

Особые вектора модулей Верма

Андрей Мудров

Центр Фундаментальной Математики МФТИ,

Август 12, 2022

,
SQS22, Дубна

,
Based on arXiv:2202.06220.

Setup

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$ простая комплексная алгебра Ли

Пусть $U = U(\mathfrak{g})$ ее универсальная обертывающая алгебра

с треугольным разложением $U \simeq U^- \otimes U^0 \otimes U^+$

где $U^\pm = U(\mathfrak{g}^\pm)$ и $U^0 = U(\mathfrak{h})$

Обозначим R ее корневую систему,

R^+ множество положительных корней,

Π базис простых положительных корней.

Вектор Вейля $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$

U -модули

Пусть V – U -модуль

Вектор $v \in V$ имеет вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ если

$$hv = \lambda(h)v, \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$

Весовой вектор v называется сингулярным (экстремальным, особым) если $\mathfrak{g}_+ v = 0$.

V называется модулем старшего веса λ если он порожден особым вектором веса λ .

Модуль ст.веса λ называется Верма если он свободно порожден над U^- старшим вектором, т.е. $U^- \simeq V_\lambda$.

Каждый модуль ст. в. есть фактор модуля Верма.

Каждый особый вектор есть старший вектор подмодуля ст. веса.

Проблема: явно описать особые вектора в V_λ

Гиперплоскость Каца-Каждана

$$\mathcal{P}_{\beta,m} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | (\lambda + \rho, \beta^\vee) = m\}, \quad \beta \in R^+, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \beta^\vee = \frac{2\beta}{(\beta, \beta)}$$

V_λ приводим *iff* $\lambda \in \cup_{\beta,m} \mathcal{P}_{\beta,m}$.

Пусть $\lambda \in \mathcal{P}_{\beta,m}$, тогда есть особый вектор $v_{\lambda-m\beta} \in V_\lambda$,

$$v_{\lambda-m\beta} = \theta_{\beta,m} v_\lambda, \quad \theta_{\beta,m} \in U^- \simeq V_\lambda.$$

Если $\beta \in \Pi$ (прост), то $\theta_{\beta,m} = f_\beta^m$ (где f_β -корневой вектор).

- ▶ Bernstein-Gelfand-Gelfand (1971) (сведение к произведению $\theta_{\beta,m}$)
- ▶ Malikov-Feigin-Fuchs (1986) (описание $\theta_{\beta,m}$ с пом. интерполяционной процедуры)
- ▶ Zhelobenko (1990) (факторизация $\theta_{\beta,m}$ в виде произведения $\theta_{\beta,1}$)
- ▶ Musson (2017) (факторизация для типов A,B,C,D)

Матрица Шаповалова

Пусть V_λ^* - "двойственный" модуль Верма младшего веса $-\lambda$.

V_λ^* порожден младшим вектором, v_λ^* , аннулируемым $\mathfrak{g}_-$.

Имеется единственное U -инвариантное спаривание

$V_\lambda \otimes V_\lambda^* \rightarrow \mathbb{C}$ т.ч. $(v_\lambda, v_\lambda^*) = 1$.

Мы называем это спаривание (инвариантной) формой Шаповалова (ФС)

ФС невырождена *iff* V_λ неприводим.

Обратная форма: инвариантное отображения (coevaluation)

$\mathbb{C} \rightarrow V_\lambda^* \otimes V_\lambda$.

$$\mathbb{C} \ni 1 \mapsto S \in U^+ \otimes U^- \simeq V_\lambda^* \otimes V_\lambda.$$

Для **вспомогательного** модуля V категории $\mathcal{O}$ с

$\pi: U \rightarrow \text{End}(V)$ определим матрицу Шаповалова

$$S = (\pi \otimes \text{id})(S) \in \text{End}(V) \otimes U^-$$

Зависимость от старшего веса

Для каждого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ положим $h_\mu \in \mathfrak{h}$ s.t. $\lambda(h_\mu) = (\lambda, \mu)$,
 $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Для каждого веса $\mu \in \Gamma_+ = \mathbb{Z}_+ \Pi$ положим

$$\eta_\mu = h_\mu + (\mu, \rho) - \frac{1}{2}(\mu, \mu) \in \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}. \quad (1)$$

Расширим U^0 до $\hat{U}^0$ дробями над мультипликативной системой
 $\langle \eta_\mu \rangle_{\mu \in \Gamma_+}$.

