

Longitudinal tension and mechanical stability of a pressurized straw tube

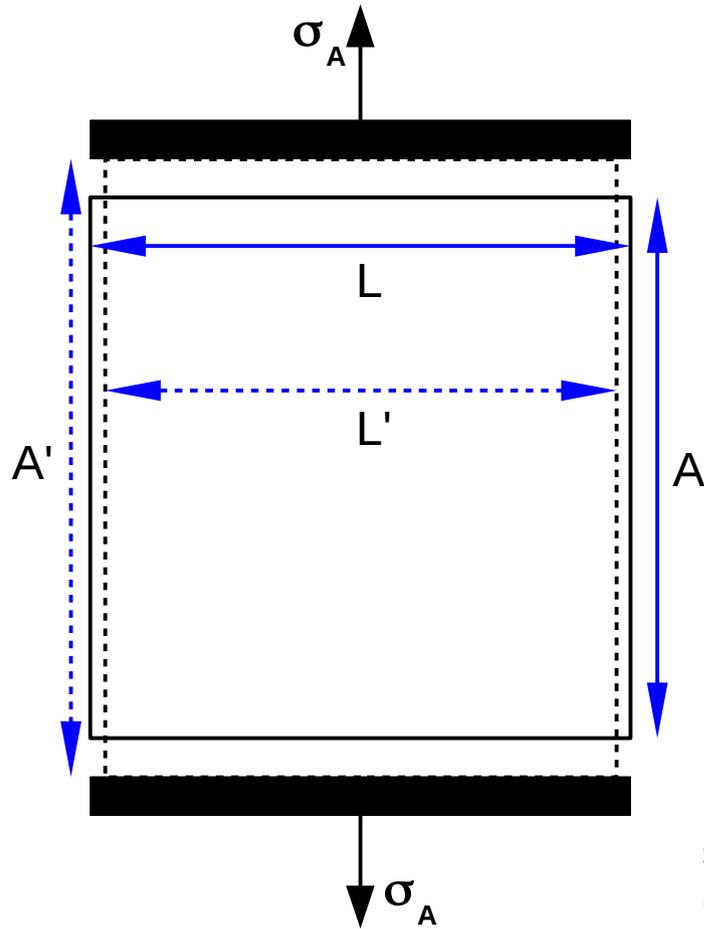
L. Glonti, T. Enik, V. Kekelidze, A. Kolesnikov, D. Madigozhin,
N. Molokanova, S. Movchan, Yu. Potrebenikov, S. Shkarovskiyy.

Продольное натяжение и механическая устойчивость тонкостенной дрейфовой трубки под давлением

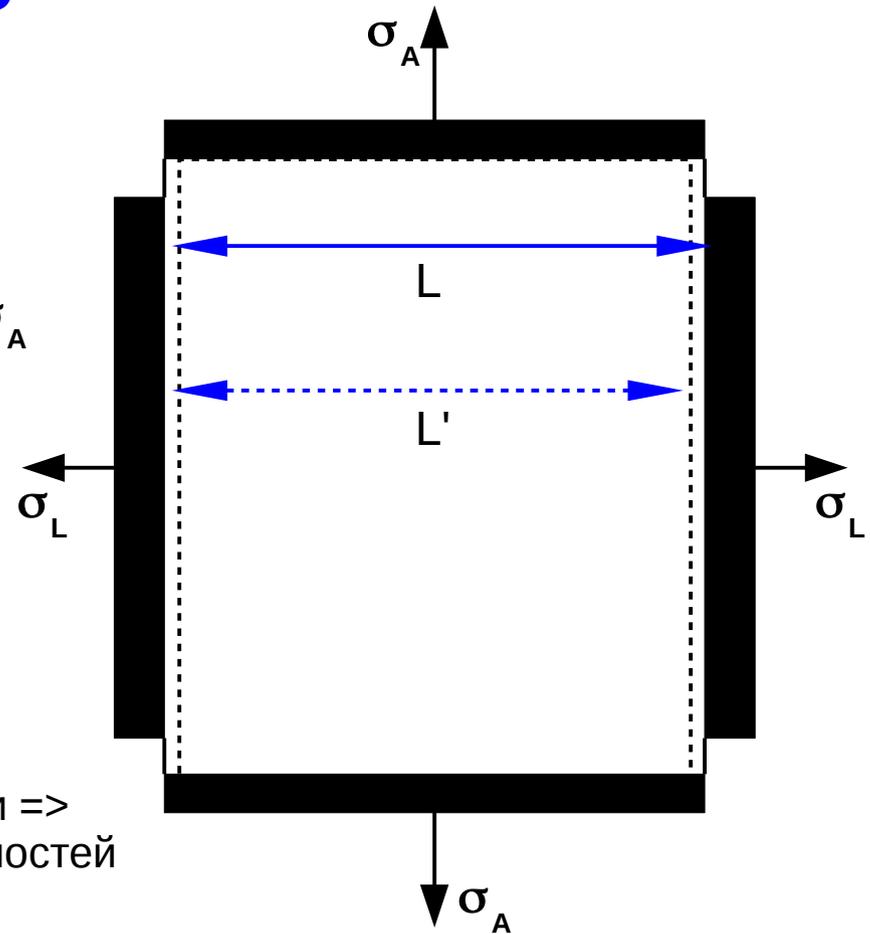
Л.Глонти, Т. Еник, В. Кекелидзе, А. Колесников, Д. Мадигожин,
Н. Молоканова, С. Мовчан, Ю. Потребеников, С. Шкаровский.

При разработке детекторов заряженных частиц на основе тонкостенных дрейфовых трубок (строу), работающих в вакууме, необходима техника оценки их механических свойств. В настоящей работе представлен экспериментальный метод изучения свойств натянутых длинных строу-трубок, находящихся под внутренним давлением. Результаты выполненных измерений в основном согласуются с расчётами в низшем приближении с учётом известных значений и неопределённостей параметров материала трубок. Показано, что эффективное натяжение трубки, равное разности между полным продольным натяжением её стенки и силой давления в расчёте на её поперечное сечение, определяет поперечную устойчивость трубки и низшую частоту её колебаний. Это даёт основание для возможного нового метода контроля механических свойств действующей дрейфовой трубки.

Введение



Растягивание
прямоугольного
куска плёнки
приложением
напряжённости σ_A



Малые деформации =>
эффекты напряжённости
складываются.

При **свободных** левой и правой сторонах
длина L **сокращается**:

$$(L' - L)/L = -\mu (A' - A)/A = -\mu \sigma_A / E$$

E – модуль Юнга,

μ – коэффициент Пуассона.

