

# Новая эра ренормгрупповых вычислений в ЛТФ: современные методы, инструменты и последние достижения

Александр Вадимович Бедняков (ЛТФ ОИЯИ)  
Андрей Федорович Пикельнер (ЛТФ ОИЯИ)

Метод ренормализационной группы (РГ) позволяет систематически улучшать точность расчетов в теории возмущений. Ключевую роль в нем играют ренормгрупповые функции, задающие отклик различных величин на изменение масштаба. Их расчет является отдельной задачей и представляет собой одну из наиболее трудоемких и технически сложных частей РГ анализа.

Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова имеет давнюю и богатую историю подобного рода вычислений. Начиная с основополагающих работ Н.Н. Боголюбова и Д.В. Ширкова, РГ метод и связанные с ним расчеты многопетлевых диаграмм Фейнмана на протяжении многих лет использовались в ОИЯИ для получения результатов мирового уровня. Среди них можно отметить широко известные работы, посвященные вычислениям в скалярной  $\phi^4$  и квантовой хромодинамике (КХД). Что касается Стандартной модели (СМ), то большой резонанс в литературе вызвали недавние расчеты трехпетлевых РГ функций. После измерения массы бозона Хиггса в 2012 г. они позволили провести наиболее полный и самосогласованный анализ проблемы стабильности вакуума, повлекший за собой бурные дискуссии о возможной нестабильности СМ и необходимости введения Новой физики.

В представленном цикле работ обсуждаются различные аспекты многопетлевых расчетов, а также последние достижения, связанные с обобщением недавних рекордных вычислений в СМ и  $\phi^4$  на случай произвольных кванто-полевых моделей.

В рамках наиболее общей перенормируемой теории в четырех измерениях впервые были выведены формулы для бета-функций калибровочных и юкавских констант взаимодействия в четырех и трех петлях, соответственно [1]. Оригинальность используемого подхода состоит в том, что рассматривались простые игрушечные теории и с их помощью фиксировались модельно независимые коэффициенты в выражениях для РГ функций, минуя трудоемкие и громоздкие вычисления. Благодаря нашим расчетам стало возможно провести РГ анализ произвольной модели Новой физики на новом уровне точности без необходимости явного диаграммного счета и процедуры перенормировки. В качестве приложения найденных формул нами были выведены четырехпетлевые бета-функции всех калибровочных констант в СМ, а также в ее обобщении с несколькими хиггсовскими дублетами. Кроме того, впервые были получены шестипетлевые выражения для РГ

функций как безразмерных, так и размерных параметров наиболее общего варианта теории  $\phi^4$  [2]. Одним из возможных применений этого результата является изучение классов универсальности в теории критического поведения, соответствующих различным симметриям и различным параметрам порядка.

Важным шагом на пути к указанным результатам являются расчеты в рамках конкретных физических моделей. В частности, существенное влияние на дальнейшие исследования оказало вычисление четырехпетлевых электрослабых вкладов в бета-функцию сильной константы связи в СМ [3]. Благодаря тщательному анализу неопределённостей, возникающих при наивном подходе к размерной регуляризации киральных теорий, был получен ответ, подтверждённый впоследствии независимым вычислением и обобщенный в дальнейшем на случай произвольной теории поля [Poole&Thomsen (2019)]. Также был рассмотрен скалярный сектор простейшего расширения СМ с дополнительным хиггсовским дублетом [4] и найдены соответствующие РГ функции на уровне трех петель. Одним из побочных результатов расчета оказалось исправление опечаток в работах 80х годов, повсеместно используемых в компьютерных кодах для анализа Новой физики.

Другим приоритетным результатом является вывод трехпетлевых формул, позволяющих связать пертурбативные расчеты на решетке с ключевыми параметрами КХД (сильной константой связи [5] и массами кварков [6]), используемыми при вычислении наблюдаемых в коллайдерных экспериментах. Для этих целей впервые с помощью оригинальных идей было проведено трудоемкое аналитическое вычисление трехпетлевых вершинных функций [7] в симметричной кинематике. Актуальность расчета подтверждается тем, что полученный результат [6] был немедленно использован коллаборацией HPQCD для улучшения точности решеточного вычисления массы очарованного кварка.

Современные расчеты в старших порядках возмущения немислимы без автоматизации и применения новых подходов и алгоритмов для вычисления диаграмм Фейнмана. В работах цикла был разработан оптимизированный публично доступный код для расчета четырехпетлевых вакуумных диаграмм [8]. Он позволил в дальнейшем осуществить нетривиальное вычисление контрчленов для всех пятипетлевых диаграмм, необходимых для вывода РГ функций скалярных моделей в шестимерии [9], открыв тем самым новые возможности для РГ анализа в пространстве высших размерностей.

