

# Радиационные поправки для экспериментов на лептонных коллайдерах с поляризованными пучками

Диссертация по специальности 01.04.02 – "Теоретическая физика"

Ермольчик Виталий Леонидович  
Научный сотрудник ЛЯП ОИЯИ  
НЭОВП, Сектор №1

Научный руководитель:

Садыков Ренат Рафаилович,  
с.н.с. НЭОВП ЛЯП ОИЯИ, к.ф.-м.н.

# Содержание

- Введение
- Глава 1. Рассеяние  $\mu^\pm e^- \rightarrow e^- \mu^\pm$
- Глава 2. Рассеяние  $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$  и  $\mu^+ \mu^+ \rightarrow \mu^+ \mu^+$
- Глава 3. Поправки высших поправок для  $e^+ e^- \rightarrow HZ$
- Глава 4. Монте-Карло генератор событий ReneSANCe
- Заключение

## Введение

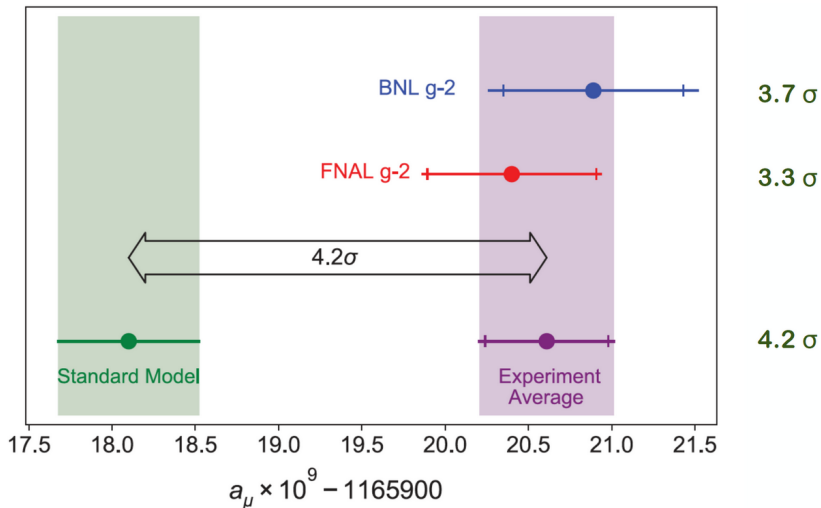
# SANC – Support for Analytic and Numeric Calculations for experiments at colliders

- $e^+e^-$  – FCC, CEPC, ILC, CLIC, Super c-tau
- $e^-e^-$
- $\mu\mu$  –  $\mu$ TRISTAN
- $e\mu$  – MUonE,  $\mu$ TRISTAN
- $e\gamma$
- $\gamma\gamma$

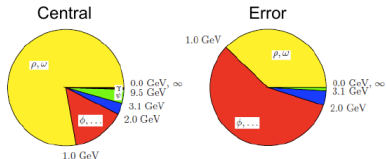
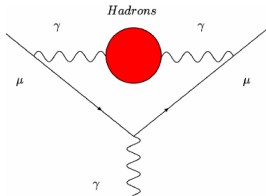
- $pp$  – LHC
- $p\bar{p}$

- $ep$

# Проблема g-2 MUonE collaboration



# Эксперимент MUonE M.Passera LFC17 Trento



F. Jegerlehner and A. Nyffeler, Phys. Rept. 477 (2009) 1

$$K(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)(s/m^2)}$$

$$a_\mu^{\text{HLO}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^\infty ds K(s) \sigma^{(0)}(s) = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^\infty \frac{ds}{s} K(s) R(s)$$

$$a_\mu^{\text{HLO}} = 6870 (42)_{\text{tot}} \times 10^{-11}$$

F. Jegerlehner, arXiv:1511.04473 (includes BESIII 2π)

$$= 6926 (33)_{\text{tot}} \times 10^{-11}$$

M. Davier, arXiv:1612.02743

$$= 6949 (37)_{\text{exp}} (21)_{\text{rad}} \times 10^{-11}$$

Hagiwara et al, JPG 38 (2011) 085003

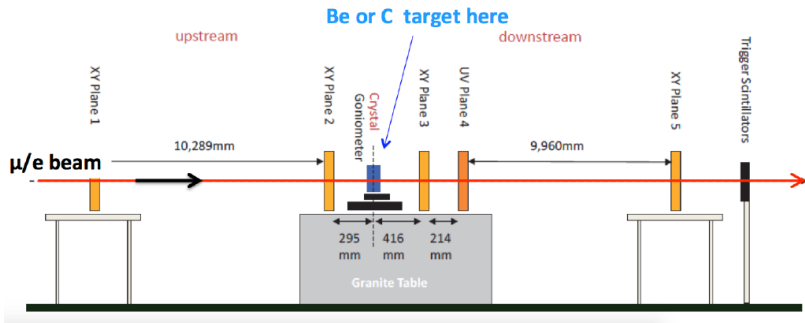
☪ **Radiative Corrections are crucial.** S. Actis et al, Eur. Phys. J. C66 (2010) 585

☪ **Lots of progress in lattice calculations.** FNAL - Muon  $\alpha-2$  workshop - June 2017  
Capri - FCCP 2017 workshop - Sep 2017

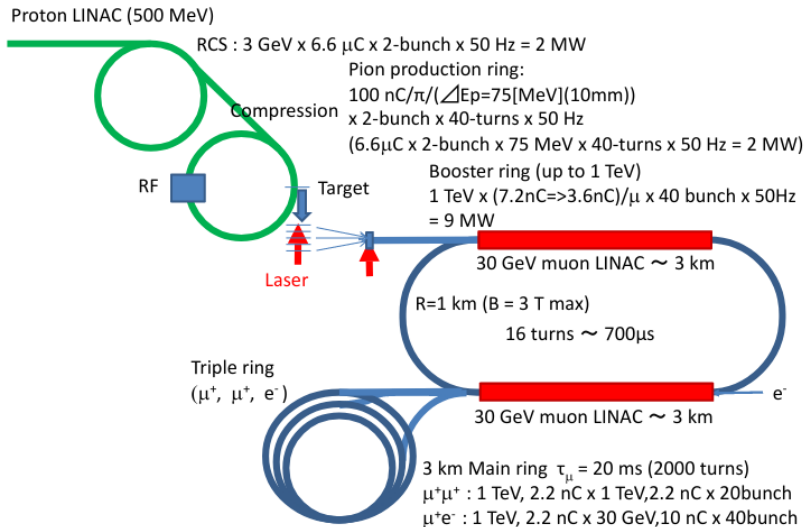
## Test Beam

Check Geant4 MSC prediction and populate the 2D ( $\theta_e$ ,  $\theta_\mu$ ) scattering plane

