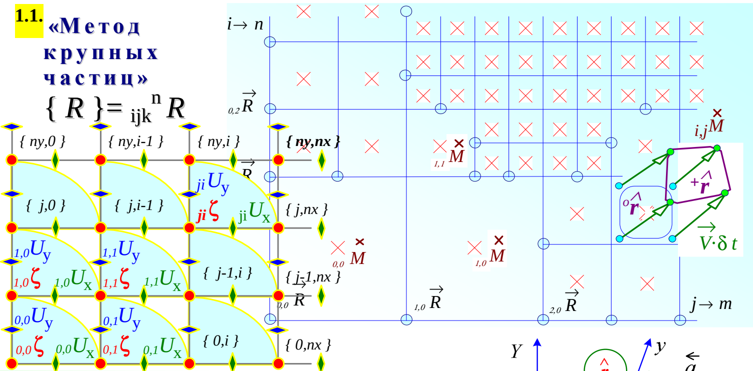
1.1. сеточные ячейки и частицы–корпускулы **1.2.** тензорная арифметика и математика (язык операций)

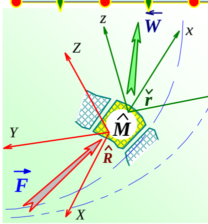
2.1. законы механики + критерии и режимы **2.2.** интерактивные алгоритмы + графическая визуализация

Александр Борисович Дегтярев
Татьяна Руслановна Ежакова
Василий Николаевич Храмушин

Исследования выполняются при поддержке грантами РФФИ (№ 13-07-00747) и СПбГУ (№ 9.38.674.2013, № 0.37.155.2014), с использованием вычислительной техники Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ».

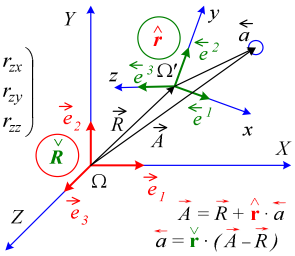
1.1. **«Метод крупных частиц»** $\{ R \} = {}_{ijk}{}^{n}R$





$$\hat{\mathbf{r}} = (\vec{r}_x\ \vec{r}_y\ \vec{r}_z) = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} \\ r_{xz} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\check{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,x} \\ \vec{r}^{\,y} \\ \vec{r}^{\,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{xx} & r^{xy} & r^{xz} \\ r^{yx} & r^{yy} & r^{yz} \\ r^{zx} & r^{zy} & r^{zz} \end{pmatrix}$$



Разметка базисных ортов, векторное и матричное представление локального базиса крупной частицы жидкости. Символом Ω отмечен центр глобальной системы отсчета, символом Ω' – привязка локального базиса. *F – массовые, f – поверхностные силы.*

$${}^{+}\vec{A} = \vec{R} + \vec{V}\cdot t + \vec{F}\cdot m\cdot t^2/2 + (\hat{r} + \hat{v}\cdot t + \hat{f}\cdot m\cdot t^2/2)\cdot \overleftarrow{a}$$, *где* – $\vec{F}$ [Н]; $\hat{f}$ [Н·м²].

2.1.

В *тензоре конвективных скоростей фиксируются вихревые и дипольные эффекты,* которые изменяют величину и направление реакции на действие внешние сил, что расширяет возможности математического представления основных законов механики (*для взаимозависимых частиц и неразрывных сред*).

Векторный закон Ньютона для деформируемой частицы: $\vec{F} = \overset{>}{M}\cdot\vec{W} = \hat{r}\cdot\check{\rho}\cdot\vec{W}$; [Н]

Вязкие напряжения Ньютоновой жидкости: $\overset{>}{f}_{н} = \hat{v}_{н}\cdot\check{\eta}/\Lambda = \overset{>}{v}_{н}\cdot\overset{>}{\eta}/\Lambda$; [Н/м]

Упругие напряжения Гука: $\overset{>}{f}_{Г} = (\hat{r} + \hat{v}_{Г}\cdot t)\cdot\check{c}/\Lambda = (1 + \overset{>}{v}_{Г}\cdot t)\cdot\overset{>}{c}/\Lambda$, [Н/м]

где тензор локальных скоростей $\hat{v} = {}_{+}\vec{V}_i - {}_{o}\vec{V}_i$ – сконструирован чисто алгоритмически;

$\overset{>}{M} = M_i^{\,k} = \hat{r}\cdot\check{\rho} = r_{ij}\cdot\rho^{jk}$ [кг] – тензор массы–инерции в проекции абсолютного базиса;

$\hat{r}$ [м³] – геометрический тензор формы; $\check{\rho}$ [кг/м³] – «условная плотность», как история девиаций тензорного числового объекта – «живых сил» крупных частиц жидкости;

$\overset{>}{\eta}, \overset{>}{c}$ – тензоры динамической вязкости [кг/с] и жесткости [кг] реальной жидкости;

Λ –дистанция ближнего взаимодействия смежных частиц.

