

Критическая динамика фазового перехода в сверхтекучее состояние

Молотков Юрий, JINR, Dubna, Russia

The International Workshop of Elementary Particles and Nuclear Physics

Republic of Kazakhstan, Almaty, INP
25-29 Апрель 2022

Критическое замедление и стохастическая динамика

Типичное свойство динамических систем, так называемое критическое замедление, которое характеризует время за которое, система выведенная из равновесия равновесными флуктуациями вернется в него:

$$t_{relax} \sim \xi^z \sim |T - T_c|^{-\nu z} \rightarrow \infty \quad (1)$$

Описание динамических свойств систем, традиционно основывается на феноменологических уравнениях стохастической динамики

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi_b} + \eta_a, \langle \eta_a(x) \eta_b(x') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta(x - x'), \quad (2)$$

α - коэффициенты Онзагера, β - коэффициенты межмодовой связи. Считается, что фазовый переход Бозе газа в сверхтекучее состояние описывается моделями E или F . Однако до сих пор не выяснено, какая из фиксированных точек отвечает данному переходу.

Временные функции Грина при конечной температуре

Один из основных объектов в КТП - n -точечные функции Грина:

$$G_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} T [\hat{\varphi}_H(\mathbf{x}_1) \hat{\varphi}_H(\mathbf{x}_2) \dots \hat{\varphi}_H(\mathbf{x}_n)] \} \quad (3)$$

Существует два способа преобразовать это выражение в пригодное для вычислений физических величин: операторный и метод функционального интеграла:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{Z_0}{Z_G} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \sum_{k < l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \varphi_k} d_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \right] \varphi_3(x_1) \dots \varphi_3(x_n) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\varphi_3) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\varphi_2) dt \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} V_n(\varphi_1) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\varphi_4) dt \right] \right\} \Bigg|_{\varphi_i=0}, \quad (4)$$

Временные функции Грина при конечной температуре

Δ_{11} хронологическая свертка, которая определяется как

$$\Delta(x, x') = T [\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] - N [\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] , \quad (5)$$

$\Delta_{22} = \Delta_{44}$ - антихронологические свертки:

$$\tilde{\Delta}(x, x') = \tilde{T} [\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] - N [\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] , \quad (6)$$

Δ_{33} Евклидова свертка:

$$\Delta_E(x, x') = T [\hat{\varphi}_E(x)\hat{\varphi}_E(x')] - N [\hat{\varphi}_E(x)\hat{\varphi}_E(x')] . \quad (7)$$

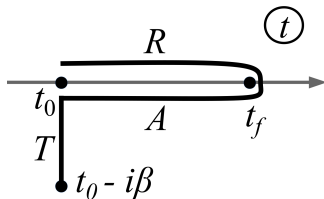
Шесть нормальных свертки строятся исходя из определения нормальной свертки:

$$n(x, x') = \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') - N [\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] , \quad (8)$$

где d - температурные свертки:

$$d(x, x') = \frac{\text{Tr} \left\{ \exp \left[-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N}) \right] N [\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] \right\}}{\text{Tr} \exp \left[-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N}) \right]} . \quad (9)$$

Функциональный интеграл



Производящий функционал временных функций Грина при конечной температуре:

$$\int D\psi^+ D\psi e^{iS + A\psi^+ + A^+\psi}, \quad (10)$$

где действие:

$$S = \int_C dt \int dx (\psi^+ \partial \psi - H) \quad (11)$$

Гамильтониан и хронологические свертки

Для описания перехода Бозе-газа в сверхтекучее состояние гамильтониан выбран в виде

$$\hat{H} = \int dx \left[\hat{\psi}^+(t, x) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}(t, x) + \frac{g}{4} \hat{\psi}^{+2}(t, x) \hat{\psi}^2(t, x) \right] \quad (12)$$

где ψ, ψ^+ - операторы поля, состоящие из операторов рождения и уничтожения частиц, со стандартным коммутатором между ними, μ - химический потенциал, m - масса частицы, g - константа взаимодействия. Пропагаторы данной модели имеют вид:

$$G_{RR} = e^{-i\varepsilon(t-t')} (\Theta(t-t') + n_\varepsilon),$$

$$G_{AA} = e^{-i\varepsilon(t-t')} (\Theta(t' - t) + n_\varepsilon),$$

$$G_{RA} = e^{-i\varepsilon(t-t')} n_\varepsilon,$$

$$G_{TT} = e^{-i\varepsilon(\tau-\tau')} (\Theta(\tau-\tau') + n_\varepsilon),$$

$$G_{AR} = e^{-i\varepsilon(t-t')} (n_\varepsilon + 1),$$

$$G_{RT} = G_{AT} = e^{-i\varepsilon(t-t_0 + i\tau')} n_\varepsilon,$$

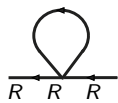
$$G_{TR} = G_{TA} = e^{-i\varepsilon(t_0 - i\tau - t')} (n_\varepsilon + 1),$$

где $\tau \equiv -\text{Im } t$, $n_\varepsilon = (e^{\beta\varepsilon} - 1)^{-1}$, $\varepsilon \equiv k^2/(2m_0) - \mu$, k - импульс, Θ - тета-функция Хевисайда.