- 27 Sep-3 October 2017 allocated at CERN in "H8 Beam Line"
- 5 Si strips planes: 2 before (upstream) and 3 after the target
- Max rate 10 kHz
- Beam energy in the range 90 - 190 GeV

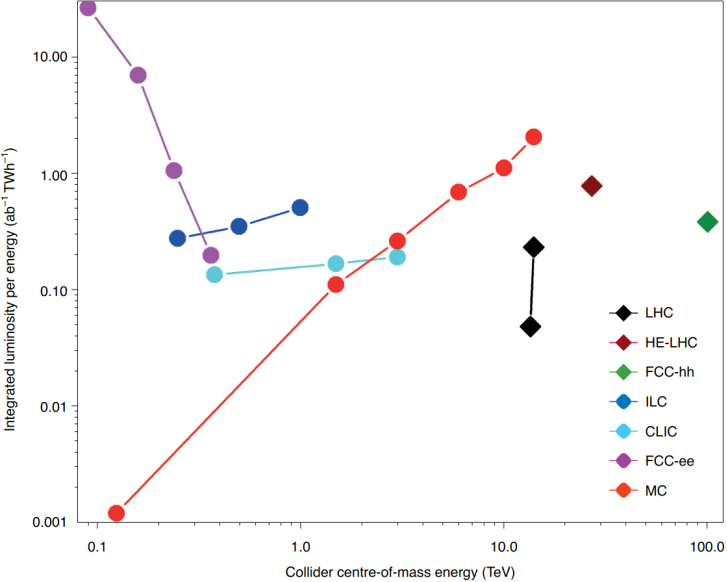


# Мюонные коллайдеры: $\mu$ TRISTAN [\[arXiv:2201.06664\]](https://arxiv.org/abs/2201.06664)





# Мюонные коллайдеры [Nature 17, 289-292]



# Сечение на однопетлевом уровне

Сечение на однопетлевом уровне может быть разделено на четыре части:

$$\sigma^{1\text{-loop}} = \sigma^{\text{Born}} + \sigma^{\text{virt}}(\lambda) + \sigma^{\text{soft}}(\lambda, \omega) + \sigma^{\text{hard}}(\omega),$$

где

$\sigma^{\text{Born}}$  — борновское сечение,

$\sigma^{\text{virt}}$  — виртуальные (петлевые) поправки,

$\sigma^{\text{soft}}$  — излучение мягких фотонов,

$\sigma^{\text{hard}}$  — излучение жестких фотонов (с энергией  $E_\gamma > \omega$ ).

Вспомогательные параметры  $\lambda$  ("масса фотона") и  $\omega$  (разделитель между мягкими и жесткими фотонами) сокращаются после суммирования.

# Метод спиральных амплитуд

Для всех вкладов мы используем метод спиральных амплитуд. Это дает нам возможность описывать:

- любую начальную (не только продольную) поляризацию
- поляризация конечных состояний
- спиновые корреляции, передачу поляризации от начального к конечному состоянию

# Квадрат матричного элемента

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 = & L_{e^-}'' R_{e^+}'' |\mathcal{H}_{-+}|^2 + R_{e^-}'' L_{e^+}'' |\mathcal{H}_{+-}|^2 + L_{e^-}'' L_{e^+}'' |\mathcal{H}_{--}|^2 + R_{e^-}'' R_{e^+}'' |\mathcal{H}_{++}|^2 \\
 & - \frac{1}{2} P_{e^-}^\perp P_{e^+}^\perp \operatorname{Re} \left[ e^{i(\Phi_+ - \Phi_-)} \mathcal{H}_{++} \mathcal{H}_{--}^* + e^{i(\Phi_+ + \Phi_-)} \mathcal{H}_{+-} \mathcal{H}_{-+}^* \right] \\
 & + P_{e^-}^\perp \operatorname{Re} \left[ e^{i\Phi_-} \left( L_{e^+}'' \mathcal{H}_{+-} \mathcal{H}_{--}^* + R_{e^+}'' \mathcal{H}_{++} \mathcal{H}_{-+}^* \right) \right] \\
 & - P_{e^+}^\perp \operatorname{Re} \left[ e^{i\Phi_+} \left( L_{e^-}'' \mathcal{H}_{-+} \mathcal{H}_{--}^* + R_{e^-}'' \mathcal{H}_{++} \mathcal{H}_{+-}^* \right) \right],
 \end{aligned}$$

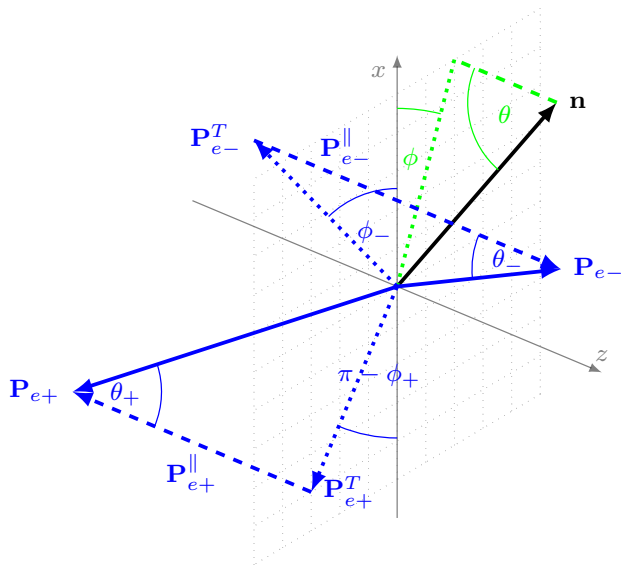
где

$$L_{e^\pm}'' = \frac{1}{2}(1 - P_{e^\pm}''), \quad R_{e^\pm}'' = \frac{1}{2}(1 + P_{e^\pm}''), \quad \Phi_\pm = \phi_\pm - \phi,$$

$\mathcal{H}_{--}, \mathcal{H}_{++}, \mathcal{H}_{-+}, \mathcal{H}_{+-}$  — спиральные амплитуды.

Moortgat-Pick, G. et al. Phys.Rept. 460 (2008) 131-243

# Разложение поляризационных векторов $e^{\pm}$



## Реализация расчетов

Расчеты проводились с использованием SANC-фреймворка в системе FORM. Для оптимизации интенсивно использовалась факторизация, появившаяся в FORM4 и вынесение общих подвыражений во временные переменные.

Результат расчета был автоматически преобразован в программные модули на языке Фортран со стандартным интерфейсом SANC. Эти модули с результатами физических расчетов могут быть использованы в любом коде, который понимает интерфейс SANC.