Тензор скоростей из абсолютного спроектирован в локальный базис: $\hat{v}\cdot\check{r} = \overset{>}{v}$ [1/с] для получения смешанного субстанционального тензора конвективных скоростей, обезразмеренного по пространственному аргументу для сопоставления с инвариантами и физическими константами реологического состояния жидкости.

При малых смещениях во времени становятся справедливыми теоремы Гельмгольца:

Диагональный тензор шарового сжатия $\overset{>}{v}_0$, след остатка $\overset{>}{v}^{*}$=0: $\overset{>}{v} = \overset{>}{v}_0 + \overset{>}{v}^{*}$ (tr $\overset{>}{v}^{*}$=0),

$\check{f}_0 = \check{\varepsilon}\cdot\overset{>}{v}_0\cdot t$, где: $\check{f}_0$ – давление, $\check{\varepsilon}$ – коэффициент динамического сжатия.

$\check{f}_{H} = \check{\mu}\cdot\overset{>}{v}_{H} = \check{\mu}\cdot(\overset{>}{v}^{*} - \overset{>}{v}^{*T})/2$ – вращение: $\overset{>}{v}^{*}$ – тензор вязких напряжений;

$\check{f}_{Г} = \check{c}\cdot\overset{>}{v}_{Г}\cdot t = \check{c}\cdot(\overset{>}{v}^{*} + \overset{>}{v}^{*T})\cdot t/2$ – симметричный тензор упругой деформации

Полный тензор внутренних напряжений: $\check{f} = (\check{\varepsilon}\cdot\overset{>}{v}_0 + \check{c}\cdot\overset{>}{v}_{Г})\cdot t/2 + \check{\mu}\cdot\overset{>}{v}_{H}$.

Динамические коэффициенты: $\check{\mu}, \check{c}, \check{\varepsilon}$ не содержат скалярной плотности ρ.

Под действием $\hat{f}$, частица получает внутреннее (замкнутое) движение: ${}^{\Delta}\check{v} = \hat{f}\cdot t/\check{\rho}$.

Приращение ${}^{\Delta}\check{v}$ компенсирует конвективные скорости: $\check{v}\cdot\hat{r} + \hat{r}\cdot{}^{\Delta}\check{v} = 0$

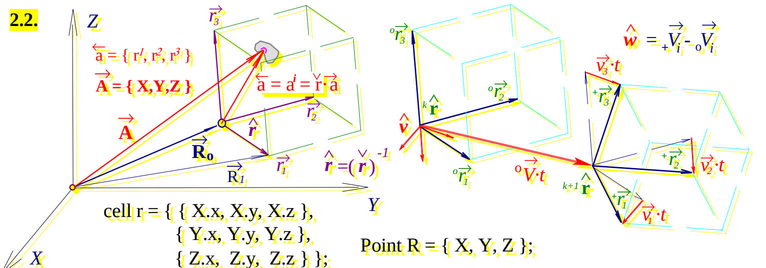
в установившемся потоке – условие неразрывности за расчетное время *t*.

1.2.

Краткая таблица основных обозначений:

T – абсолютный отсчет времени; $t = \Delta T$ – расчетный интервал времени		с
p – точечное *(скалярное)* давление внутри частицы жидкости		Н/м²; кг/(с²·м)
${}^{T}_{\Omega}\vec{R}$ – координаты узла сеточной области Ω на момент времени T		м
${}^{+}\vec{R}$ – условные координаты смежной точки в следующий момент времени		м
$\vec{v}$ – вектор скорости относительно подвижного центра частицы жидкости		м/с
$\vec{w}$ – вектор приращения скорости (*ускорения*) для частицы жидкости		м/с²
$\hat{r} = \vec{r}_i = r_{ij}$ – геометрический тензор формы крупной частицы жидкости		м³
$\hat{v} = {}_{\Delta}\vec{r}_i$ – тензор локальных скоростей *(приращений скорости)*		м³/с
$\overset{>}{v} = \hat{v}\cdot\check{r} = \hat{v}/\hat{r}$ – тензор конвективных скоростей		1/с
$\hat{\omega} = {}_{\Delta}\vec{V}_i$ – тензор течений внутри крупной частицы жидкости		м³/с
$\check{\rho} = \rho^{\,j} = \rho^{kj}$ – тензор плотности – внутреннего состояния жидкой частицы		кг/м³
$\overset{>}{m} = m^{i}{}_{j} = \hat{r}\cdot\check{\rho}$ – тензорная масса жидкой частицы, смешанный тензор внутреннего состояния в абсолютной системе отсчета		кг
$\vec{F}$ – результирующий вектор массовых (объемных) сил		Н; кг·м/с²
$\hat{f}$ – тензор напряжений на границах жидкой частицы		Н·м²; кг·м³/с²
$\overset{>}{f}_{н} = \check{\eta}\cdot\overset{>}{v}_{н}/\Lambda$ – условный тензор вязких напряжений	$\check{\eta}$:	кг/м/с, Н·с/м²
$\overset{>}{f}_{Г} = \check{c}\cdot\overset{>}{v}_{Г}/\Lambda$ – условный тензор упругих напряжений	$\check{c}$:	кг/м/с², Н·м²