Расширим подалгебру Бореля $B^- = U^- U^0$ до $\hat{B}^- = U^- \hat{U}^0$.

$S = S(\lambda)$ - рациональная мат. функция старшего веса V_λ .

Можно рассматривать S как элемент из $\text{End}(V) \otimes \hat{B}^-$.

Диаграммы Хассе, связанные с представлениями

Пусть $\mathcal{C} = \sum_{\alpha \in R^+} e_\alpha \otimes f_\alpha$ - "полу-Казимир" без картановского члена

и $C = (\pi \otimes \text{id})(\mathcal{C}) \in \text{End}(V) \otimes U^-$.

Выберем весовой базис $\{v_i\}_{i \in I} \subset V$ с весами $\text{wt}(v_i) = \nu_i$

Матрица $C = (C_{sr})$ треугольна: $C_{sr} = 0$ только если $\nu_s - \nu_r \notin R^+ \subset \Gamma_+$.

Диаграмма Хассе $\mathfrak{H}(V)$ модуля V :

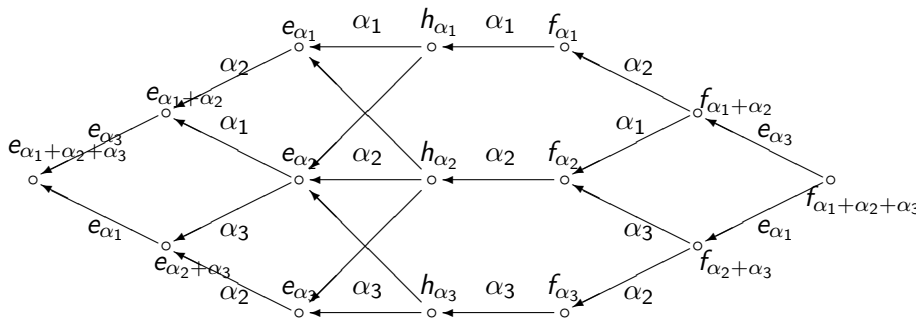
Узлы $\{v_i\}_{i \in I}$

Стрелки - простые корни $v_i \xleftarrow{\alpha} v_j$ если $\nu_i - \nu_j = \alpha$ и $C_{ij} \neq 0$.

Введем частичный порядок на $\{v_i\}_{i \in I}$, считая $v_i \succ v_j$ если существует путь $v_i \leftarrow \dots \leftarrow v_j$.

Пример $\mathfrak{H}(V)$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4), \quad V \simeq \mathfrak{g}$$



Элементы матрицы Шаповалова

Proposition. (A.M., 2016)

$$s_{ij}\eta_{\nu_i-\nu_j} = c_{ij} + \sum_{k \geq 1} \sum_{\nu_i \succ \nu_k \succ \dots \succ \nu_1 \succ \nu_j} c_{ik} \dots c_{1j} \frac{(-1)^k}{\eta_{\mu_k} \dots \eta_{\mu_1}} \in \hat{B}^-,$$

где $\mu_l = \nu_l - \nu_j \in \Gamma_+$, $l = 1, \dots, k$.

Обозначим через $\omega: U \rightarrow U$ инволюцию Шевалле,

ω идентична U^0 переставляет $\omega U^\pm = U^\mp$.

Симметричная билинейная форма на V называется контравариантной если

$$(xv, w) = (v, \omega(x)w), \quad x \in U, \quad v, w \in V.$$

Предположим, что она невырождена и определим матричный элемент

$$\langle v|w \rangle = (v, S_1 w) S_2 \in \hat{B}^-.$$

Специальные вспомогательные модули

Для простого корня $\alpha \in \Pi$

обозначим через ω_α его фундаментальный вес.

Предположим, что $(\omega_\alpha, \beta) \neq 0$.

Введем $\phi_\alpha = \phi_{\alpha,\beta} \propto \omega_\alpha$ s.t. $(\phi_\alpha, \beta^\vee) = 1$.

Обозначим через $W_{\alpha,\beta}$ неприводимый модуль ст. веса ϕ_α .