# LQD базис для четырехфермионных процессов

$$A_{\gamma}^{\text{IBA}} = i \frac{4\pi Q_e Q_f}{s} \alpha(s) \gamma_{\mu} \otimes \gamma_{\mu},$$

$$A_Z^{\text{IBA}} = i e^2 \frac{\chi_Z(s)}{s}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & I_e^{(3)} I_f^{(3)} \gamma_{\mu} \gamma_{+} \otimes \gamma_{\mu} \gamma_{+} F_{LL}(s, t) + \delta_e I_f^{(3)} \gamma_{\mu} \otimes \gamma_{\mu} \gamma_{+} F_{QL}(s, t) \\ & + I_e^{(3)} \delta_f \gamma_{\mu} \gamma_{+} \otimes \gamma_{\mu} F_{LQ}(s, t) + \delta_e \delta_f \gamma_{\mu} \otimes \gamma_{\mu} F_{QQ}(s, t) \\ & + I_e^{(3)} I_f^{(3)} \gamma_{\mu} \gamma_{+} \otimes (-im_f D_{\mu}) F_{LD}(s, t) + \delta_e I_f^{(3)} \gamma_{\mu} \otimes (-im_f D_{\mu}) F_{QD}(s, t) \\ & + I_e^{(3)} I_f^{(3)} (-im_e D_{\mu}) \otimes \gamma_{\mu} \gamma_{+} F_{DL}(s, t) + I_e^{(3)} \delta_f (-im_e D_{\mu}) \otimes \gamma_{\mu} F_{DQ}(s, t) \\ & + I_e^{(3)} I_f^{(3)} (-im_e D_{\mu}) \otimes (-im_f D_{\mu}) F_{DD}(s, t) \end{aligned} \right\}.$$

# Схема расчетов FF

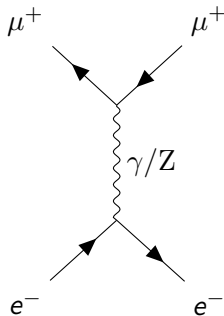
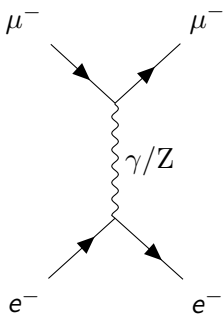
Вычисления организованы таким образом, чтобы контролировать согласованность результата.

- Все вычисления однопетлевым на уровне точности проводятся в  $R_\xi$  калибровке с тремя калибровочными параметрами:  $\xi_A$ ,  $\xi_Z$  и  $\xi \equiv \xi_W$
- Для параметризации ультрафиолетовых расходимостей используется размерная регуляризация
- Петлевые интегралы выражаются в терминах стандартных скалярных функций Пассарино-Вельтмана:  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$

Эти особенности позволяют провести несколько важных проверок на уровне аналитических выражений, например, проверить калибровочную инвариантность путем устранения зависимость от калибровочного параметра, проверяя сокращение ультрафиолетовых полюсов, а также различные свойства симметрии и тождества Уорда.



## Глава 1. Рассеяние $\mu^\pm e^- \rightarrow e^- \mu^\pm$



# Спиральные амплитуды для $\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mp\mp\mp\mp} &= \frac{1}{t} \left\{ s^- (2 - c_+ r_s) \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- \left( -2c_+ r_s \tilde{F}_{LL} + (2 - c_+ r_s) (\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL}) - 2m_\mu^2 c_- (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD}) \right) \right. \\ &\left. \left. \pm \sqrt{\lambda_{\mu e}} \left( -2c_+ r_s \tilde{F}_{LL} + (2 - c_+ r_s) \tilde{F}_{LQ} - (2 + c_+ r_s) \tilde{F}_{QL} - 2c_- m_\mu^2 \tilde{F}_{LD} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mp--\pm} &= \sin \vartheta_e \frac{m_\mu}{\sqrt{st}} \left\{ s^- \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- \left( 2\tilde{F}_{LL} + \tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - s^+ (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD}) \right) \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\lambda_{\mu e}} \left( 2\tilde{F}_{LL} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - s^+ \tilde{F}_{LD} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mp++\pm} &= -\sin \vartheta_e \frac{m_\mu}{\sqrt{st}} \left\{ s^- \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- \left( 2\tilde{F}_{LL} + \tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - s^+ (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD}) \right) \right. \\ &\left. \left. - \sqrt{\lambda_{\mu e}} \left( 2\tilde{F}_{LL} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - s^+ \tilde{F}_{LD} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mp\pm\pm\mp} &= -\frac{c_-}{t} \left\{ s^- \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- \left( 2\tilde{F}_{LL} + \tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - 2m_\mu^2 (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD}) \right) \right. \\ &\left. \left. \mp \sqrt{\lambda_{\mu e}} \left( 2\tilde{F}_{LL} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - 2m_\mu^2 \tilde{F}_{LD} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

# Спиральные амплитуды для $\mu^- e^- \rightarrow e^- \mu^-$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\pm\pm\pm\pm} &= -\frac{1}{t} \left\{ s^- (2 - c_+ r_s) \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- (4\tilde{F}_{LL} + (2 - c_+ r_s)(\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL}) - 2m_\mu^2 c_- (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD})) \right. \\ &\mp \left. \left. \sqrt{\lambda_{\mu e}} (4(\tilde{F}_{QL} + \tilde{F}_{LL}) + (2 - c_+ r_s)(\tilde{F}_{LQ} - \tilde{F}_{QL}) - 2m_\mu^2 c_- \tilde{F}_{LD}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-\pm\pm\pm} &= -\sin \vartheta_e \frac{m_\mu}{t\sqrt{s}} \left\{ s^- \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- (\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - s^+ (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD})) \right. \\ &\mp \left. \left. \sqrt{\lambda_{\mu e}} (\tilde{F}_{LQ} - \tilde{F}_{QL} - s^+ \tilde{F}_{LD}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{+\pm\pm-} &= \sin \vartheta_e \frac{m_\mu}{t\sqrt{s}} \left\{ s^- \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left( s^- [\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - s^+ (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD})] \right. \\ &\mp \left. \left. \sqrt{\lambda_{\mu e}} (\tilde{F}_{LQ} - \tilde{F}_{QL} - s^+ \tilde{F}_{LD}) \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\pm\mp\mp\pm} &= -\frac{c_-}{t} \left\{ s^- \tilde{F}_\gamma \right. \\ &+ \chi_Z(t) \left[ s^- (\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} - 2m_\mu^2 (\tilde{F}_{LD} + \tilde{F}_{QD})) \right. \\ &\pm \left. \left. \sqrt{\lambda_{\mu e}} (\tilde{F}_{LQ} - \tilde{F}_{QL} - 2m_\mu^2 \tilde{F}_{LD}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Использовались следующие сокращения:

$$\lambda_{\mu e} = \lambda(s, m_\mu^2, m_e^2)$$

$$s^- = s - m_\mu^2, \quad s^+ = s + m_\mu^2,$$

$\chi_Z(t)$  – отношение пропагаторов  $\gamma/Z$

Для обоих каналов остальные шесть СА выражаются через

вышеуказанные следующим образом:  $\mathcal{H}_{----+} = \mathcal{H}_{+----}$ ,

$\mathcal{H}_{---++} = \mathcal{H}_{++---}$ ,  $\mathcal{H}_{-+--} = \mathcal{H}_{--+-}$ ,  $\mathcal{H}_{-++-} = \mathcal{H}_{+-+-}$ ,