Расходимости и их регуляризация

$$G_2(x_1, x_2) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_G T \left[\hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H^+(x_2) \right] \right\} \quad (13)$$

Рассмотрим однопетлевую поправку к 2-х точечной функции Грина:



$$= -ig \int dp [\theta(0) + n_p] \int_{t_i}^{t_f} dt \exp[-i\epsilon(k)(t_1 - t)] [\theta(t_1 - t) + n_k] \\ \times \exp[-i\epsilon(t - t_2)] [\theta(t - t_2) + n_k] = -ig \int dp n_p \exp[-i\epsilon(t_1 - t_2)] \\ \times [(t_1 - t_2) + (t_1 - t_i + t_f - t_2)n_k + (t_f - t_i)n_k^2].$$

Предел $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow \infty$ расходится. Однако эта расходимость сокращается с другой диаграммой из того же порядка теории возмущений. Регуляризация по времени позволяет избежать поиска сокращений расходимостей по $t_i - t_f$. Введя ее, теперь можно перейти к пределу $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow \infty$.

Расходимости и их регуляризация

Оказывается удобно работать в переменных:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta^+ \\ \xi \\ \xi^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R - \psi_A \\ \psi_R^+ - \psi_A^+ \\ \psi_R + \psi_A \\ \psi_R^+ + \psi_A^+ \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Регуляризованные пропагаторы:

$$\begin{aligned} \langle \xi \xi^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|} (2n_\varepsilon + \mathbf{1}), & \langle \eta \eta^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= \mathbf{0}, \\ \langle \psi_T \psi_T^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= e^{-\varepsilon(\tau-\tau')} (\Theta(\tau - \tau') + n_\varepsilon), & \langle \eta \xi^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= -\Theta(t' - t) e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|}, \\ \langle \xi \eta^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= \Theta(t - t') e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|}, & \langle \xi \psi_T^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= \sqrt{2} e^{-i\varepsilon(t-t_0 + i\tau) - \gamma|t-t_0|} n_\varepsilon, \\ \langle \psi_T \xi^+ \rangle_{\mathbf{0}} &= \sqrt{2} e^{-i\varepsilon(t_0 - i\tau - t') - \gamma|t_0 - t'|} (n_\varepsilon + \mathbf{1}), & & \end{aligned}$$

Выбор t_0 диктуется постановкой задачи. Для исследования непрерывных фазовых переходов удобно считать что $t_0 \rightarrow -\infty$, так как мы интересуемся процессами времени которых больше времени релаксации в системе.

ИК эффективная теория

Пропагаторы в ИК области:

$$\begin{aligned}\langle \xi(t, k) \xi^+(t', -k) \rangle_0 &= \Delta_{\text{IR reg}}^K(t, k) = \frac{2}{k^2} e^{-i\alpha u k^2(t-t') - \alpha k^2|t-t'|}, \\ \langle \eta(t, k) \eta^+(t', -k) \rangle_0 &= 0, \\ \langle \xi(t, k) \eta^+(t', -k) \rangle_0 &= \Delta_{\text{reg}}(t, k) = \theta(t - t') e^{-i\alpha u k^2(t-t') - \alpha k^2|t-t'|}, \\ \langle \eta(t, k) \xi^+(t', -k) \rangle_0 &= -\tilde{\Delta}_{\text{reg}}(t, k) = -\theta(t' - t) e^{-i\alpha u k^2(t-t') - \alpha k^2|t-t'|},\end{aligned}\tag{15}$$

Неренормированное действие:

$$\begin{aligned}S &= 4\eta\alpha\eta^+ + \eta^+(\partial_t - i\alpha u\Delta - \alpha\Delta)\xi + \xi^+(\partial_t - i\alpha u\Delta + \alpha\Delta)\eta + \\ &+ \frac{ig_1\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi + \frac{ig_2\alpha}{2}\eta\xi\xi^+\xi^+\end{aligned}\tag{16}$$

Таблица канонических размерностей полей и параметров

	ξ, ξ^+	η, η^+	α	g
d_Q^ω	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
d_Q^k	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	0	$-d$
d_Q	$\frac{d}{2} - 1$	$\frac{d}{2} + 1$	0	$4 - d$

Таблица: Канонические размерности полей и параметров

Модель логарифмична в 4-мерном пространстве, что позволяет напрямую применить технику ренормгруппы.