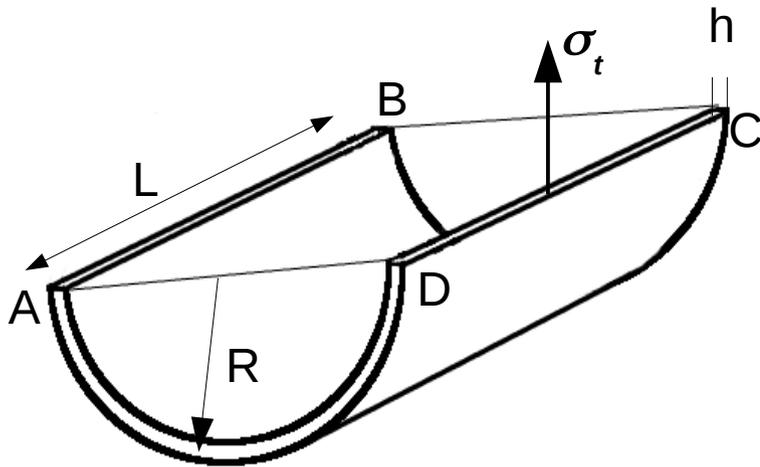
При **фиксированных** левой и правой сторонах к
ним автоматически приложена **растягивающая**
напряжённость, **возвращающая** длину L на место:

$$\sigma_L = -E (L' - L)/L = \mu \sigma_A$$

Таким образом, при **растягивании** двух сторон плёнки **с закреплёнными** двумя
другими сторонами (перпендикулярными первой паре сторон), на этих других
сторонах возникает **тоже растягивающая** напряжённость величиною:

$$\sigma_L = \mu \sigma_A$$

Введение



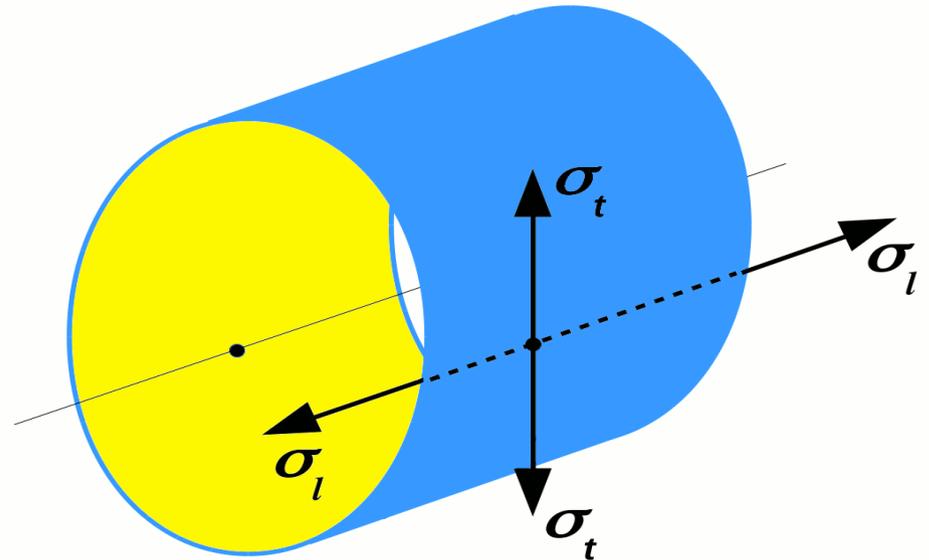
Для участка строу длины L заменим верхнюю половину цилиндра на воображаемую жёсткую прямоугольную стенку ABCD, которая держит внутреннее давление.

На эту стенку давит сила $F_t = 2RLP$, где P - избыток давления внутри трубки.

Она равна силе, приложенной к материалу стенок, имеющих толщину h :

$F_t = 2hL\sigma_t$, где σ_t - поперечная напряжённость материала стенки. Таким образом (в учебниках):

$$\sigma_t = PR/h$$



Напряжённости: продольная σ_l (осевая, axis) и поперечная σ_t (тангенциальная, окружная, hoop, circumferential).

Ещё есть радиальная напряжённость, которая сжимает материал по радиусу (по толщине стенки), но для малой h нам неинтересны радиальные зависимости, так что радиальную координату не используем.

Введение

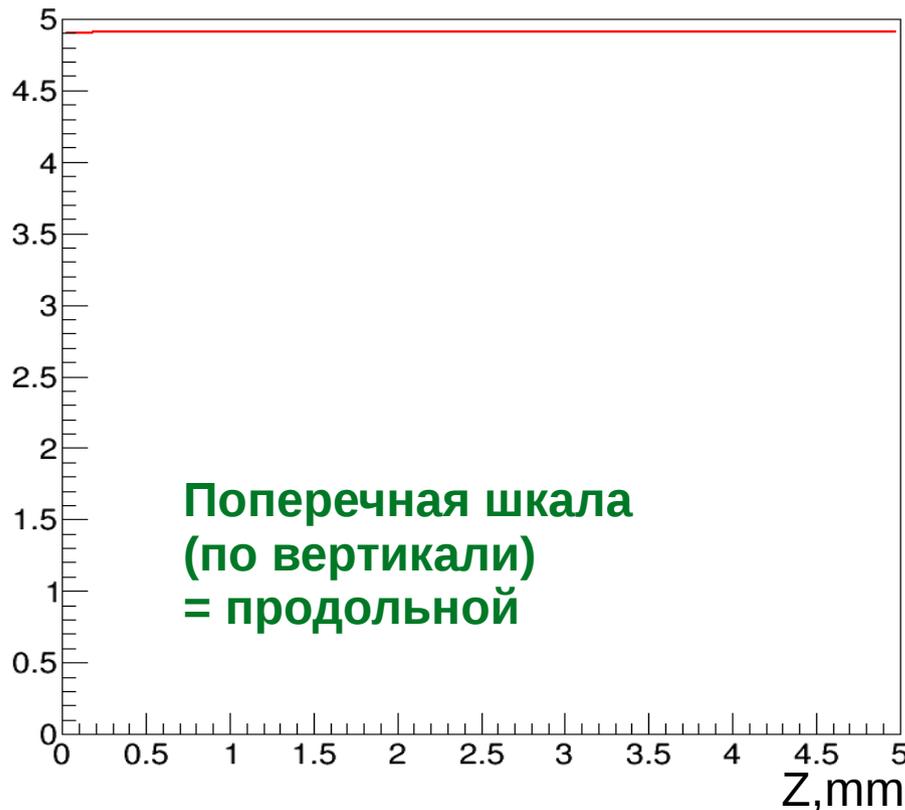
Переходная зона (незначительная)

Решение дифференциального уравнения:

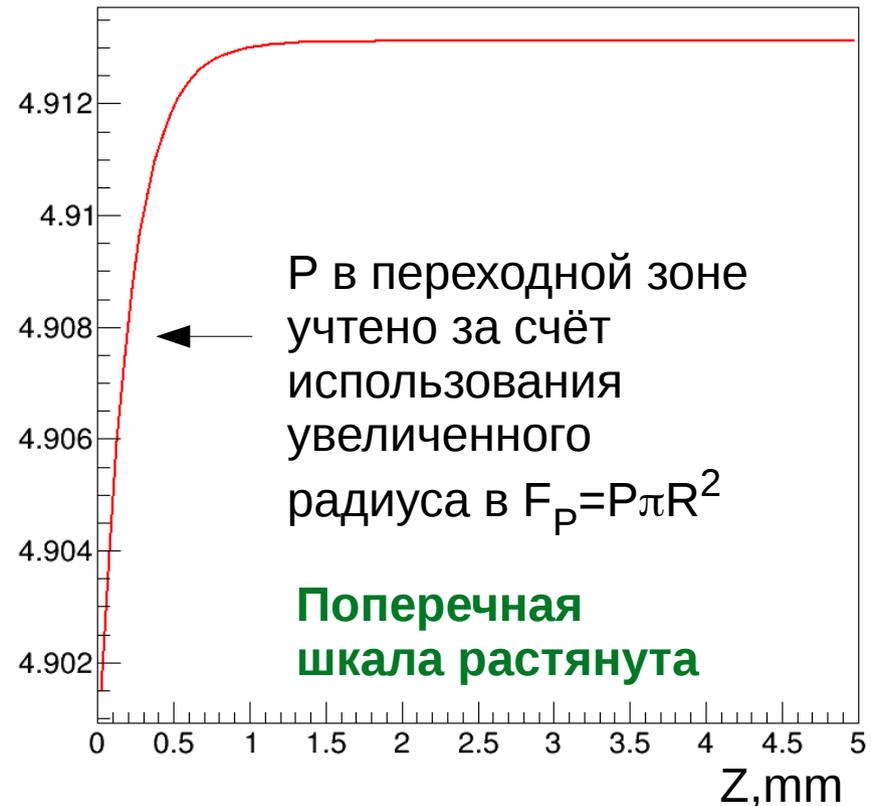
$$R = R_0 + PR_0^2 / (Eh - PR_0) \times (1 - \exp[-Z \sqrt{2\pi(Eh/R_0 - P)/T}])$$