$\mathcal{H}_{-+++} = \mathcal{H}_{+++--}$ ,  $\mathcal{H}_{+-++} = \mathcal{H}_{+++-}$ .

# Излучение мягких фотонов

$$\sigma^{\text{soft}, \mu - \text{leg}} = -Q_\mu^2 \frac{\alpha}{\pi} \sigma^{\text{Born}} \left\{ \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) + \frac{s + m_\mu^2}{s - m_\mu^2} \ln(r_s) - \frac{1 + 2r_t}{\sqrt{1 + 4r_t}} \left[ \ln(a_{14}) \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{14} x_\mu}{v_{14}} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{x_\mu}{v_{14}} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{14}}{v_{14} x_\mu} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{v_{14} x_\mu} \right) \right] \right\},$$

$$\sigma^{\text{soft}, \text{if}} = -Q_e Q_\mu \frac{\alpha}{\pi} \sigma^{\text{Born}} \left\{ 2 \ln(x_\mu x_e) \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) + \text{Li}_2(1 - x_\mu^2) + \text{Li}_2(1 - x_e^2) \right. \\ \left. - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{x_\mu^2} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{x_e^2} \right) - \ln(a_{13}) \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) \right. \\ \left. - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{13} x_\mu}{v_{13}} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{x_e}{v_{13}} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{13}}{v_{13} x_\mu} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{v_{13} x_e} \right) \right. \\ \left. - \ln(a_{24}) \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{24} x_e}{v_{24}} \right) \right. \\ \left. + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{x_\mu}{v_{24}} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{24}}{v_{24} x_e} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{v_{24} x_\mu} \right) \right\},$$

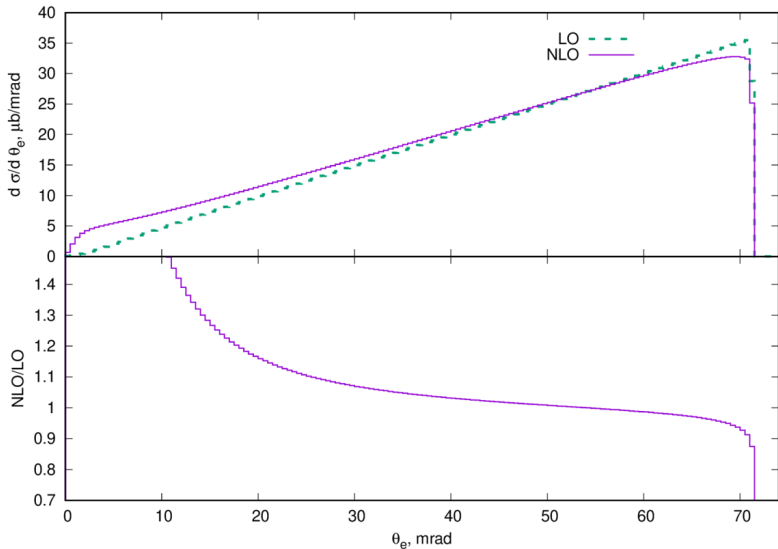
$$\sigma^{\text{soft}, e - \text{leg}} = -Q_e^2 \frac{\alpha}{\pi} \sigma^{\text{Born}} \left\{ \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) + \ln \left( \frac{m_e^2}{s(1 - r_s^2)} \right) - \ln(a_{23}) \ln \left( \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \right) \right. \\ \left. - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{23} x_e}{v_{23}} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{x_e}{v_{23}} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{a_{23}}{v_{23} x_e} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{v_{23} x_e} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
x_\mu &= \frac{\sqrt{s}}{m_\mu}, & x_e &= \frac{\sqrt{s}}{m_e} (1 - r_s), \\
a_{14} &= \frac{1}{2m_\mu^2} \left( 2m_\mu^2 + t + \sqrt{t^2 + 4m_\mu^2 t} \right), & v_{14} &= \frac{m_\mu}{\sqrt{s}(1 + r_s)} (a_{14} + 1), \\
a_{23} &= \frac{t}{m_e^2}, & v_{23} &= \frac{m_e}{\sqrt{s}(1 - r_s)} (a_{23} + 1), \\
a_{13} &= \frac{(u + m_\mu^2)}{m_e m_\mu}, & v_{13} &= \frac{a_{13}^2}{\sqrt{s} (a_{13}(1 + r_s)/m_\mu - (1 - r_s)/m_e)}, \\
a_{24} &= a_{13}, & v_{24} &= \frac{a_{24}^2}{\sqrt{s} (a_{24}(1 - r_s)/m_e - (1 + r_s)/m_\mu)}, \\
r_l &= \frac{m_\mu^2}{l}, & l &= s, t.
\end{aligned}$$

- Пучок мюонов с энергией 150 ГэВ и поляризацией до 80%.
- Покоящаяся электронная мишень, неполяризованная.
- Минимальная энергия наблюдаемого электрона – 1 ГэВ (0.2 ГэВ).

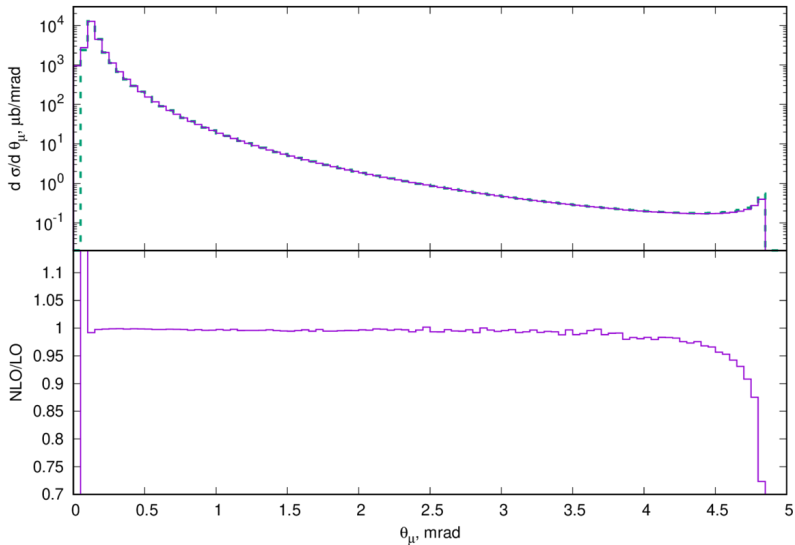
Требуемая точность –  $10^{-5}$  и выше!