Система уравнений на константы ренормировки

Ренормируемое действие:

$$S = Z_0 \eta \eta^+ + \eta^+ (Z_1 \partial_t - Z_2 \Delta) \xi + \xi^+ (Z_3 \partial_t - Z_4 \Delta) \eta + Z_5 \eta^+ \xi^+ \xi \xi + Z_6 \eta \xi \xi^+ \xi^+ \quad (17)$$










На зарядовой гиперповерхности $g_1 = g_2^*$ теория мультипликативно ренормируемая. Система уравнений, которая определяет константы ренормировки:

$$\begin{aligned} 4\alpha Z_\alpha Z_{\eta^+} Z_\eta &= Z_0, \\ Z_{\eta^+} Z_\xi &= Z_1, \quad Z_\eta Z_{\xi^+} = Z_1^*, \\ Z_\alpha Z_{\eta^+} Z_\xi \alpha + i Z_{\eta^+} Z_\xi Z_u u &= Z_2, \\ \frac{ig_1}{2} Z_{\eta^+} Z_\xi^2 Z_{\xi^+} Z_{g_1} &= Z_5. \end{aligned}$$

Может быть разрешена как:

$$\begin{aligned} Z_{\eta^+} &= Z_\eta^*, \quad Z_{\xi^+} = Z_\xi^*, \quad Z_{\eta^+} Z_\xi = Z_1, \\ Z_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Re}(Z_2 Z_1^{-1}), \quad Z_{\eta^+} Z_\eta = \frac{1}{4\alpha} Z_0 Z_\alpha^{-1} \\ Z_u &= \frac{1}{u} \operatorname{Im}(Z_2 Z_1^{-1}), \quad Z_{g_1} = -\frac{i}{2g_1 \alpha} Z_5 Z_0 Z_1^{-2} (Z_1^*)^{-1} Z_\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Двухпетлевое приближение

	с.к.	Z_i	значение
	$\frac{1}{2}$	Z_5	$-\frac{\alpha g_1^2}{(iu+1)8\pi^2\epsilon}$
	1	Z_5	$-\frac{\alpha g_1^2}{8\pi^2\epsilon}$
	1	Z_5	$\frac{\alpha g_1 g_1^*}{8\pi^2\epsilon}$
	$\frac{1}{2}$	Z_0	$-\frac{2\alpha g_1 g_1^*}{(8\pi^2)^2\epsilon(u^2+1)} \left\{ \pi u + 2u \arctan\left(\frac{u}{4} - \frac{3}{4u}\right) + \log \frac{4096^8}{(u^2+1)(u^2+9)^3} \right\}$
	1	Z_1	$\frac{g_1^2}{2(8\pi^2)^2\epsilon(u^2+1)^2} \left\{ 4u \arctan \frac{u}{3} - (u^2-1) \log \frac{16^2}{u^2+9} - 2i \left[(u^2-1) \arctan \frac{u}{3} + u \log \frac{16^2}{u^2+9} \right] \right\}$
	1	Z_2	$\frac{\alpha g_1^2}{(8\pi^2)^2\epsilon} \left[\frac{(u^2+6-iu)}{u^2+9} \right]$
	$\frac{1}{2}$	Z_1	$\frac{g_1 g_1^*}{2(8\pi^2)^2\epsilon(u^2+1)^2} \left(2u \left[-\pi + 2 \arctan\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{2u}\right) \right] + (u^2-1) \log \frac{16^4}{(u^2+1)(u^2+9)} - i \left\{ (u^2-1) \left[\pi - 2 \arctan\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{2u}\right) \right] + 2u \log \frac{16}{(u^2+1)(u^2+9)} \right\} \right)$
	$\frac{1}{2}$	Z_2	$-\frac{\alpha g_1 g_1^*}{(8\pi^2)^2\epsilon} \left[\frac{2(u^2+3-2ui)}{u^2+9} \right]$