Straw NA62 : T=1Kgf, P = 1 atm

Radius (mm)



Radius (mm)



Введение

$$\text{Всегда: } \sigma_t = PR/h$$

Только для трубки с заткнутыми и свободными концами:



Сила осевого (продольного) натяжения $F_l = P \pi R^2$, поперечная площадь стенки равна $2\pi R h$, так что осевая (продольная) напряжённость получается:

$$\sigma_l = F_l / (2\pi R h) = PR / (2h) = \frac{1}{2} \sigma_t$$

Продольная напряжённость из-за $F_l = P \pi R^2$ приводит к относительному удлинению трубки из-за давления на концы: $\Delta L_1/L = PR/(2hE)$, где E - модуль Юнга (закон Гука).

Поперечная напряжённость σ_t приводит к поперечной относительной деформации ε_t для периметра и к такому же относительному изменению радиуса: $\varepsilon_t = \Delta R/R = \sigma_t / E = PR/(Eh)$,

Эффект Пуассона: поперечная относительная деформация вызывает продольную деформация противоположного знака (в норме), из-за чего длина трубки сокращается:

$$\Delta L_2/L = -\mu \Delta R/R = -\mu PR/(Eh), \text{ где } \mu - \text{коэффициент Пуассона.}$$

Сложив вклады ΔL_1 и ΔL_2 , получим:

$$\Delta L/L = PR/(2hE) - \mu PR/(Eh) = (1-2\mu)PR/(2hE)$$

При выводе было использовано выражение для силы давления, действующей на концы изнутри. Для случая фиксированных (вклеенных) концов трубки это выражение неверно.

Трубка с зафиксированными концами, как в NA62 (каналы подачи газа снимают давление с торцов)

$$\text{Всегда: } \sigma_t = PR/h$$



От давления P изнутри поперечная напряжённость σ_t приводит к относительному **увеличению** радиуса $\varepsilon_t = \Delta R/R = \sigma_t / E = PR/(Eh)$.

Эффект Пуассона: если бы на концы трубки не действовали никакие силы, трубка стала бы **короче** :

$$\Delta L/L = -\mu \Delta R/R = -\mu PR/(Eh), \text{ где } \mu \text{ – коэффициент Пуассона.}$$

Но фиксация концов трубки означает, что к ним автоматически прикладывается реакция опоры ΔT , которая удлиняет трубку на эту же самую ΔL . Площадь поперечного сечения стенки трубки равна $2\pi Rh$, следовательно, возникает **растягивающая** напряжённость:

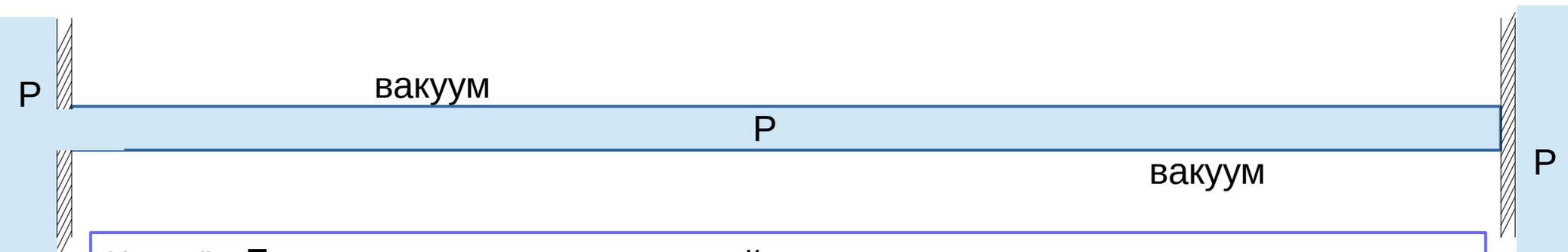
$$\sigma_l = \Delta T/(2\pi Rh) = E \Delta L/L = \mu PR/h = \mu \sigma_t$$

Так что сила, растягивающая трубку с фиксированными концами вдоль оси, **увеличивается** на величину $\Delta T = \mu P 2\pi R^2$ при подаче давления .

Если трубка имела предварительное натяжение T_0 , (и напряжённость σ_0), получим формулу **продольного натяжения** T стенок строу:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \sigma_0 + \mu PR/h = \sigma_0 + \mu \sigma_t \\ T &= T_0 + \mu P 2\pi R^2 \end{aligned}$$

Практический вопрос: как сосчитать нагрузку на раму ?



Назовём F_{atm} силу внешнего давления, действующую на **весь** участок поверхности рамы, **включая все области прилегания** трубок изнутри, и будем считать эту силу известной. К этой силе F_{atm} добавляется сила натяжения каждой трубки.

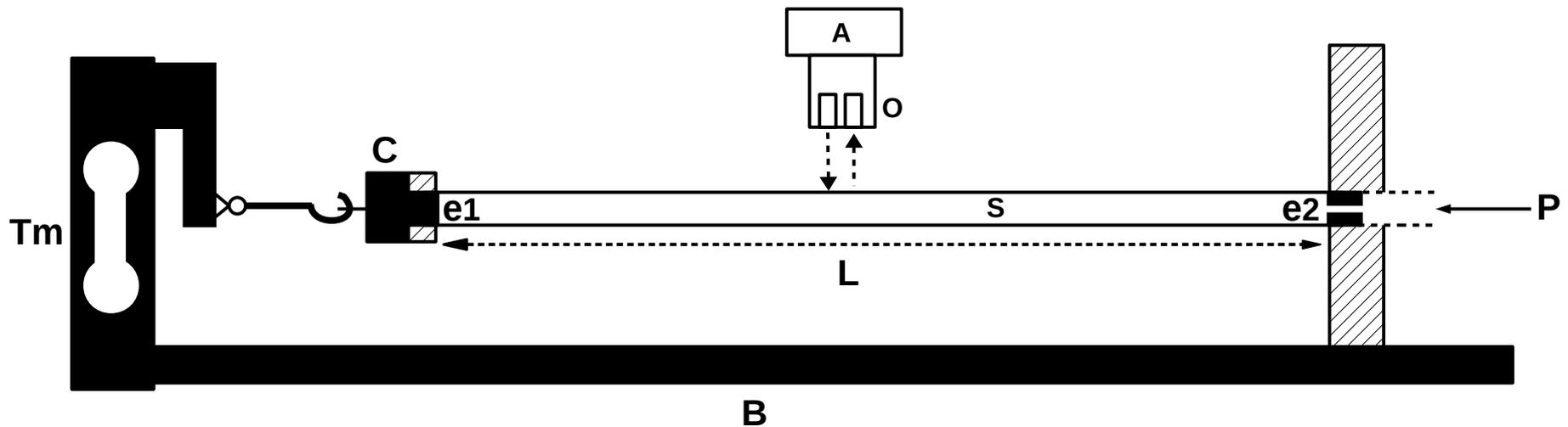
Помимо этого, внешнее давление **скомпенсировано** в области примыкания к ней изнутри трубки с давлением, равным внешнему – ровно на величину, равную $P\pi R^2$. Это равносильно полностью открытому соединению трубки с внешним объёмом, когда из F_{atm} надо просто исключить давление на дырку открытого соединения.