$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+ (\gamma), \text{ d}\sigma/\text{d}\vartheta_{e^-}, \text{ MUonE}$$

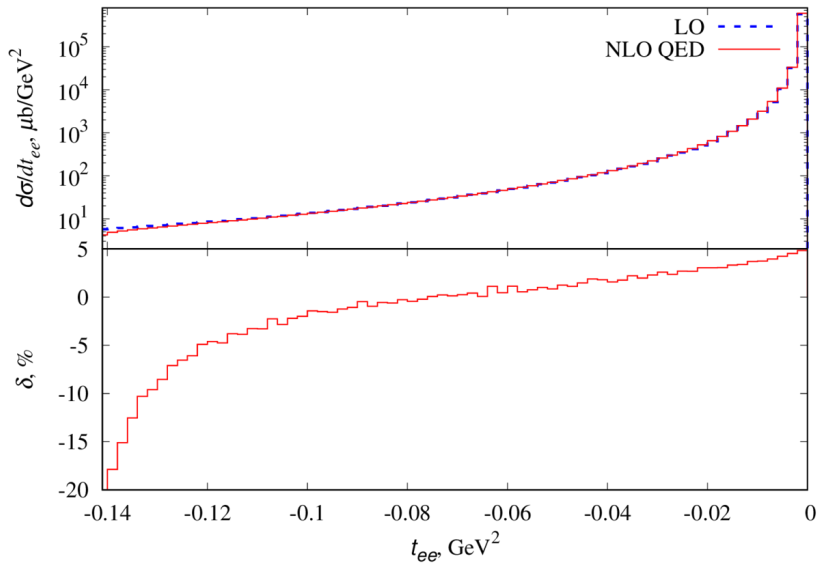




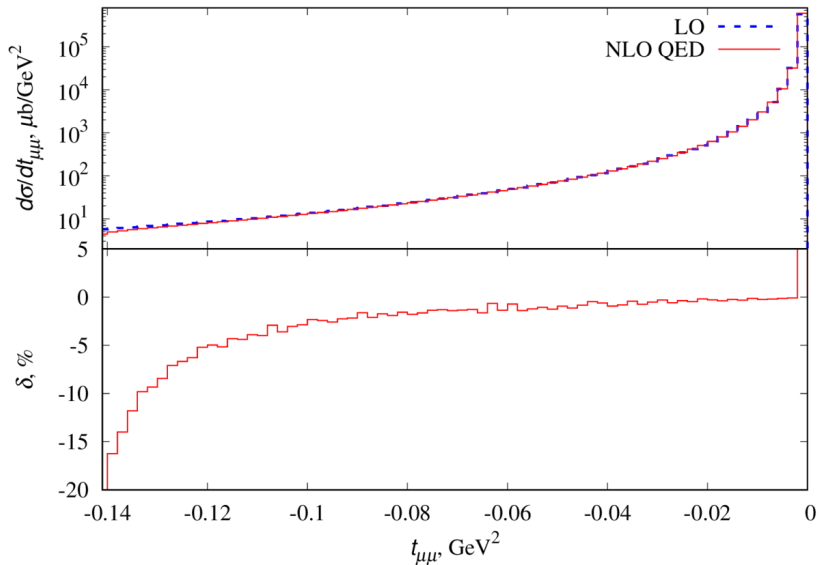
$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+ (\gamma), \text{ d}\sigma/\text{d}\vartheta_{\mu^+}, \text{ MUonE}$$



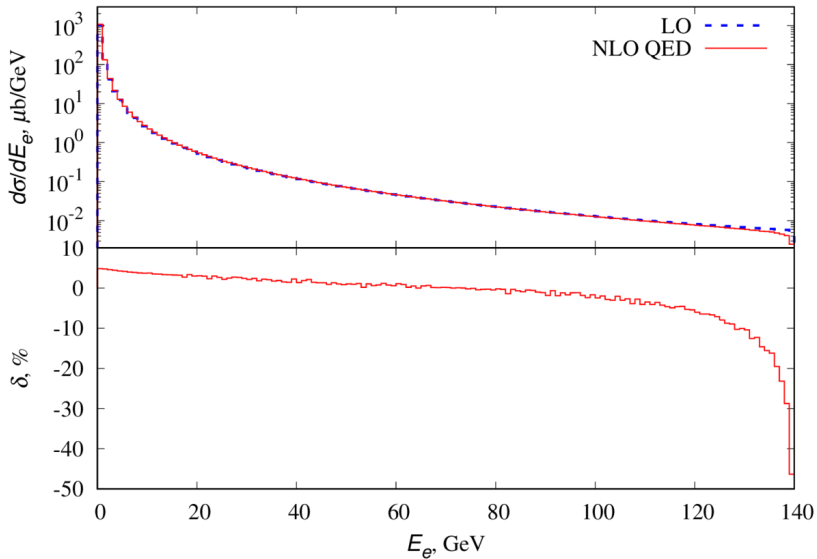
$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+(\gamma), d\sigma/dt_{ee}, \text{ MUonE}$$



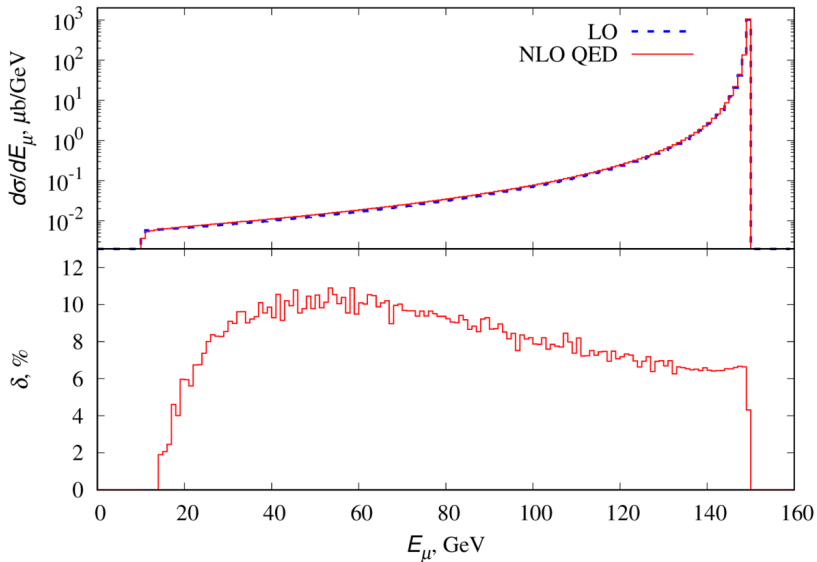
$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+(\gamma), \text{ d}\sigma/\text{d}t_{\mu\mu}, \text{ MUonE}$$