Двухпетлевое приближение

Коэффициенты при контрчленах Z_i были вычислены в схеме MS:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 4\alpha + \frac{g_1 g_2 \alpha M_1}{4^3 \pi^4 \epsilon}, & Z_1 &= 1 + \frac{g_1^2 M_3}{27 \pi^4 \epsilon} + \frac{g_1 g_2 M_2}{2^8 \pi^4 \epsilon}, \\ Z_2 &= (1 + iu)\alpha + \frac{\alpha(u + 2i)g_1^2}{2^8 \pi^4 \epsilon(u + 3i)} - \frac{\alpha g_1 g_2 (u + i)}{2^8 (u + 3i) \pi^4 \epsilon}, & (18) \\ Z_5 &= \frac{ig_1 \alpha}{2} - \frac{g_1^2 \alpha}{16(1 + iu)\pi^2 \epsilon} - \frac{g_1^2 \alpha}{8\pi^2 \epsilon} + \frac{g_1 g_2 \alpha}{8\pi^2 \epsilon}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{A + 3B - \pi u - 2u \arctan C_-}{u^2 + 1}, & M_2 &= \frac{(u - i)^2 (2i \arctan(2C_+) - \pi i - A - B)}{(u^2 + 1)^2}, \\ M_3 &= \frac{(u + i)^2 (B - 2i \arctan(u/3))}{(u^2 + 1)^2}, & A &= \ln(u^2 + 1), \quad B = \ln\left(\frac{u^2 + 9}{16}\right), \quad C_{\pm} = \frac{u^2 \pm 3}{4u}. \end{aligned}$$

Бета и гамма функции:

$$\beta_{g_n} = -\epsilon g_n + \epsilon g_n \sum_{m=r,i} g_m \frac{\partial[Z_{g_m}]}{\partial g_m}, \quad \beta_u = \epsilon u \sum_{n=r,i} g_n \frac{\partial[Z_u]}{\partial g_n}, \quad \gamma_\zeta = -\epsilon \sum_{n=r,i} g_n \frac{\partial[Z_\zeta]}{\partial g_n},$$

β и γ функции

Бета-функции и гамма функции отвечающие за критические индексы:

$$\begin{aligned}
 \beta_{gr} &= -\frac{2(2u^2 + 3)g_1g_2 + ug_2^2 - ug_1^2}{8\pi^2(u^2 + 1)} - \epsilon g_1, & \beta_{gi} &= \frac{2ug_1g_2 - (4u^2 + 5)g_2^2 + g_1^2}{8\pi^2(u^2 + 1)} - \epsilon g_2, \\
 \beta_u &= \frac{(u^2 + 6)ug_2^2 - ug_1^2 + 6g_1g_2}{64\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(u^2 + 1)[(g_1^2 + g_2^2)\text{Im}M_2 + 2(g_1^2 - g_2^2)\text{Im}M_3 + 4g_1g_2\text{Re}M_3]}{128\pi^4}, \\
 \gamma_\alpha &= -\frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{128\pi^4(u^2 + 9)} + \frac{(g_1^2 + g_2^2)(\text{Re}M_2 - u\text{Im}M_2)}{128\pi^4} + \\
 &+ \frac{(g_1^2 - 2ug_1g_2 - g_2^2)\text{Re}M_3}{64\pi^4} - \frac{(ug_1^2 + 2g_1g_2 - ug_2^2)\text{Im}M_3}{64\pi^4}, \\
 \gamma_\eta &= \frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{256\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(g_1^2 + g_2^2)(M_1 + \text{Re}M_2 - u\text{Im}M_2)}{256\pi^4} - \\
 &- \frac{(g_1^2 - 2ug_1g_2 - g_2^2)\text{Re}M_3}{128\pi^4} + \frac{(ug_1^2 + 2g_1g_2 - ug_2^2)\text{Im}M_3}{128\pi^4} \\
 \gamma_\xi &= -\frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{256\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(g_1^2 + g_2^2)(\text{Re}M_2 + (u + 2i)\text{Im}M_2 - M_1)}{256\pi^4} - \\
 &- \frac{[g_1^2 + 2(u + 2i)g_1g_2 - g_2^2]\text{Re}M_3}{128\pi^4} - \frac{[(u + 2i)g_1^2 - 2g_1g_2 - (u + 2i)g_2^2]\text{Im}M_3}{128\pi^4}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Фиксированная точка и критический индекс z

Единственная ИК устойчивая точка есть $g_{r*} = 0, g_{i*} = -8\pi^2\epsilon/5, u_* = 0$ Её матрица *omega* определяющая устойчивость имеет следующие собственные числа: $(\epsilon, \epsilon/5, 2\log(4/3)\epsilon^2/25)$

$$\gamma_{\xi}^* = 0.01\epsilon^2, \quad \gamma_{\eta}^* = 0.0245218\epsilon^2, \quad \gamma_{\alpha}^* = -0.0145218\epsilon^2. \quad (20)$$

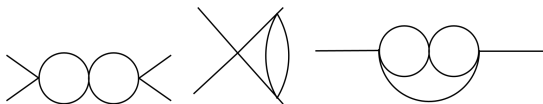
$$z = 2 + 0.0145218\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (21)$$

$$S_A = -\alpha\phi'^2 + \phi'(\partial_t\phi - \alpha\Delta\phi + \frac{\alpha g}{6}\phi^3) \quad (22)$$