Если трубка имела предварительное натяжение T_0 , имеем формулу продольного натяжения T стенок строу:

$$T = T_0 + \mu P 2\pi R^2$$

Но общая сила T_p , связанная с трубкой (**эффективное натяжение**), которую надо добавить к силе F_{atm} , равна

$$T_p = T - P\pi R^2$$



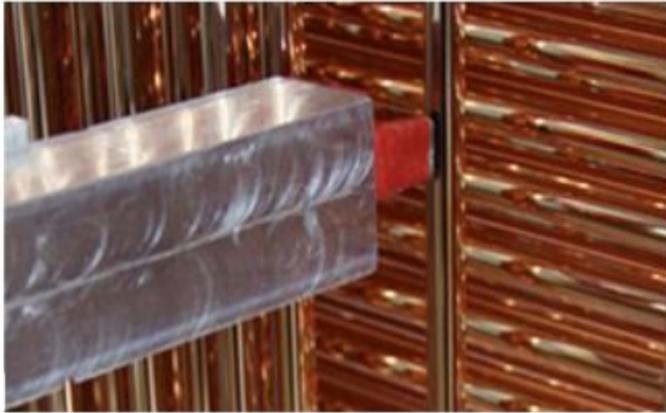
Tm – тензометр, **B** – жёсткая основа, **C** – колпачок с заглушкой **e1**, **s** – строу-трубка, **e2** – заглушка с каналом подачи давления, **o** – оптическая связь, **A** – усилитель.

Разработан и построен специальный стенд для исследования натяжения строу под разным давлением и при разных предварительных натяжениях. К трубке прикладывается достаточно большое предварительное натяжение перед подачей давления **P**.

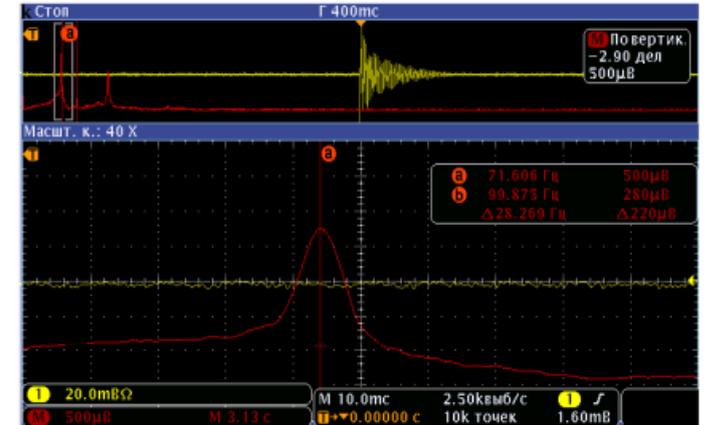
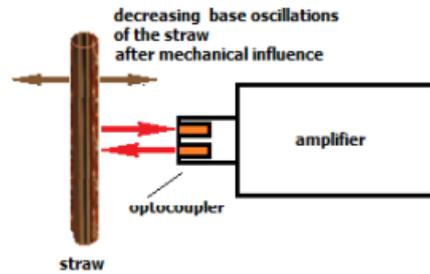
Единственная разница между этим случаем и трубкой в NA62 – наличие закрытой заглушки **e1**, которая испытывает давление изнутри трубки. Это давление уменьшает показание натяжения тензометра T_p , который в результате измеряет **разность** между натяжением трубки и силой давления, приложенной изнутри к закрытому концу трубки:

$$T_p = T_0 + 2\mu P\pi R^2 - P\pi R^2 = T_0 - (1-2\mu)P\pi R^2$$

Коэффициент Пуассона μ для пластиков ~ 0.3 , поэтому в итоге увеличение давления должно приводить к **уменьшению** измеренного “**эффективного натяжения**” T_p , несмотря на **рост истинного натяжения стенок строу** (которое просто равно $T_0 + 2\mu P\pi R^2$).



Opto-coupler

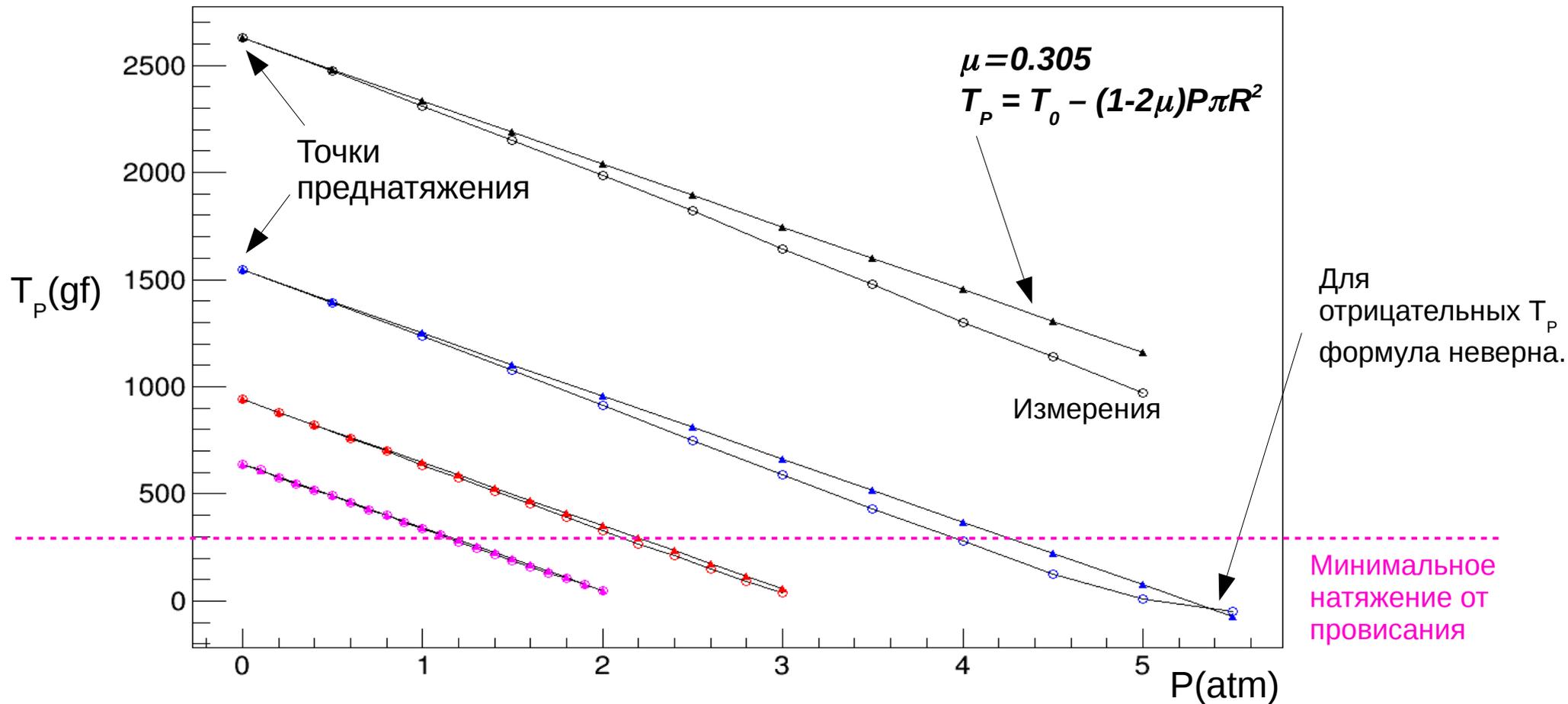


Oscilloscope with the FFT function

Отражённый свет инфракрасного лазера использовался для измерения низшей частоты колебаний строу с помощью Фурье-преобразования (использован осциллоскоп с функцией быстрого преобразования Фурье).