$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+(\gamma), \text{ d}\sigma/\text{d}E_{e^-}, \text{ MUonE}$$



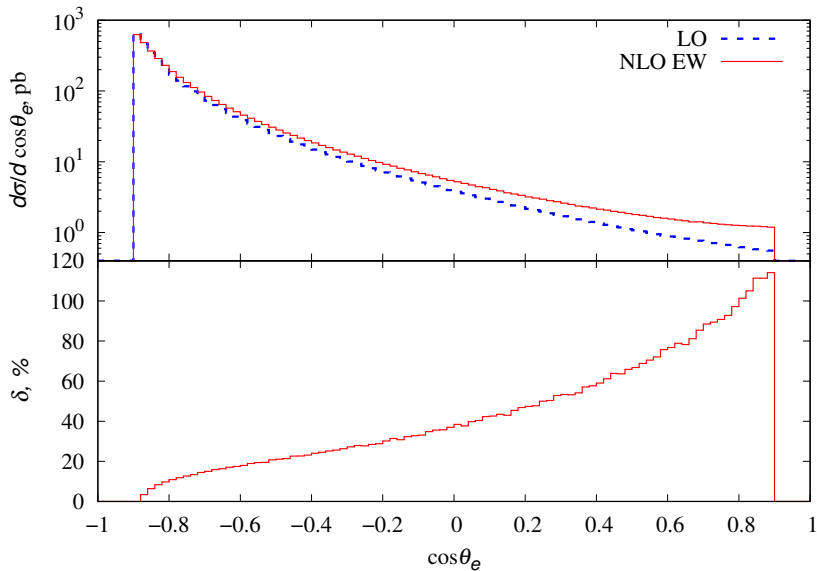
$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+(\gamma)$ ,  $d\sigma/dE_{\mu^+}$ , MUonE



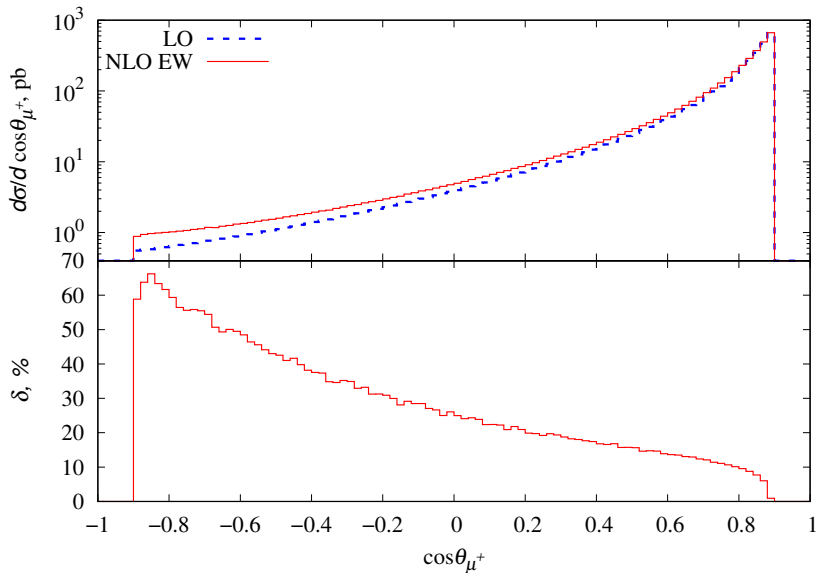
# $\mu$ TRISTAN

- Пучок мюонов с энергией до 1000 ГэВ и поляризацией до 80%.
- Пучок электронов с энергией 30 ГэВ и поляризацией до 70%.

$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+ (\gamma)$ ,  $d\sigma/d \cos \vartheta_{e^-}$ ,  $\mu$ TRISTAN



$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+ (\gamma)$ ,  $d\sigma/d\cos\vartheta_{\mu^+}$ ,  $\mu$ TRISTAN





# Поправки высших порядков



- Ведущее логарифмическое приближение (ВЛП) (в формализме КЭД структурных функций).
- Поправки к  $\Delta\alpha$ .
- Ливень с матчингом.
- Поправки к  $\Delta\rho$ .
- Лидирующие судаковские логарифмы.

# Поправки высших порядков, слабые

## Электрослабый параметр $\rho$

определяет относительную силу заряженного и нейтрального токов

$$\rho = \frac{G_{NC}(0)}{G_{CC}(0)} = \frac{1}{1 - \Delta\rho}.$$

На двухпетлевом уровне величина  $\Delta\rho$  содержит два вклада:

$$\Delta\rho = N_c x_t \left[ 1 + \rho^{(2)} \left( M_H^2 / m_t^2 \right) x_t \right] \left[ 1 - \frac{2\alpha_s(M_Z^2)}{9\pi} (\pi^2 + 3) \right],$$

где  $x_t = \frac{\sqrt{2}G_F m_t^2}{16\pi^2}$ .

# Поправки высших порядков, слабые

$\mathcal{O}(\alpha)$

A. Sirlin, PRD22, (1980) 971, W.J. Marciano, A. Sirlin, PRD22 (1980) 2695; G. Degrassi, A. Sirlin, NPB352 (1991) 352, P. Gambino and A. Sirlin, PRD49 (1994) 1160

$\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$

A. Djouadi, C. Verzegnassi, PLB195 (1987) 265; B. Kiehl, NPB353 (1991) 567; B. Kniehl, A. Sirlin, NPB371 (1992) 141, PRD47 (1993) 883; A. Djouadi, P. Gambino, PRD49 (1994) 3499

$\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$

L. Avdeev et al., PLB336 (1994) 560; K.G. Chetyrkin, J.H. Kuhn, M. Steinhauser, PLB351 (1995) 331; PRL75 (1995) 3394; NPB482 (1996)

$\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^3)$

Y. Schroder, M. Steinhauser, PLB622 (2005) 124; K.G. Chetyrkin et al., hep-ph/0605201; R. Boughezal, M. Czakon, hep-ph/0606232