отличается лишь заменой $\eta^+ = \phi'_1 + \phi'_2, \eta = i\phi'_2 - \phi'_1, \xi^+ = \phi_1 + i\phi_2, \xi = \phi_1 - i\phi_2$

Трехпетлевые диаграммы

В третьем порядке имеются несколько разных топологий диаграмм:



Первый тип диаграмм есть произведение диаграмм более низкого порядка и поэтому интереса не представляет, Z_i в этом порядке выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Z_0(g_1, g_2, u) &= 4\alpha - \frac{\alpha g_1 g_2 M_0(u)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \epsilon} \\
 &+ \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_{10}(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_{11}(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon}, \\
 Z_1(g_1, g_2, u) &= 1 + \frac{g_1^2 M_3(u)}{16^2 \pi^4 \epsilon} - \frac{g_1 g_2 M_2(u)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \epsilon} \\
 &+ \frac{(-i) g_1^3 Q_4(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_5(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_6(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon}, \\
 Z_2(g_1, g_2, u) &= (1 + iu)\alpha + \frac{g_1^2 \alpha (2 - iu)}{16^2 \pi^4 (3 - iu)} - \\
 &- \frac{g_1 g_2 \alpha (1 - iu)}{16^2 (3 - iu) \pi^4} + \frac{(-i) g_1^3 Q_7(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_8(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \\
 &+ \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_9(u)}{16^3 \pi^6 \epsilon} \\
 Z_5(g_1, g_2, u) &= \frac{i g_1 \alpha}{2} - \frac{g_1^2 \alpha}{16(1 + iu) \pi^2 \epsilon} - \frac{g_1^2 \alpha}{8 \pi^2 \epsilon} + \frac{g_1 g_2 \alpha}{8 \pi^2 \epsilon} \\
 &- \frac{i g_1^3}{64 \pi^4 \epsilon} Q_1(u) - \frac{i g_1^2 g_2}{128 \pi^4 \epsilon} Q_2(u) - \frac{i g_1 g_2^2}{128 \pi^4 \epsilon} Q_3(u),
 \end{aligned}$$

Диаграммы Z_0

Таблица: Z_0 .

#	Диаграмма	с.к	Z_0
1		1	$-\frac{\gamma_0}{1536\pi^6 \epsilon} ig_1^2 g_2$
2		1	$\frac{\gamma_0}{1536\pi^6 \epsilon} ig_1 g_2^2$
3		$\frac{1}{2}$	$\frac{\gamma_0}{1536\pi^6 \epsilon} ig_1 g_2^2$
4		1	$-\frac{\gamma_0}{1536\pi^6 \epsilon} ig_1^2 g_2$
5		$\frac{1}{2}$	$-\frac{\gamma_0}{1536\pi^6 \epsilon} ig_1^2 g_2$
6		1	$\frac{\gamma_0}{1536\pi^6 \epsilon} ig_2^2 g_1$

Диаграммы Z_5

#	Диаграмма	с.к	Z_5	$\partial_u Z_5 (u=0)$
1		$\frac{1}{2}$	$-\frac{3ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 c}$	$-\frac{g_1^3 \log(\frac{4}{3})}{16\pi^4 c}$
2		1	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{86}{37}) - 1)}{256\pi^4 c}$	$\frac{g_1^3 (-1 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4 c}$
3		1	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{86}{37}) - 1)}{256\pi^4 c}$	$\frac{g_1^3 (\log(\frac{286}{31}) - 1)}{128\pi^4 c}$
4		1	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{86}{37}) - 1)}{256\pi^4 c}$	$\frac{g_1^3 (-3 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4 c}$
5		1	$-\frac{ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 c}$	$\frac{g_1^3 (1 - 6 \log(\frac{4}{3}))}{192\pi^4 c}$
6		1	$-\frac{ig_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 c}$	$-\frac{g_1^3 (1 + \log(\frac{4086}{31}))}{384\pi^4 c}$
7		$\frac{1}{2}$	$-\frac{ig_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 c}$	$-\frac{g_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 c}$
8		1	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{86}{37}) - 1)}{256\pi^4 c}$	$\frac{g_1^3 (-1 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4 c}$

Диаграммы Z_5

#	Диаграмма	с.к	Z_5	$\partial_U Z_5(u=0)$
9		$\frac{1}{2}$	$\frac{ig_1^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 (-3 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4 \epsilon}$
10		1	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1 g_2^2 (1 - 14 \log(2) + 7 \log(3))}{256\pi^4 \epsilon}$
11		1	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1 g_2^2 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
12		$\frac{1}{2}$	$-\frac{ig_1 g_2^2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{96\pi^4 \epsilon}$
13		1	$\frac{ig_1^2 g_2 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{768\pi^4 \epsilon}$
14		1	$\frac{ig_1^2 g_2 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2}{384\pi^4 \epsilon}$