2.2.



cell r = { { X.x, X.y, X.z }, { Y.x, Y.y, Y.z }, { Z.x, Z.y, Z.z } }; Point R = { X, Y, Z };

Алгоритмы континуально-корпускулярной тензорной математики

$\{ \vec{R} \}$ [м] – узлы; $\{ \vec{V} \}$ [м/с] – скорость; $\{ \overset{>}{M} \}$ [кг] – внутреннее состояние.

$\hat{r}$ [м³] – форма частицы; $\hat{v}$ [м³/с] – локальные скорости; $\hat{f}$ [Н·м²] – напряжения.

1 – КИНЕМАТИКА – в Эйлеровой сетке с перестроением тензоров внутренних потоков:

узлы: { ${}^{+}\vec{R} = \vec{R} + \vec{V}\cdot t + \vec{F}\cdot\overset{<}{M}\cdot t^2/2$ }; скорости: { $\hat{v}$ } = { ${}_{+}\vec{V}i - {}_{o}\vec{V}i$ }; внутреннее

состояние: { ${}^{+}\overset{>}{M}$ } = { $\hat{r}\cdot{}^{+}\check{\rho}$ } = { $(\hat{r} + \hat{v}\cdot t)\cdot\check{\rho}$ }; { ${}^{+}\check{\rho}$ } = { $\check{\rho}\cdot(1 + \overset{>}{v}\cdot t)$ }.

2 – ДИНАМИКА – корпускулярная модель взаимодействия смежных частиц жидкости:

${}^{+}\overset{>}{M}\cdot\vec{V} = \overset{>}{M}\cdot(\vec{V} + {}^{\Delta}\vec{V})$, ${}^{\Delta}\vec{V} = ({}^{+}\overset{>}{M} - \overset{>}{M})\cdot\overset{<}{M}\cdot\vec{V} = \overset{>}{v}\cdot\vec{V}\cdot t$, получается векторное уравнение Ньютона в форме Эйлера на неподвижных узлах расчетной области:

$\vec{F} = \overset{>}{M}\cdot\overset{>}{v}\cdot\vec{V} = \hat{r}\cdot\check{\rho}\cdot\overset{>}{v}\cdot\vec{V}$ и напряжение: $\hat{f} = \hat{r}\cdot\check{\rho}\cdot\hat{v}\cdot\overset{>}{v} = \overset{>}{M}\cdot\overset{>}{v}\cdot\hat{v}$ по Навье-Стоксу.

3 – СТАТИКА – интерполяционные согласования условий сохранения, контроль состояния численных схем, перестроение внешних воздействий и граничных условий.

${}^{\Delta}\check{v}$ проецируется в абсолютный базис: ${}^{\Delta}\overset{<}{v} = {}^{\Delta}\check{v}\cdot\hat{r}$ [с] в смещениях: ${}^{+}\hat{r} = {}^{+}_{+}\vec{R}_i - {}^{o}_{o}\vec{R}_i$ [м³],

и перестраивается: $\hat{v} = {}_{+}\vec{V}i - {}_{o}\vec{V}i$ к новому полю скорости: ${}^{+}\vec{V} = \vec{V} + \sum_i \hat{r}\cdot{}^{\Delta}\overleftarrow{v}_i$.

Программное и пространственное представление элементарной частицы жидкости.

1. Скалярные числовые объекты: время и инварианты состояния частиц жидкости:
```
Real T; // отсчет времени от начала вычислительного эксперимента,
real t; // шаг во времени для моделирования нестационарных процессов.
```
2. Векторные величины определяют точку, как свободный вектор в пространстве:
```
typedef struct { Real X,Y,Z; } Point; // в абсолютной системе отсчета
typedef struct { real x,y,z; } point; // внутри частицы жидкости
```
3. Крупная частица жидкости определяется с помощью числовой матрицы – тензора:
```
typedef struct { point x,y,z; } tensor; // локальный базис
typedef struct { Point R,X,Y,Z; } cell; // и его видимость извне
```
4. Производные числовые структуры тензорной математики:
```
typedef struct { Point A; real x,y,z; } Vector; // с привязкой
typedef struct { Point A; point x,y,z; } Basis; // местоположения.
```