Отметим также, что особенностью представленного цикла работ является востребованность результатов в разных областях современной физики. Нам удалось выйти за пределы стандартных подходов и разработать необходимый набор инструментов, позволяющий неспециалистам в многопетлевых вычислениях использовать ренормгрупповой метод для получения важных физических результатов.

## Список литературы

- [1] Alexander Bednyakov и Andrey Pikelner. “Four-Loop Gauge and Three-Loop Yukawa Beta Functions in a General Renormalizable Theory”. в: *Phys. Rev. Lett.* 127.4 (2021), с. 041801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.041801. arXiv: 2105.09918 [hep-ph].
- [2] A. Bednyakov и A. Pikelner. “Six-loop beta functions in general scalar theory”. в: *JHEP* 04 (2021), с. 233. DOI: 10.1007/JHEP04(2021)233. arXiv: 2102.12832 [hep-ph].
- [3] A. V. Bednyakov и A. F. Pikelner. “Four-loop strong coupling beta-function in the Standard Model”. в: *Phys. Lett. B* 762 (2016), с. 151—156. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.09.007. arXiv: 1508.02680 [hep-ph].
- [4] A. V. Bednyakov. “On three-loop RGE for the Higgs sector of 2HDM”. в: *JHEP* 11 (2018), с. 154. DOI: 10.1007/JHEP11(2018)154. arXiv: 1809.04527 [hep-ph].
- [5] A. Bednyakov и A. Pikelner. “Four-loop QCD MOM beta functions from the three-loop vertices at the symmetric point”. в: *Phys. Rev. D* 101.7 (2020), с. 071502. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.071502. arXiv: 2002.02875 [hep-ph].
- [6] Alexander Bednyakov и Andrey Pikelner. “Quark masses: N3LO bridge from RI/SMOM to  $\overline{MS}$  scheme”. в: *Phys. Rev. D* 101.9 (2020), с. 091501. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.091501. arXiv: 2002.12758 [hep-ph].
- [7] Andrey Pikelner. “Three-loop vertex integrals at symmetric point”. в: *JHEP* 06 (2021), с. 083. DOI: 10.1007/JHEP06(2021)083. arXiv: 2104.06958 [hep-ph].
- [8] Andrey Pikelner. “FMFT: Fully Massive Four-loop Tadpoles”. в: *Comput. Phys. Commun.* 224 (2018), с. 282—287. DOI: 10.1016/j.cpc.2017.11.017. arXiv: 1707.01710 [hep-ph].
- [9] Mikhail Kompaniets и Andrey Pikelner. “Critical exponents from five-loop scalar theory renormalization near six-dimensions”. в: *Phys. Lett. B* 817 (2021), с. 136331. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136331. arXiv: 2101.10018 [hep-th].

# A new era of RG calculations at BLTP: modern methods, tools, and recent achievements

Alexander Bednyakov (BLTP JINR)  
Andrey Pikelner (BLTP JINR)

The renormalization group (RG) method allows one to systematically improve the accuracy of calculations in perturbation theory. The key objects of the method are the renormalization group functions, which specify the response of various quantities to a scale variation. Their calculation is a separate task and turns out to be one of the most time-consuming and technically complex parts of an RG analysis.

The Bogolyubov Laboratory for Theoretical Physics has a long and rich history of this kind of calculation. Starting with the fundamental works of N.N. Bogolyubov and D.V. Shirkov of the middle of the last century, the RG method and related multi-loop calculations of Feynman diagrams have been used at JINR to deliver many interesting results during past years. Among them are well-known calculations in scalar  $\phi^4$  and quantum chromodynamics (QCD). As for the Standard Model (SM), the recent computation of three-loop RG functions caused a great resonance in the literature. After measuring the mass of the Higgs boson in 2012, these results allowed one to carry out the most complete and self-consistent vacuum-stability analysis, which led to heated discussions on possible instability of the SM and a need for New Physics.

In the presented series of papers, we discuss various aspects of multiloop calculations, as well as our recent achievements. The latter are related to the generalization of the state-of-the-art modern results in the SM and  $\phi^4$  to the case of arbitrary quantum field models.

In the framework of the most general renormalizable theory in four dimensions, for the first time we derive the expressions for the beta functions of gauge and Yukawa coupling constants at our and three loops, respectively [1]. The main feature of the utilized approach lies in the fact that we bypass tedious and cumbersome calculations by considering simple toy models and fixing unknown model-independent coefficients in general expressions for the RG functions. Thanks to our results, it became possible to carry out precision RG analysis of an arbitrary New Physics model without the need for explicit diagrammatic calculation and renormalization. As an application, we derived the four-loop beta functions of all gauge couplings in the SM and its generalization with several Higgs doublets. In addition, for the first time, six-loop expressions were obtained for the RG functions of both dimensionless and dimensional parameters of the most general  $\phi^4$  model [2]. One of the possible applications of this result is the study of various classes of universality corresponding to different symmetries and different order parameters.