Первая попытка фитирования путём подбора параметров (в публикацию не вошло)
 Кружки – измерения T_p при разных давлениях P и разных преднатяжениях (T_p при $P=0$).
 Треугольники – расчёт при $\mu=0.305$. [техническая атмосфера = 1 кГс/см²]

Можно заметить небольшую нелинейность, которая может быть поглощена слабой зависимостью коэффициента Пуассона от напряжённости материала.



Уточнение формул

Формула эффективного натяжения $T_p = T_0 - (1-2\mu)P\pi R^2$ была нами выведена для изотропного материала. А мы знаем, что плёнка не изотропна, потому что производитель даёт разные модули Юнга для продольного и поперечного направлений. Изотропия теряется в процессе производства плёнки, которую растягивают на разных этапах вдоль и поперёк с разной силой и при разных температурах.

Если учесть разницу между поперечным и продольным модулями Юнга в нашем выводе, получится более точное выражение:

$$T_p = T_0 - (1-2\mu_t E_l/E_t)P\pi R^2$$

Кроме того, для уточнения влияния изменения радиуса выведена формула его изменения в первом порядке по малому параметру P/E :

$$R = R_0 (1 + (1-\mu_l\mu_t)PR_0/(E_t h) - \mu_l T_0/(E_l 2\pi R_0 h)) .$$

Но из-за малости P/E отклонение радиуса от начального приводит к незначительным изменениям T_p (в пределах систематических ошибок измерений, см. ниже).

Более существенным являются ограничения точности, связанные:

- с провисанием колпачка **C** с заглушкой **e1** при малых натяжениях (поэтому мы требуем $T_p > 300$ г);
- связанные с неидеальной жёсткостью тензометра и связи трубки с ним.

Для учёта последнего эффекта, мешающего измерять при больших натяжениях, мы ввели техническую поправку измеряемой комбинации параметров, которая учитывает как реальную нелинейность материала, так и несовершенство стенда, и исчезает в пределе нулевой напряжённости. В итоге мы описываем измерения эффективного натяжения формулой с малым коэффициентом **k**:

$$T_p = T_0 - (1-2\nu)P\pi R^2, \text{ где } \nu = \mu_t E_l / E_t - kT / (2\pi R h).$$

Изученные образцы строу-трубок

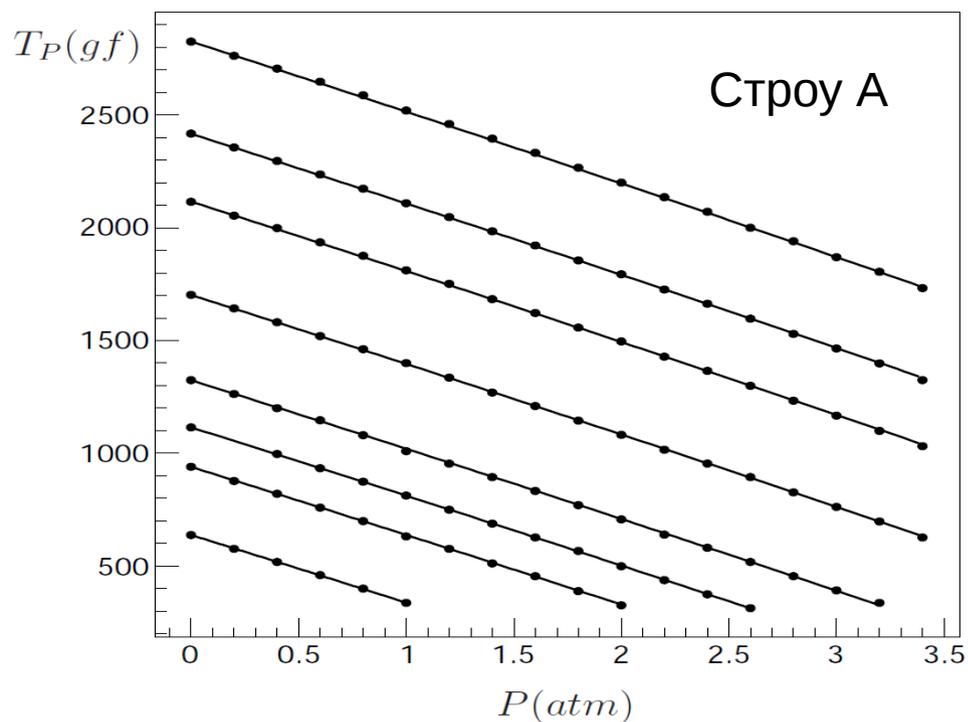
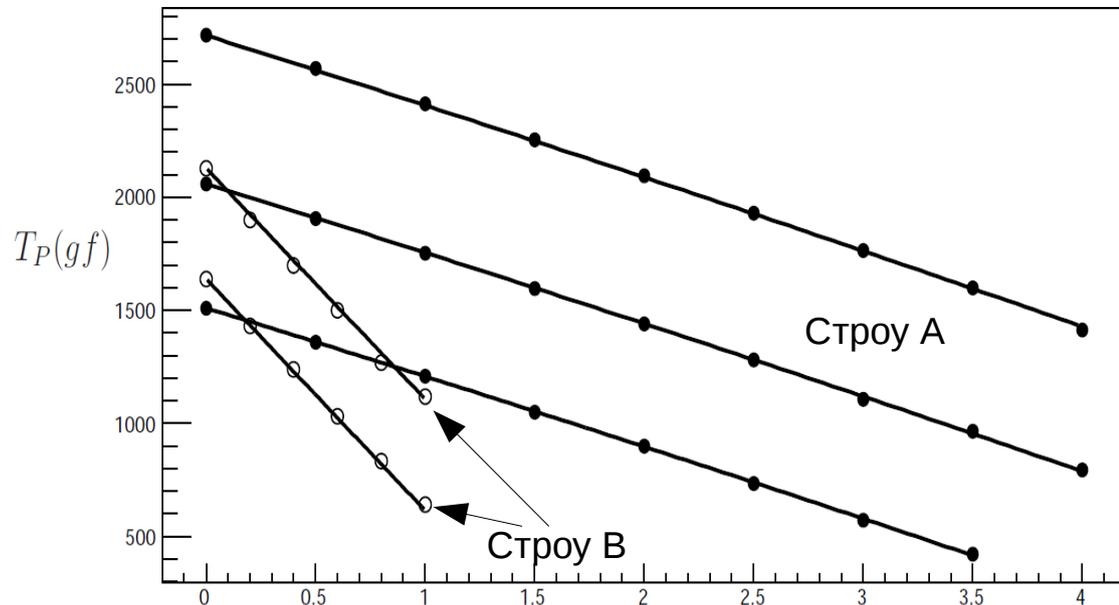
	straw A (NA62)	straw B
diameter (<i>mm</i>)	9.8	18.0
length (<i>m</i>)	2.1	1.9
wall thickness (μm)	36	54.44
linear density (<i>g/m</i>)	1.55	4.31
E_{\parallel} (N/mm^2) [7]	4500	4000
E_{\perp} (N/mm^2) [7]	5000	5500

