

Параллельный алгоритм расчёта распространения упругих напряжений в цилиндрической области с клиновидным вырезом

А.А. Гавриков¹, М.В. Генкин², **Д.Ю. Князьков¹**, А.С. Шамаев¹³

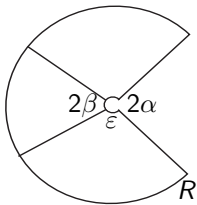
¹ИПМех РАН, ²ОАО «УРАЛХИМ», ³МГУ

Международная молодёжная конференция «Современные
проблемы прикладной математики и информатики»

Дубна

25-29 августа 2014

Постановка задачи. Математическая модель



Сечение упругого цилиндра

R - радиус упругого бесконечного цилиндра
 α - раствор углового выреза $\{\theta | -\alpha < \theta < \alpha\}$
 ε - размер окрестности центра
 β - размер полосы нагрузки
 $\{(r, \theta) | r = R, |\theta - \pi| < \beta\}$
ось z направлена горизонтально

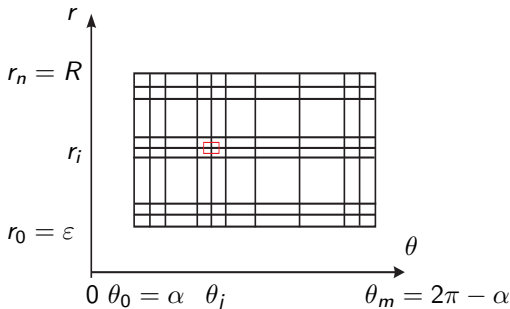
Система уравнений линейной теории упругости в напряжениях:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho F_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \end{cases}$$

ρ - плотность упругого материала

F_i - компоненты массовых сил

u_i - компоненты упругих перемещений



Для внутренних точек области $i = 1, \dots, n-2, j = 1, \dots, m-2$:

$$u_{r,k+1}^{i,j} = 2u_r^{i,j} - u_{r,k-1}^{i,j} + \tau^2 (J_{1,dd}^{i,j} - J_{1,dd}^{i-1,j} + J_{2,dd}^{i,j} - J_{2,dd}^{i,j-1} - J_{3,dd}^{i,j} + J_{4,dd}^{i,j}) / (r_i \rho S_{i,j})$$

$$u_{\theta,k+1}^{i,j} = 2u_\theta^{i,j} - u_{\theta,k-1}^{i,j} + \tau^2 (G_{1,dd}^{i,j} - G_{1,dd}^{i-1,j} + G_{2,dd}^{i,j} - G_{2,dd}^{i,j-1} + G_{3,dd}^{i,j} + G_{4,dd}^{i,j}) / (r_i \rho S_{i,j})$$

Параллельный алгоритм. Расчёт

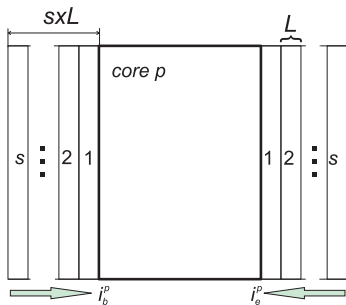


Схема расчёта на отдельном вычислительном ядре.

Пусть U_0 , U_1 и U_2 - массивы, хранящие значения компоненты решения в момент времени $t - 2\tau$, $t - \tau$ и t соответственно.

На шаге c_s , $c_s = 1, \dots, s$ на процессоре p нужно рассчитать строки

$$[i_b^p - (c_s - 1)L, \dots, i_e^p + (c_s - 1)L],$$

где i_b^p и i_e^p - первая и последняя строка для процессора p .

Для этого расчёта нужно иметь информацию из строк $[i_b^p - c_s L, \dots, i_e^p + c_s L]$ массивов U_0 и U_1 .