Calculations within the framework of specific physical models were an impor-

tant step towards the indicated general results. In particular, the computation of the four-loop electroweak contributions to the beta function of the strong coupling in the SM [3] had a significant impact on further research. Thanks to a careful analysis of the uncertainties arising from a naive approach to dimensional regularization of chiral theories, we obtain a result, which was subsequently confirmed by an independent calculation and further generalized to the case of an arbitrary field theory [Poole & Thomsen (2019)]. We also considered the scalar sector of simple SM extension with an additional Higgs doublet [4] and found the corresponding RG functions at the three-loop level. As a by-product of the calculation, we corrected a typo in the well-known papers of the 1980s, which were widely used in computer codes for the analysis of New Physics.

Another important result is the derivation of three-loop formulas that make it possible to relate the results of nonperturbative lattice calculations with the key QCD parameters (strong coupling [5] and quark masses [6]) used in calculations of observables for collider experiments. For this purpose, we use original ideas to perform sophisticated analytical calculations of the three-loop vertex functions [7] in symmetric kinematics. It is worth mentioning the fact that the obtained result [6] was immediately used by the HPQCD collaboration to improve the accuracy of the lattice determination of the charmed quark mass.

It is fair to say that modern calculations at high orders can not be carried out without computers and the use of new approaches and algorithms. In the papers of the series, an optimized publicly available code was developed for the computation of four-loop vacuum diagrams [8]. It allowed subsequently to carry out a non-trivial calculation of counterterms for all five-loop diagrams necessary for the derivation of RG functions of scalar models in six dimensions [9], thereby opening up new possibilities for RG analysis in higher dimensions.

To conclude, we provide state-of-the-art results important for different areas of modern physics. We managed to go beyond the standard approaches and develop a necessary set of tools that allows non-specialists in multiloop calculations to use the renormalization group method to obtain important physical results.

## References

- [1] Alexander Bednyakov and Andrey Pikelner. “Four-Loop Gauge and Three-Loop Yukawa Beta Functions in a General Renormalizable Theory”. In: *Phys. Rev. Lett.* 127.4 (2021), p. 041801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.041801. arXiv: 2105.09918 [hep-ph].
- [2] A. Bednyakov and A. Pikelner. “Six-loop beta functions in general scalar theory”. In: *JHEP* 04 (2021), p. 233. DOI: 10.1007/JHEP04(2021)233. arXiv: 2102.12832 [hep-ph].
- [3] A. V. Bednyakov and A. F. Pikelner. “Four-loop strong coupling beta-function in the Standard Model”. In: *Phys. Lett. B* 762 (2016), pp. 151–156. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.09.007. arXiv: 1508.02680 [hep-ph].
- [4] A. V. Bednyakov. “On three-loop RGE for the Higgs sector of 2HDM”. In: *JHEP* 11 (2018), p. 154. DOI: 10.1007/JHEP11(2018)154. arXiv: 1809.04527 [hep-ph].
- [5] A. Bednyakov and A. Pikelner. “Four-loop QCD MOM beta functions from the three-loop vertices at the symmetric point”. In: *Phys. Rev. D* 101.7 (2020), p. 071502. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.071502. arXiv: 2002.02875 [hep-ph].
- [6] Alexander Bednyakov and Andrey Pikelner. “Quark masses: N3LO bridge from RI/SMOM to  $\overline{\text{MS}}$  scheme”. In: *Phys. Rev. D* 101.9 (2020), p. 091501. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.091501. arXiv: 2002.12758 [hep-ph].
- [7] Andrey Pikelner. “Three-loop vertex integrals at symmetric point”. In: *JHEP* 06 (2021), p. 083. DOI: 10.1007/JHEP06(2021)083. arXiv: 2104.06958 [hep-ph].
- [8] Andrey Pikelner. “FMFT: Fully Massive Four-loop Tadpoles”. In: *Comput. Phys. Commun.* 224 (2018), pp. 282–287. DOI: 10.1016/j.cpc.2017.11.017. arXiv: 1707.01710 [hep-ph].
- [9] Mikhail Kompaniets and Andrey Pikelner. “Critical exponents from five-loop scalar theory renormalization near six-dimensions”. In: *Phys. Lett. B* 817 (2021), p. 136331. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136331. arXiv: 2101.10018 [hep-th].