Диаграммы Z_5

#	Диаграмма	с.к	Z_5	$\partial_u Z_5(u=0)$
15		$\frac{1}{2}$	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{1024}{243}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$
16		$\frac{1}{2}$	$\frac{3ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
17		1	$\frac{3ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
18		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
19		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{1024}{243}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$

Диаграммы Z_5

#	Диаграмма	с.к	Z_5	$\partial_u Z_5(u=0)$
20		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
21		$\frac{1}{2}$	$\frac{ig_1^2 g_2 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$
22		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
23		$\frac{1}{2}$	$\frac{ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
24		1	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1 g_2^2 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$

Диаграммы Z_1, Z_2

#	Диаграмма	с.к	Z_i	$\partial_u Z_i (u=0)$
1		1	$Z_1 : \frac{v_{31}}{9216\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$ $Z_2 : -\frac{v_{1p}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$	$-\frac{\chi_{31}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$ $-\frac{\chi_{1p}}{110592\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$
2		1	$Z_1 : -\frac{v_{21}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$ $Z_2 : \frac{v_{2p}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{21}}{18432\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{2p}}{221184\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$
3		1	$Z_1 : \frac{v_{31}}{9216\pi^3 \epsilon_c} ig_1 g_2^2$ $Z_2 : -\frac{v_{3p}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1 g_2^2$	$\frac{\chi_{31}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1 g_2^2$ $\frac{\chi_{3p}}{27648\pi^3 \epsilon_c} g_1 g_2^2$
4		1	$Z_1 : \frac{v_{41}}{6144\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$ $Z_2 : \frac{v_{4p}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$	$\frac{\chi_{41}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$ $\frac{\chi_{4p}}{221184\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$
5		1/2	$Z_1 : -\frac{v_{51}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$ $Z_2 : -\frac{v_{5p}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{51}}{18432\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{5p}}{110592\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$
6		1	$Z_1 : -\frac{v_{61}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$ $Z_2 : -\frac{v_{6p}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{61}}{18432\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{6p}}{221184\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$
7		1	$Z_1 : -\frac{v_{71}}{6144\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$ $Z_2 : -\frac{v_{7p}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$	$-\frac{\chi_{71}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$ $-\frac{\chi_{7p}}{221184\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$
8		1	$Z_1 : \frac{v_{81}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$ $Z_2 : \frac{v_{8p}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$	$\frac{\chi_{81}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$ $\frac{\chi_{8p}}{221184\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$
9		1	$Z_1 : -\frac{v_{91}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$ $Z_2 : \frac{v_{9p}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{91}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{9p}}{221184\pi^3 \epsilon_c} g_1^2 g_2$
10		1/2	$Z_1 : -\frac{v_{101}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_2^2 g_1$ $Z_2 : -\frac{v_{10p}}{36864\pi^3 \epsilon_c} ig_2^2 g_1$	$\frac{\chi_{101}}{18432\pi^3 \epsilon_c} g_2^2 g_1$ $\frac{\chi_{10p}}{110592\pi^3 \epsilon_c} g_2^2 g_1$
11		1	$Z_1 : \frac{v_{111}}{9216\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$ $Z_2 : -\frac{v_{11p}}{18432\pi^3 \epsilon_c} ig_1^3$	$\frac{\chi_{111}}{9216\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$ $\frac{\chi_{11p}}{110592\pi^3 \epsilon_c} g_1^3$