Параллельный алгоритм. Обмен

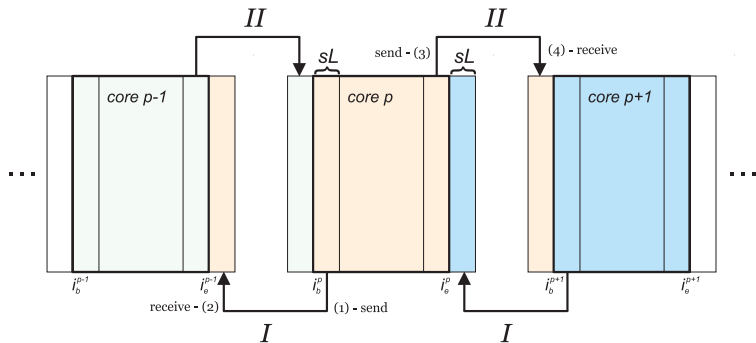


Схема обмена данными между вычислительными ядрами

При обменах типа I и II передаются следующие строки:

$$I : [i_b^p, \dots, i_b^p + sL - 1] \rightarrow [i_e^{p-1}, \dots, i_e^{p-1} + sL]$$

$$II : [i_e^p - sL + 1, \dots, i_e^p] \rightarrow [i_b^{p+1} - sL, \dots, i_b^{p+1} - 1]$$

Суперкомпьютер MBC-100K МСЦ РАН



Cores: 7920

Linpack Performance: 71 Tflop/s

Theoretical Peak: **95 Tflop/s**

Memory: 1 Gb/core

Processor: Intel Xeon X5450 3GHz

Interconnect: Infiniband DDR 4x

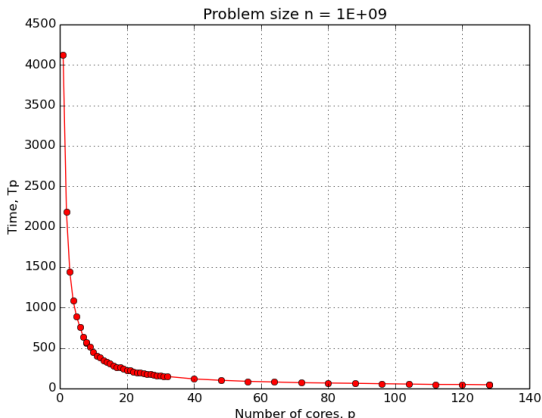
ВУ: 2xCPU = 8 ядер
8Gb ОЗУ

Суперкомпьютер MBC-100K Межведомственного
суперкомпьютерного центра Российской академии наук

TOP500: 2008 год - **36 место (1-ый в СНГ)**

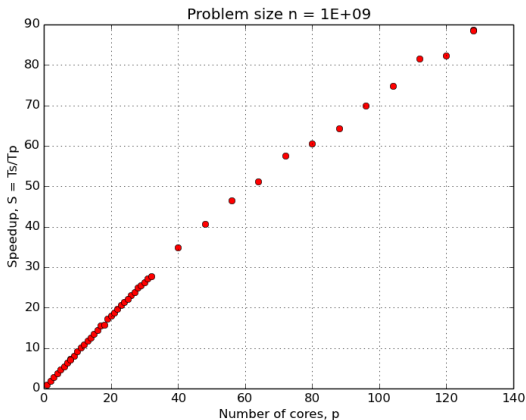
Free: 8 proc. Available: 3016 Locked: 1976

Параллельные свойства программы. Время работы



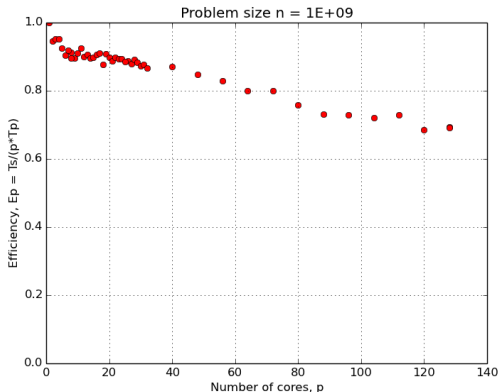
Для размера задачи $n = 10^9$, что соответствует расчетной сетке 1000×1000 , время работы уменьшается от 68 минут (4127 секунд) при использовании одного вычислительного ядра до 46 секунд при использовании 128 вычислительных ядер (16 ВУ) суперкомпьютера MBC100-K МСЦ РАН.