$\mathcal{O}(\alpha^2)$

G. Degrassi, P. Gambino, A. Sirlin, PLB394 (1997) 188; M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas, JHEP0611 (2006) 048

# Поправки высших порядков

Поправки высших порядков добавленные через параметр  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\rho$ :

$$\alpha(0) \rightarrow \alpha(t) = \alpha(0)[1 + \Delta\alpha(t) + \Delta\alpha(t)^2],$$

$$s_W^2 \rightarrow \bar{s}_W^2 \equiv s_W^2(1 + \frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho) \quad c_W^2 \rightarrow \bar{c}_W^2 \equiv 1 - \bar{s}_W^2 = (1 - \Delta\rho) c_W^2$$

## Схема $\alpha(0)$

$$\tilde{F}_\gamma \rightarrow 1 + \Delta\alpha(t) + \Delta\alpha(t)^2,$$

$$\tilde{F}_{LL} \rightarrow (1 + \Delta\alpha(t) + \Delta\alpha(t)^2)(1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2)(1 - \frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho + \frac{c_W^4}{s_W^4}\Delta\rho^2),$$

$$\tilde{F}_{LQ} \rightarrow (1 + \Delta\alpha(t) + \Delta\alpha(t)^2)(1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2),$$

$$\tilde{F}_{QL} \rightarrow (1 + \Delta\alpha(t) + \Delta\alpha(t)^2)(1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2),$$

$$\tilde{F}_{QQ} \rightarrow (1 + \Delta\alpha(t) + \Delta\alpha(t)^2)(1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2)(1 + \frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho).$$

# Поправки высших порядков

## Схема $G_\mu$

$$\tilde{F}_\gamma \rightarrow 1 + \frac{c_W^2}{s_W^2} \Delta\rho,$$

$$\tilde{F}_{LL} \rightarrow 1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2,$$

$$\tilde{F}_{LQ} \rightarrow (1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2) \left(1 + \frac{c_W^2}{s_W^2} \Delta\rho\right),$$

$$\tilde{F}_{QL} \rightarrow (1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2) \left(1 + \frac{c_W^2}{s_W^2} \Delta\rho\right),$$

$$\tilde{F}_{QQ} \rightarrow (1 + \Delta\rho + \Delta\rho^2) \left(1 + \frac{c_W^2}{s_W^2} \Delta\rho\right)^2.$$

Для избежания двойного счета, необходимо удалить вклады, присутствующий в однопетлевом электрослабом результате:

$$\Delta\rho \rightarrow \left( \Delta\rho - \Delta\rho^{(1)} \Big|_{\alpha^{(0)}} \right) \text{ и } \Delta\alpha(t) \rightarrow 0.$$

$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+(\gamma)$$

## сечение в условиях MUnE, влияние поправок высших порядков

$P_{\mu^+}, P_{e^-}$	0, 0	-1, -1	-1, +1	+1, -1	+1, +1
$\sigma^{\text{Born}}, \mu\text{b}$	1265.1(1)	1275.3(1)	1254.8(1)	1254.8(1)	1275.3(1)
$\delta^{\text{QED}}, \%$	4.762(1)	4.766(1)	4.757(1)	4.759(1)	4.765(1)
$\delta^{\text{VP}}, \%$	0.940(1)	0.943(1)	0.936(1)	0.936(1)	0.943(1)
$\delta^{\text{ho}}(\Delta\alpha^2), \%$	0.006(1)	0.006(1)	0.006(1)	0.006(1)	0.006(1)

$$\mu^- e^- \rightarrow e^- \mu^- (\gamma)$$

## сечение в условиях MUnE, влияние поправок высших порядков

$P_{\mu^-}, P_{e^-}$	0, 0	-1, -1	-1, +1	+1, -1	+1, +1
$\sigma^{\text{Born}}, \mu\text{b}$	1265.1(1)	1275.3(1)	1254.8(1)	1254.8(1)	1275.3(1)
$\delta^{\text{QED}}, \%$	4.624(1)	4.608(1)	4.640(1)	4.639(1)	4.608(1)
$\delta^{\text{VP}}, \%$	0.940(1)	0.940(1)	0.940(1)	0.940(1)	0.940(1)
$\delta^{\text{ho}}(\Delta\alpha^2), \%$	0.006(1)	0.006(1)	0.006(1)	0.006(1)	0.006(1)

$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+ (\gamma)$$

**сечение при  $\sqrt{s} = 250$  ГэВ, угловые обрезания:  
 $\cos \vartheta_{e^-}$  и  $\cos \vartheta_{\mu^+}$  в интервале  $[-0.9, 0.9]$**

$P_{\mu^+}, P_{e^-}$	0,0	-1,-1	-1,+1	+1,-1	+1,+1
$\alpha(0)$ EW scheme					
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	66.487(1)	55.333(1)	73.186(1)	82.097(1)	55.333(1)
$\delta^{\text{QED}}$ , %	-1.936(1)	-0.481(1)	-2.933(1)	-3.013(1)	-0.482(1)
$\delta^{\text{VP}}$ , %	11.466(1)	13.729(2)	10.151(1)	9.586(1)	13.729(2)
$\delta^{\text{weak-VP}}$ , %	-0.396(1)	-1.758(1)	2.297(1)	-0.962(1)	-1.758(1)
$\delta^{\text{ho}}$ , %	1.032(1)	0.929(1)	0.895(1)	1.295(1)	0.929(1)
$G_\mu$ EW scheme					
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	71.458(1)	59.470(1)	78.658(1)	88.234(1)	59.470(1)
$\delta^{\text{QED}}$ , %	-1.935(2)	-0.481(2)	-2.930(2)	-3.007(2)	-0.482(2)
$\delta^{\text{VP}}$ , %	5.568(1)	6.705(1)	4.899(1)	4.630(1)	6.705(2)
$\delta^{\text{weak-VP}}$ , %	-0.391(1)	-0.626(1)	1.656(1)	-1.891(1)	-0.626(1)
$\delta^{\text{ho}}$ , %	-0.456(1)	-0.512(1)	-0.520(1)	-0.322(1)	-0.512(1)



$$\mu^- e^- \rightarrow e^- \mu^- (\gamma)$$

**сечение при  $\sqrt{s} = 250$  ГэВ, угловые обрезания:  
 $\cos \vartheta_{e^-}$  и  $\cos \vartheta_{\mu^+}$  в интервале  $[-0.9, 0.9]$**