Диаграммы

$$\begin{aligned}
 \tau_0 &= 8\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) - \pi^2 + \log\left(\frac{4}{3}\right) (6 - 26 \log(2) + 21 \log(3)) \\
 v_{1t} &= 3 \left(-4 \left(\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \right) - 3 \log(3)(2 + \log(243)) + 4 \log(2) \left(3 + 28 \coth^{-1}(5) \right) \right) + \pi^2 \\
 v_{1p} &= 1 + 2 \log\left(\frac{4}{3}\right) (-5 + 24 \log(2) - 12 \log(3)) \\
 v_{4t} &= -32\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 12\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{10\pi^2}{3} + 7 \log^2(3) - 54 \log(3) + 4 \log(2)(23 - 7 \log(2) + \log(81)) \\
 v_{4p} &= -96\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 96\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 5 + 384 \log^2(2) + 4 \log(3)(89 + 24 \log(3)) - 8 \log(2)(73 + 48 \log(3)) \\
 v_{7t} &= 4 \left(-2\text{Li}_2\left(\frac{1}{16}\right) + 3\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{6}\right) + 5\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 6\text{Li}_2\left(\frac{3}{8}\right) + 4\text{Li}_2\left(\frac{4}{9}\right) + 3\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) \right) - \\
 &\quad - \frac{14\pi^2}{3} + 116 \log^2(2) - 4 \log(2)(17 + 32 \log(3)) + \log(3)(42 + 47 \log(3)) \tag{23} \\
 v_{7p} &= -192\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 96\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 5 - 16\pi^2 + 4 \log(3)(24 \log(3) - 79) + \\
 &\quad + 24 \log(2)(21 - 8 \log(3) + \log(256)) \\
 \chi_{1t} &= - \left(24\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 84\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) - 6 + 7\pi^2 - 576 \log^2(2) + 20 \log(2)(8 + 33 \log(3)) - \right. \\
 &\quad \left. - \log(3)(80 + 207 \log(3)) \right) \\
 \chi_{1p} &= - \left(216\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 432\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 69 + 36\pi^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 4 \log(2)(-221 + 972 \log(2) - 864 \log(3)) + 221 \log(9) + 324 \log(3) \log(9) \right) \\
 \chi_{2t} &= - \left(12\text{Li}_2(-2) + 6\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 6 + \pi^2 - 180 \log^2(2) + (26 + 96 \log(3)) \log(4) - (13 + 24 \log(3)) \log(9) \right)
 \end{aligned}$$

Диаграммы

$$\chi_{2p} = \left(144\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 288\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 57 + 24\pi^2 + 2592 \log^2(2) + 432 \log^2(3) + 322 \log(3) - \right. \\ \left. - 4 \log(2)(161 + 576 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{3t} = - \left(13\pi^2 - 2 \left(-33\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 78\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 6 + 270 \log^2(2) - 4 \log(2)(25 + 87 \log(3)) + \right. \right. \\ \left. \left. + (25 + 63 \log(3)) \log(9) \right) \right)$$

$$\chi_{3p} = \left(54\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 108\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 15 + 9\pi^2 + 972 \log^2(2) + \log(3)(113 + 162 \log(3)) - \right. \\ \left. - 2 \log(2)(113 + 432 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{4t} = - \left(-30\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 30\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - 63\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) + 3 + 5\pi^2 - 366 \log^2(2) + 97 \log(4) + \right. \\ \left. + \log(3)(-113 - 18 \log(3) + 120 \log(4)) \right)$$

$$\chi_{4p} = \left(-864\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 3 + 48\pi^2 + 288 \log^2(3) + 1651 \log(9) - 4 \log(2) \left(1331 + 864 \coth^{-1}(5) \right) \right)$$

$$\chi_{5t} = - \left(-18\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 6\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 60\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) - 12 + 7\pi^2 - 672 \log^2(2) + 4 \log(2)(37 + 183 \log(3)) - \right. \\ \left. - \log(3)(82 + 213 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{5p} = - \left(-9 \left(32\text{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right) + 64\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) + 1 \right) + 48\pi^2 - 6912 \log^2(2) + 20 \log(2)(173 + 288 \log(3)) - \right. \\ \left. - 2 \log(3)(1025 + 504 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{6t} = - \left(-126\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 36\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 6 + 7\pi^2 + 276 \log^2(2) + 36 \log^2(3) + 302 \log(3) - 4 \log(2)(119 + 69 \log(3)) \right) \\ (24)$$

Диаграммы

$$\chi_{6p} = \left(-1152\text{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1440\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) + 189 + 96\pi^2 - 13248 \log^2(2) - 2 \log(3)(2381 + 720 \log(3)) + 4 \log(2)(1933 + 2592 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{7t} = \left(-117\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 6\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 + \frac{11\pi^2}{2} - 90 \log^2(2) + (103 - 36 \log(3)) \log(3) + 6 \log(2)(14 \log(3) - 29) \right)$$

$$\chi_{7p} = - \left(-3 \left(-384\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 192\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 9 + \log(729) \right) + 12 \log(2) \left(455 + 16 \log\left(\frac{64}{27}\right) \right) - 3352 \log(3) \right)$$

$$\chi_{8t} = i \left(87\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 18\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 - \frac{5\pi^2}{2} - \left(161 + 12 \log\left(\frac{8}{3}\right) \right) \log(3) + 6 \log(2)(43 + \log(512)) \right)$$

$$\chi_{8p} = \left(3 \left(960\text{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right) - 576\text{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right) - 384\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 89 \right) + 192\pi^2 + 12(521 - 168 \log(2)) \log(2) + \left(288 \log\left(\frac{8}{3}\right) - 2011 \right) \log(9) \right)$$