Параллельные свойства программы. Ускорение



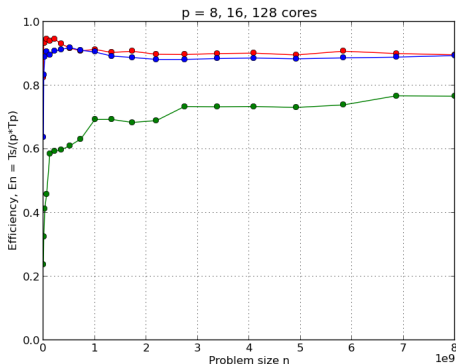
При размере задачи $n = 10^9$, что соответствует расчетной сетке 1000×1000 , и изменении количества вычислительных ядер суперкомпьютера МВС100-К МСЦ РАН от одного до 128 (16 ВУ), ускорение ведет себя практически линейно.

Параллельные свойства программы. Эффективность при постоянном размере задачи



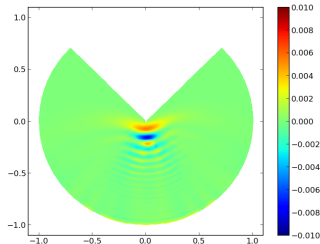
При размере задачи $n = 10^9$, что соответствует расчетной сетке 1000×1000 , и изменении количества вычислительных ядер суперкомпьютера МВС100-К МСЦ РАН от одного до 128 (16 ВУ), эффективность медленно падает, оставаясь в пределах 70-80%.

Параллельные свойства программы. Эффективность при постоянном числе ВУ



При увеличении размера задачи от $n = 10^6$, что соответствует расчетной сетке 100×100 , до $n = 8 \cdot 10^9$, что соответствует расчетной сетке 2000×2000 , на 8, 16 и 128 вычислительных ядрах суперкомпьютера МВС100-К МСЦ РАН, эффективность растёт, находится в пределах 70-90% на сетках достаточно большого размера. При этом максимум эффективности при вычислении на 1 и 2 ВУ достигается на сетках размера 400×400 и 800×800 и равен 95% и 92% соответственно.

Пример расчёта



Значение следа тензора напряжений $I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$ в момент времени $t = 0.72$.

размер расчетной сетки $N = 1000$, $M = 1000$;

половина угла выреза $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

половина дуги, на которой задана начальная нагрузка $\beta = \frac{\pi}{6}$;

радиус $R = 1$;

радиус выреза вокруг центра $\varepsilon = 0.01$;

плотность $\rho = 1$;

коэффициенты Ламе $\mu = 1$, $\lambda = 1$;

время окончания расчета $T = 0.72$;

равномерный шаг расчетной сетки по радиусу $\rho_0 = \frac{R-\varepsilon}{N} = 0.00099$;

равномерный шаг расчетной сетки по углу $\psi_0 = \frac{2\pi-2\alpha}{M} = 0.00471$;

шаг по времени $\tau = \frac{\rho_0}{300.0} = 3.3 \cdot 10^{-6}$.

- В работе был предложен параллельный алгоритм для расчета по численной схеме метода виртуальных работ. Этот алгоритм был реализован на языке программирования C++ в виде программы CylElast2, для организации графического вывода использовался язык python и, в частности, его библиотека matplotlib, для вывода анимации - видео-конвертер avconv.
- Программа CylElast2 использовалась на суперкомпьютере MBC100-K МСЦ РАН. Были исследованы параллельные свойства указанного алгоритма. Было показано, что эффективность программы достигает 70-80% и более начиная с некоторого достаточно большого объема счета.
- Использование параллельной программы CylElast2 позволило, например, для размера сетки 1000x1000 проводить расчет за 46 секунд на 128 вычислительных ядрах суперкомпьютера; тогда как подобный расчёт с использованием однопроцессорного варианта программы требует около часа времени.

- ❶ *А.Ю. Кокотов, Б.А. Пламеневский* Об асимптотике решений задачи Неймана для гиперболических систем в областях с коническими точками // Алгебра и анализ, 2004, Т. 16, вып. 3, с. 56-98.
- ❷ *Б.А. Пламеневский* О задаче Дирихле для волнового уравнения в цилиндре с рёбрами. // Алгебра и анализ, 1998, Т. 10, вып. 2, с. 197-228.
- ❸ *В.Г. Баженов, В.Л. Котов* Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. – М.: Физматлит, 2011. – 208 с.
- ❹ *A. Grama, A. Gupta, G. Karypis, V. Kumar* Introduction to Parallel Computing, Second Edition. – Addison Wesley, 2003. – 856 p.

Спасибо за внимание!