[7] – данные производителя плёнки Hostaphan RNK 2600 для двух разных толщин. (Mitsubishi Poliester film GmbH)

Результаты фитирования параметров $\mu E_{\perp}/E_{\parallel}$ и k

кружки – экспериментальные данные;

линии – соответствующая фитирующая функция $T_P = T_0 - (1-2\nu)P\pi R^2$,
 где $\nu = \mu E_{\perp}/E_{\parallel} - kT/(2\pi Rh)$.



	straw A	straw B
diameter (mm)	9.8	18.0
length (m)	2.1	1.9
wall thickness (μm)	36	54.44
linear density (g/m)	1.55	4.31
E_{\parallel} (N/mm^2) [7]	4500	4000
E_{\perp} (N/mm^2) [7]	5000	5500
k ($\mu m^2/N$)	4.0 ± 0.5	-2.9 ± 14.5
$\mu_{\perp} \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}}$	0.305 ± 0.016	0.296 ± 0.020

Ошибки включают систематику

Источники систематических ошибок:

- ошибка E_{\perp} при фиксированном E_{\parallel}/E_{\perp} (входит только в радиус) $\Rightarrow R - R_0$
- Неточность знания радиуса ~ 100 мкм (с запасом)
- 5% ошибка шкалы тензометра (с запасом)
- 5% ошибка шкалы манометра (разумно)
- Для отношения E_{\perp}/E_{\parallel} из значащих цифр данных производителя – 10% ошибка

Таблица. Изученные образцы строу-трубок и результаты измерения параметров плёнки

	straw A	straw B
diameter (<i>mm</i>)	9.8	18.0
length (<i>m</i>)	2.1	1.9
wall thickness (μm)	36	54.44
linear density (<i>g/m</i>)	1.55	4.31
E_{\parallel} (N/mm^2) [7]	4500	4000
E_{\perp} (N/mm^2) [7]	5000	5500
k ($\mu\text{m}^2/\text{N}$)	4.0 ± 0.5	-2.9 ± 14.5
$\mu_{\perp} \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}}$	0.305 ± 0.016	0.296 ± 0.020
μ_{\perp}	0.34 ± 0.04	0.41 ± 0.04

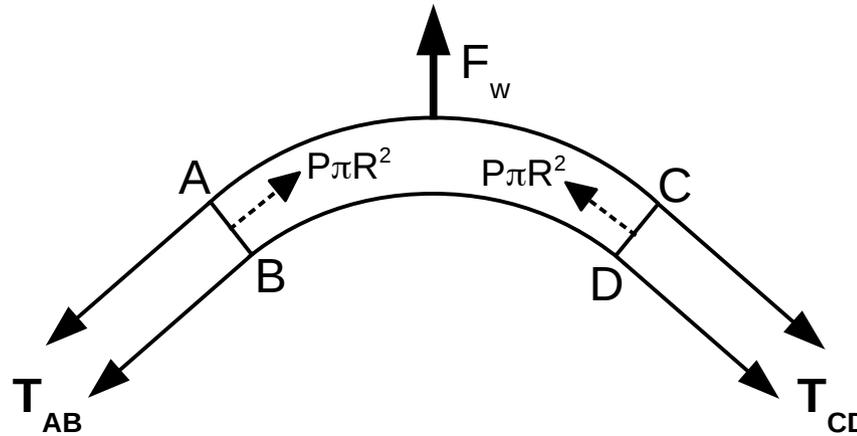
Для строу В никакого k не нужно из-за узости доступного интервала давлений, при которых $T_p > 300$ г.

Эти значения получило бы μ для изотропного материала

Значения μ с учётом анизотропии модулей Юнга

В литературе для разных ориентированных PET плёнок (Mylar) приводятся величины μ в интервале **0.37-0.44** (для самого Hostaphan не найдено)

Силы в натянутой искривлённой трубке под давлением



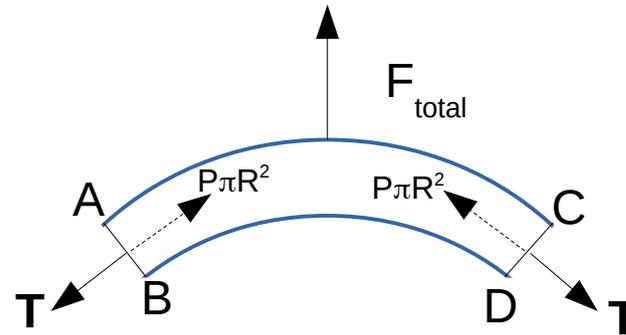
Рассмотрим очень короткий цилиндрический элемент исходно прямой трубки. В случае появления малой кривизны этот элемент изменит форму и площадь боковой стенки (AC и BD), но локально-поперечные сечения AB и CD в первом приближении не изменят площадь. В том же приближении полное натяжение стенки строу $T=|T|$ не изменится, несмотря на разницу в напряжённостях между выпуклой и вогнутой частями искривлённой стенки.

Но площадь выгнутой части стенки (верхней на рисунке) будет больше площади вогнутой части (нижней) из-за растяжения и сжатия. В результате, суммарная сила давления на стенки выделенного элемента F_w будет ненулевой, и направлена она будет в направлении выгнутой стороны. Так что избыток давления в трубке стремится увеличить кривизну трубки, если эта кривизна уже есть.

Эту вызванную давлением поперечную силу F_w легко вычислить. Вообразим жёсткую оболочку с давлением внутри, состоящую из такого же искривлённого цилиндра и двух поперечных заглушек на концах AB и CD. Суммарная сила внутреннего давления в ней равна нулю, как и для любой закрытой жёсткой оболочки. Следовательно, суммарная сила давления, приложенная к искривлённой стенке равна (но противоположно направлена) суммарной силе, приложенной к двум поперечным заглушкам на концах. Так что и для нашего искривлённого элемента сила давления на стенку F_w равна векторной сумме двух сил давления $P\pi R^2$, приложенных вдоль векторов натяжения T_{AB} , T_{CD} , но направленных против них. Иначе говоря, из каждого натяжения вычитается $P\pi R^2$.