$$\chi_{9t} = - \left(12\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 24\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) - 3 + 2\pi^2 - 72 \log^2(2) - \log(3)(13 + 36 \log(3)) + \log(2)(26 + 96 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{9p} = \left(144\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 288\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 57 + 24\pi^2 + 2592 \log^2(2) + 432 \log^2(3) + 322 \log(3) - 4 \log(2)(161 + 576 \log(3)) \right)$$

$$\chi_{10t} = \left(6 \left(5\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 10\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) + 2 \right) + 6\pi^2 + 36 \left(\log\left(\frac{16}{9}\right) - 11 \right) \log(2) + 7(34 - 3 \log(3)) \log(3) \right)$$

$$\chi_{10p} = (75 - 852 \log(2) + 490 \log(3))$$

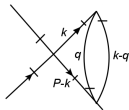
$$\chi_{11t} = - \left(-6\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 36\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 6 + 3\pi^2 + 108 \log^2(3) + 37 \log(9) - 4 \log(2) \left(37 + 234 \coth^{-1}(5) \right) \right)$$

$$\chi_{11p} = - \left(72\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 144\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 + 12\pi^2 + 4 \log(2)(-65 + 324 \log(2) - 288 \log(3)) + 65 \log(9) + 108 \log(3) \log(9) \right)$$

Метод вычисления

Метод основан на том факте, что пропагаторы могут быть все приведены к виду:

$$\begin{aligned} & A \frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^a} \exp \left[-\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2} b \right] \\ \xrightarrow{\text{Fourier}} & A \left(\frac{\pi}{b} \right)^{D/2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} + 1 - a)}{\left(\frac{p^2}{4b} - i\omega \right)^{\frac{D}{2} + 1 - a}}, \end{aligned} \quad (26)$$



Устойчивость в третьем порядке

Однако следующий порядок дает следующее выражения для собственных чисел:

$$\begin{aligned} &\epsilon + 0.68\epsilon^2 \\ &0.2\epsilon + 0.245739\epsilon^2 \\ &0.0230146\epsilon^2 - 0.0258336\epsilon^3 \end{aligned} \tag{27}$$

При $\epsilon = 1$ точка теряет свою устойчивость, однако известно, что подобные ряды являются асимптотическими. Их пересуммирование с учетом асимптотики высоких порядков для двухкомпонентной модели А дают следующие значения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.2116697531 \\ \omega_2 &= 1.078902843 \\ \omega_3 &= 0.003120033385 \end{aligned} \tag{28}$$

Редукция модели F к модели A

Статическое действие модели из которой строится модель F

$$S_{st} = \partial\psi^+\partial\psi + \frac{g_1(\psi^+\psi)^2}{6} + g_2m\psi^+\psi + \frac{m^2}{2} + \frac{w\rho v^2}{2}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} -S_{dyn} = & b_1\psi^{+'}\psi' - b_2m'\partial^2m' + b_3\partial_i v_j'\partial_i v_j' + b_4\partial_j v_j'\partial_i v_i' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ \\ & + a_3m'\partial_i v_i + a_4m'\partial^2m + a_5v_i'\partial^2v_i + a_6v_i'\partial_i\partial_j v_j + a_7v_i'\partial_i m - \psi^{+'}\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ \\ & - m'\partial_t m - v'\partial_t v + \psi^{+'}[-v_i\partial_i\psi + a_8\psi^+\psi\psi + a_9m\psi + a_{10}\psi v^2] \\ & + \psi'[-v_i\partial_i\psi^+ + a_{11}(\psi^+)^2\psi + a_{12}m\psi^+ + a_{13}\psi^+v^2] \\ & + m'[-m\partial_i v_i + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) + a_{15}\partial^2v^2 + a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+] \\ & + v_i'[-\partial_j(v_i v_j) + a_{18}(\partial_i\psi^+)\partial^2\psi + a_{19}\psi^+\psi^2\partial_i\psi^+ + a_{20}m\psi\partial_i\psi^+ \\ & + a_{21}(\partial_i\psi)\partial^2\psi^+ + a_{22}(\psi^+)^2\psi\partial_i\psi + a_{23}m\psi^+\partial_i\psi + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_i v^2] \end{aligned} \quad (30)$$

Размерный анализ показывает, что ИК несущественными являются коэффициенты в квадратичной части действия.

$$\begin{aligned} -S_{dyn,eff} = & b_1\psi^{+'}\psi' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ - \psi^{+'}\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ + \psi^{+'}[a_8\psi^+\psi^2 \\ & - a_9a_{24}(\psi^+\psi^2)/a_7] + \psi'[a_{11}(\psi^+)^2\psi - a_{12}a_{24}(\psi^+)^2\psi/a_7]. \end{aligned} \quad (31)$$

Спасибо за внимание!