Обозначим через $v \in W_{\alpha,\beta}$ его старший вектор

Положим $w = f_\beta v \in W_{\alpha,\beta}$

Обозначим $\theta_\beta = \langle v | w \rangle \eta_\beta \in \hat{B}^-$

Факторизация элементов Шаповалова

Для $\nu \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через $\tau_\nu: U^0 \rightarrow U^0$ автоморфизм

$$(\tau_\nu F)(\lambda) = \varphi(\lambda + \nu), \quad \forall F \in U^0, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Theorem. (А.М., 2022)

1. θ_β является элементом Шаповалова $\theta_{\beta,1}$
2. Для всех $m \in \mathbb{N}$, $\theta_{\beta,m} = (\tau_{\phi_\alpha}^{m-1} \theta_\beta) \dots (\tau_{\phi_\alpha} \theta_\beta) \theta_\beta$,

Проблема: описание θ_β требует знания $\mathfrak{H}(V)$ и $C \in \text{End}(V) \otimes B^-$.

Равносильно, знания структуры U^+ -модуля на V .

Присоединенная диаграмма Хассе

Продолжим базис $U^+v_j \subset V$ до базиса V .

тогда $v_i \succeq v_j$ если и только если $v_i \in U^+v_j$.

Можно говорить о поддиаграммах Хассе $\mathfrak{H}(v_i, v_j) \subset \mathfrak{H}(V)$

(объединение всех путей $v_i \leftarrow \cdots \leftarrow v_j$). Выберем $V = \mathfrak{g}$ базис

корневых векторов и

$$h_\alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} h_\alpha \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \Pi$$

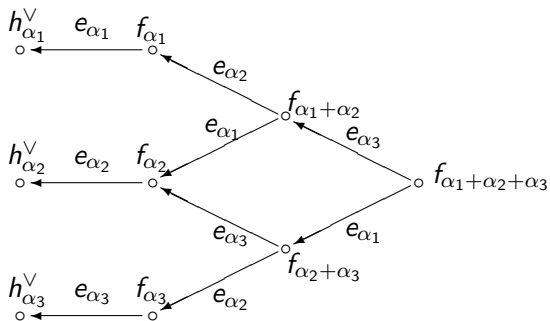
Рассмотрим под-диаграмму Хассе $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-) \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{g})$

Для каждого $\alpha \in \Pi$ и $\beta \in \mathbb{R}^+$ таких, что $(\omega_\alpha, \beta) \neq 0$,

рассмотрим $\mathfrak{H}(h_\alpha^\vee, f_\beta) \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$.

Пример $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4)$$



Хассе диаграмма вспомогательного модуля $W_{\alpha,\beta}$

Для $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \Pi$ такого что $(\beta, \omega_\alpha) \neq 0$

возьмем $v, w = f_\beta v \in W_{\alpha,\beta}$ как раньше.

Proposition.

Под-диаграмма Хассе

$\mathfrak{H}(v, w) \subset \mathfrak{H}(V)$ изоморфна $\mathfrak{H}(h_\alpha^\vee, f_\beta) \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$.

Изоморфизм задается $h_\alpha^\vee \mapsto v, f_\gamma \mapsto f_\gamma v,$

для $\alpha \succ \gamma \succ \beta$

Это также изоморфизм U^+ -модулей,

Элемент Шаповалова степени 1

Для $\nu, \gamma \in \mathbb{R}^+$, обозначим

$$C_{\nu, \gamma} = \begin{cases} 0, & \gamma - \nu \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (\gamma, \phi_\alpha), & \gamma = \nu, \\ c, & \text{where } [e_\nu, f_\gamma] = cf_{\gamma-\nu}, \quad \gamma - \nu \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Тогда

$$\theta_\beta = C_{\beta, \beta} f_\beta + \sum_{k \geq 1} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_{k+1} = \beta} (C_{\nu_{k+1}, \gamma_k} \dots C_{\nu_1, \gamma_0}) (f_{\nu_{k+1}} \dots f_{\nu_1}) \frac{(-1)^k}{\eta_{\mu_k} \dots \eta_{\mu_1}}$$

Здесь $\mu_i = \nu_1 + \dots + \nu_i$ и корни $\nu_i \in \mathbb{R}^+$, $i > 0$, удовлетворяют условиям

- ▶ $\gamma_i \succeq \alpha$, где
- ▶ $\gamma_0 = \beta$, $\gamma_i = \gamma_{i-1} - \nu_i \in \mathbb{R}^+$ for $i = 1, \dots, k$.