Таким образом, динамика элемента искривлённой трубки определяется эффективным натяжением T_p , которое и меряет представленный в данной работе стэнд: $T_p = T - P\pi R^2 = T_0 - (1-2\mu)P\pi R^2$

Следствие: условие механической устойчивости строу под давлением



Неустойчивая трубка

Очевидно, кривизна стремится к ликвидации (элемент трубки движется к нулевой поперечной позиции) только для **положительного эффективного натяжения**:

$$T_p = (T - P\pi R^2) > 0$$

Если эта разность отрицательна, суммарная поперечная сила толкает искривлённый элемент в направлении выгнутой стороны, и кривизна нарастает, пока натяжение (выросшее благодаря удлинению кривой трубки) не станет по всей длине равным силе, связанной с давлением.

$$T = P\pi R^2$$

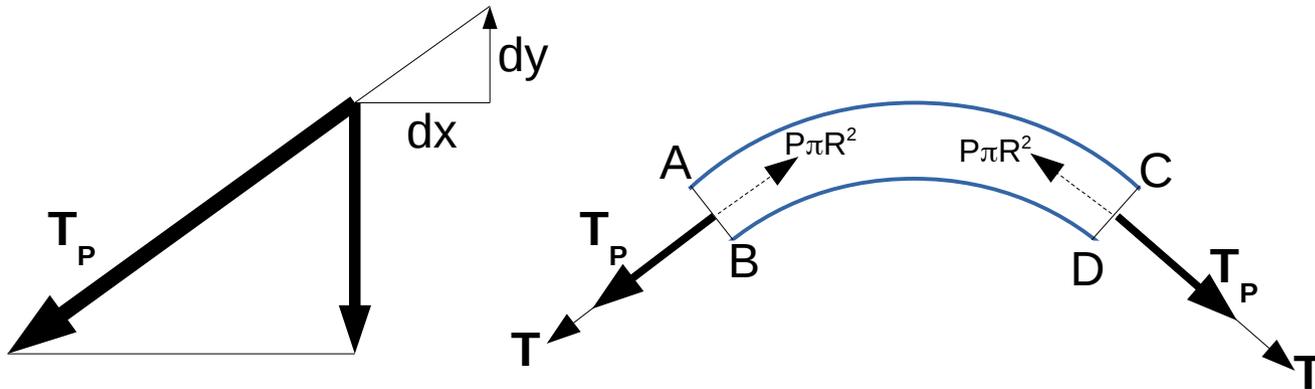
В этом состоянии наши трубки были найдены в первом прототипе, когда давление было подано без предварительного натяжения.

Минимальное преднатяжение T_0 для строу в вакууме Спектрометра NA62: $T_p = T_0 - (1 - 2\mu)P\pi R^2 > 0$:

$$T_0 > (1 - 2\mu)P\pi R^2 = (1 - 2 \cdot 0.3) 3.14 \cdot 0.49^2 = 0.3 \text{ kGf}$$

Наше преднатяжение выше с хорошим запасом (1.5 – 2 кгс). Ослабление до 300 г. в обозримом будущем не ожидается.

Следствие : волновое уравнение для строу под давлением



Если y есть поперечное положение центра трубки, а $x, (x+dx)$ являются продольными координатами концов малого элемента трубки, можно записать в обычном линейном приближении суммарную поперечную силу, приложенную к элементу (как это делают для уравнения струны):

$$F_t = T_p (dy/dx)|_{x+dx} - T_p (dy/dx)|_x = T_p [(dy/dx)|_{x+dx} - (dy/dx)|_x]$$

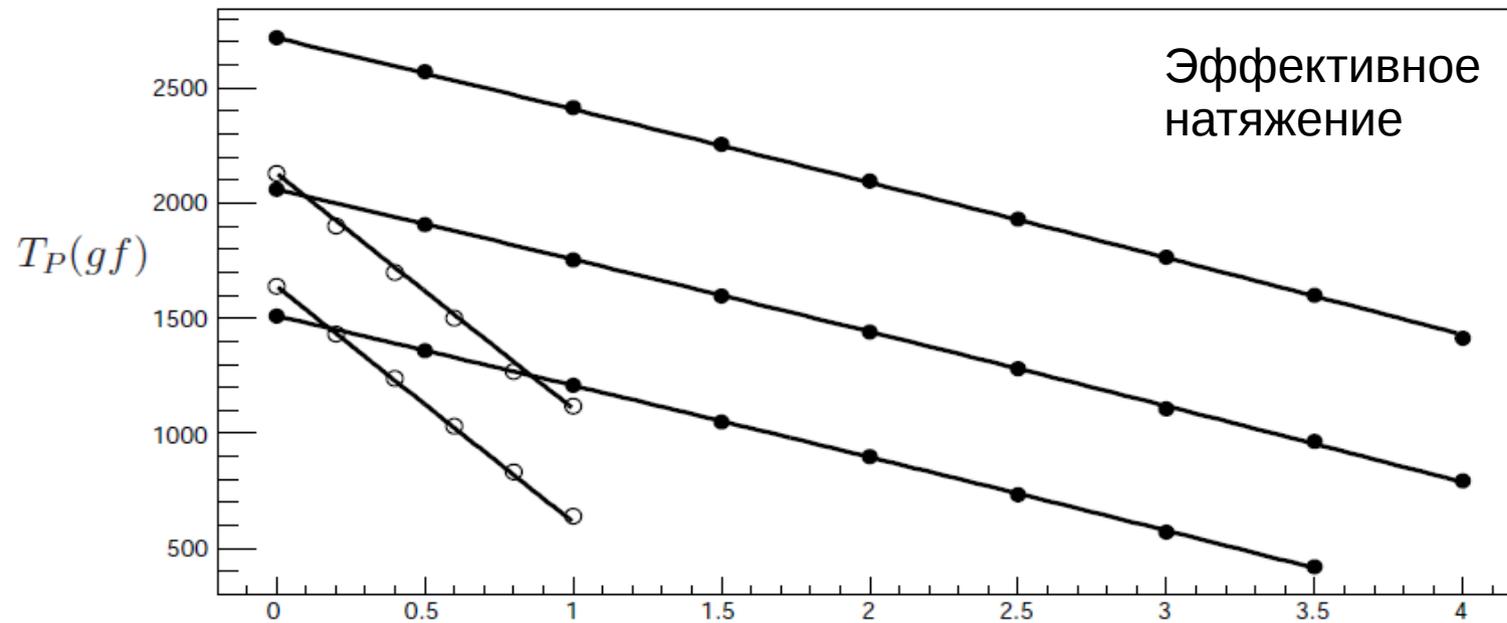
Масса этого элемента равна ρdx , где ρ – линейная (погонная) плотность трубки. Тогда поперечное ускорение получается делением силы на массу:

$$d^2y/dt^2 = T_p/\rho d^2y/dx^2$$

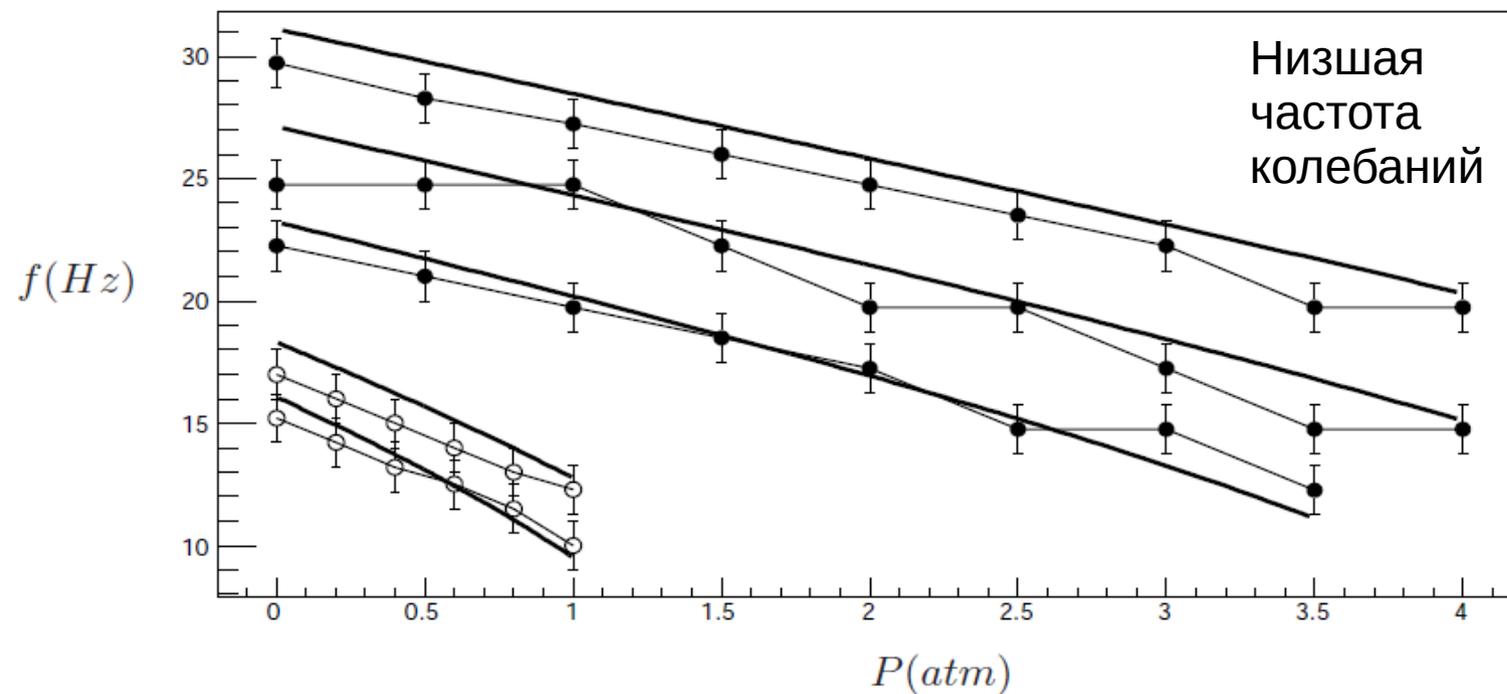
Единственная разница между этим уравнением и обычным уравнением для струны – это замена обычного натяжения T на эффективное натяжение T_p , которое зависит от давления в трубке. После обычного решения с граничными условиями на зафиксированных концах можно получить спектр самых низких частот колебаний трубки:

$$v = \text{sqrt}(T_p/\rho) n / (2L).$$

Здесь n – положительное целое число, L – длина строу. Таким образом, низшая частота колебаний трубки под давлением даётся стандартной формулой струны с заменой натяжения на эффективное натяжение T_p , зависящее от давления.



Чёрные кружки – строю А, белые – строю В.
 Линии: расчёт с параметрами из Таблицы.



Совпадение с точностью в 1 Герц.
 После калибровки частоты можно применять для измерения эффективного натяжения.

Заключение

- Предложена новая методика и построен стенд для изучения механических свойств продольно натянутых строу-трубок под давлением.
- Измерены комбинации параметров $\mu_t E_t / E_t$ для двух плёнок *Hostaphan* с разной толщиной. Эти комбинации определяют натяжение строу трубки с фиксированными концами под давлением. Выведенные формулы можно использовать для предсказания натяжения строу в вакууме.
- Обнаружено, что реакция натянутой строу под давлением на малое поперечное искривление определяется эффективным натяжением $T_p = T - \pi PR^2$. В частности, трубка сохраняет прямизну только при положительном T_p , что определяет минимальное необходимое натяжение строу перед откачкой вакуума в объёме вокруг неё.
- Измерение низшей частоты колебаний строу может быть использовано для оценки эффективного натяжения трубки.

Верно для случая
 фиксированных концов
 по y (см слайд 4)

EFFECT OF PRESSURE IN THE LONGITUDINAL DIRECTION

Let us consider the effect of the internal pressure on the tension of a straw with rigidly fixed ends. According to the theory of shells, the uniaxial tension σ_x directed, for example, along the X axis causes the orthogonally directed stress $\sigma_y = \mu\sigma_x$, where μ is Poisson's ratio. The longitudinal stress caused by the straw tension is $\sigma_{T_0} = T_0/2\pi rh$. Under the effect of pressure P the stress will decrease down to

Взято ниоткуда! $\sigma_m = \sigma_{T_0} - \mu P$, $\sigma_l = \sigma_{T_0} + \mu\sigma_t$ (9)

where σ_m is the resultant stress over the cross section. Relation (9) is valid at the constant thickness of the homogeneous straw material. Note that under these conditions the stress along the X axis remains constant at each point of the cross section. The pressure inside the straw is also constant. Therefore, relation (9) can be expressed in terms of the measured forces

Противоречит (9)! $T_m = T_0 - \mu F_P$. **На самом деле:**
 $T_0 - (1-2\mu)P\pi R^2$ (10)

Here $F_P = 1 \text{ kg/atm}$ is the force of the atmospheric pressure per cm^2 over the straw tube perimeter at a pressure of 1 atm, and T_m is the resultant tension of the straw simultaneously affected by tension and pressure difference. It follows from (10) that at the pressure $F_P = T_0/\mu$ the straw tension will be zero. Poisson's

Так $F_p = 1$ или $F_p = P$?

Автор не получил права единолично использовать **наши экспериментальные точки**. Своя установка? Где она?

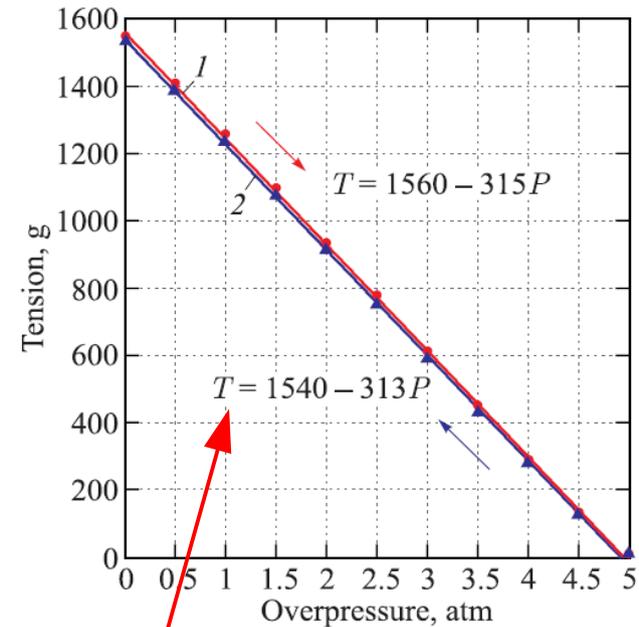


Fig. 2. Straw tension variation under the effect of the internal pressure

Фактически же автором использована формула:
 $T_m = T_0 - \mu P$,
 где T_m и T_0 выражены в г, P выражено в г/см^2 ,
 а μ примерно равно 0.315

Забавное бессмысленное совпадение: $(1 - 2 \times 0.3) \times 3.14 \times 0.49^2 = 0.3$ могло привести автора препринта ОИЯИ E13-2016-73 к его ошибочной эмпирической формуле $T_m = T_0 - \mu P \times (1 \text{ кг/атм})$, пригодной для $\mu=0.3$ и $R=0.49$ (примерно). Он явно измеряет вместо μ величину $(1-2\mu)\pi R^2$. В препринте ещё и опечатка/ошибка, в результате получилось вообще константа $T_m = T_0 - \mu \times (1 \text{ кг/атм})$ (10).

Очевидно, автор E13-2016-73 не понял, что тензометр измеряет эффективное натяжение $T_p = T - P\pi R^2$, а не натяжение строу.