$P_{\mu^+}, P_{e^-}$	0,0	-1,-1	-1,+1	+1,-1	+1,+1
$\alpha(0)$ EW scheme					
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	75.231(1)	115.076(1)	42.157(1)	42.157(1)	101.538(1)
$\delta^{\text{QED}}$ , %	-2.085(1)	-1.912(1)	-2.682(1)	-2.683(1)	-1.781(1)
$\delta^{\text{VP}}$ , %	10.849(1)	9.602(1)	13.305(1)	13.305(1)	10.220(1)
$\delta^{\text{weak-VP}}$ , %	-0.161(1)	-1.476(1)	-1.540(1)	-1.540(1)	2.474(1)
$\delta^{\text{ho}}$ , %	1.089(1)	1.365(1)	0.907(1)	0.907(1)	0.926(1)
$G_\mu$ EW scheme					
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	80.855(1)	123.679(1)	45.309(1)	45.309(1)	109.128(1)
$\delta^{\text{QED}}$ , %	-2.082(2)	-1.911(1)	-2.685(2)	-2.685(2)	-1.780(1)
$\delta^{\text{VP}}$ , %	5.295(1)	4.729(1)	6.393(1)	6.393(1)	5.027(1)
$\delta^{\text{weak-VP}}$ , %	-0.501(1)	-2.495(1)	-0.519(1)	-0.519(1)	1.775(1)
$\delta^{\text{ho}}$ , %	-0.436(1)	-0.306(1)	-0.511(1)	-0.511(1)	-0.522(1)

$$\mu^+ e^- \rightarrow e^- \mu^+ (\gamma)$$

сечение при  $\sqrt{s} = 250$  ГэВ, влияние поправок  
 высших порядков на разницу между схемами  
 $\alpha(0)$  и  $G_\mu$

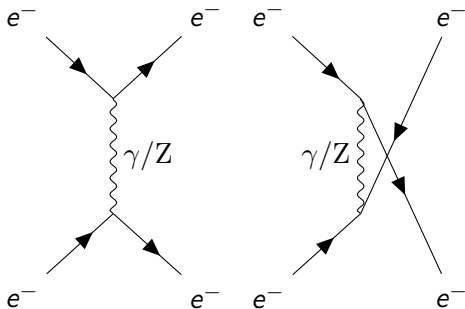
$P_{\mu^+}, P_{e^-}$	0, 0	-1, -1	-1, +1	+1, -1	+1, +1
$\sigma_{\alpha(0)}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	73.846(1)	61.956(1)	82.295(1)	89.175(1)	61.956(1)
$\sigma_{G_\mu}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	75.156(1)	63.084(1)	83.812(1)	90.642(1)	63.084(1)
$\delta_{G_\mu/\alpha(0)}^{\text{weak}}, \%$	1.77	1.82	1.84	1.65	1.82
$\sigma_{\alpha(0)}^{\text{weak+ho}}, \text{ pb}$	74.533(1)	62.471(1)	82.951(1)	90.240(1)	62.471(1)
$\sigma_{G_\mu}^{\text{weak+ho}}, \text{ pb}$	74.830(1)	62.779(1)	83.405(1)	90.359(1)	62.779(1)
$\delta_{G_\mu/\alpha(0)}^{\text{weak+ho}}, \%$	0.40	0.50	0.55	0.13	0.50

$$\mu^- e^- \rightarrow e^- \mu^- (\gamma)$$

сечение при  $\sqrt{s} = 250$  ГэВ, влияние поправок  
 высших порядков на разницу между схемами  
 $\alpha(0)$  и  $G_\mu$

$P_{\mu^+}, P_{e^-}$	0, 0	-1, -1	-1, +1	+1, -1	+1, +1
$\sigma_{\alpha(0)}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	82.272(1)	124.427(1)	47.117(1)	47.117(1)	114.427(1)
$\sigma_{G_\mu}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	84.732(1)	126.441(1)	47.969(1)	47.969(1)	116.551(1)
$\delta_{G_\mu/\alpha(0)}^{\text{weak}}, \%$	2.99	1.62	1.81	1.81	1.86
$\sigma_{\alpha(0)}^{\text{weak+ho}}, \text{ pb}$	84.091(1)	125.999(1)	47.499(1)	47.499(1)	115.368(1)
$\sigma_{G_\mu}^{\text{weak+ho}}, \text{ pb}$	84.379(1)	126.062(1)	47.738(1)	47.738(1)	115.981(1)
$\delta_{G_\mu/\alpha(0)}^{\text{weak+ho}}, \%$	0.34	0.05	0.05	0.50	0.53

## Глава 2. Рассеяние $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ и $\mu^+\mu^+ \rightarrow \mu^+\mu^+$



# $e^- e^- \rightarrow e^- e^- (\gamma)$ Спиральные амплитуды для борновского и виртуального вклада

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\text{----}} = & \frac{1}{t} \left[ 2(k_1 + m_l^2 c_-) \tilde{F}_\gamma + \chi_Z(t) \left( 2m_l^2 c_- k_2 \cdot \right. \right. \\
 & (\tilde{F}_{DQ} + \tilde{F}_{DL} - \tilde{F}_{LD} - \tilde{F}_{QD}) + 2m_l^2 c_- \sqrt{\lambda_e} (\tilde{F}_{DL} - \tilde{F}_{LD}) \\
 & + 2(k_1 + m_l^2 c_-) (\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL}) \\
 & + 2\sqrt{\lambda_e} (\tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} + 2\tilde{F}_{LL}) + 4k_2 \tilde{F}_{LL} \\
 & \left. \left. + (4m_l^4 k_2 \cos \vartheta_3 - m_l^4 k_1 \cos^2 \vartheta_3 - 3m_l^4 s + 4m_l^6) \tilde{F}_{DD} \right) \right] + \\
 & \frac{1}{u} \left[ 2(k_1 + m_l^2 c_+) \tilde{F}_\gamma + \chi_Z(t) \left( 2m_l^2 c_+ k_2 \cdot \right. \right. \\
 & (\tilde{F}_{DQ} + \tilde{F}_{DL} - \tilde{F}_{LD} - \tilde{F}_{QD}) + 2m_l^2 c_+ \sqrt{\lambda_e} (\tilde{F}_{DL} - \tilde{F}_{LD}) \\
 & + 2(k_1 + m_l^2 c_+) (\tilde{F}_{QQ} + \tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL}) \\
 & + 2\sqrt{\lambda_e} (\tilde{F}_{LQ} + \tilde{F}_{QL} + 2\tilde{F}_{LL}) + 4k_2 \tilde{F}_{LL} \\
 & \left. \left. + (-4m_l^4 k_2 \cos \vartheta_3 - m_l^4 k_1 \cos^2 \vartheta_3 - 3m_l^4 s + 4m_l^6) \tilde{F}_{DD} \right) \right].
 \end{aligned}$$

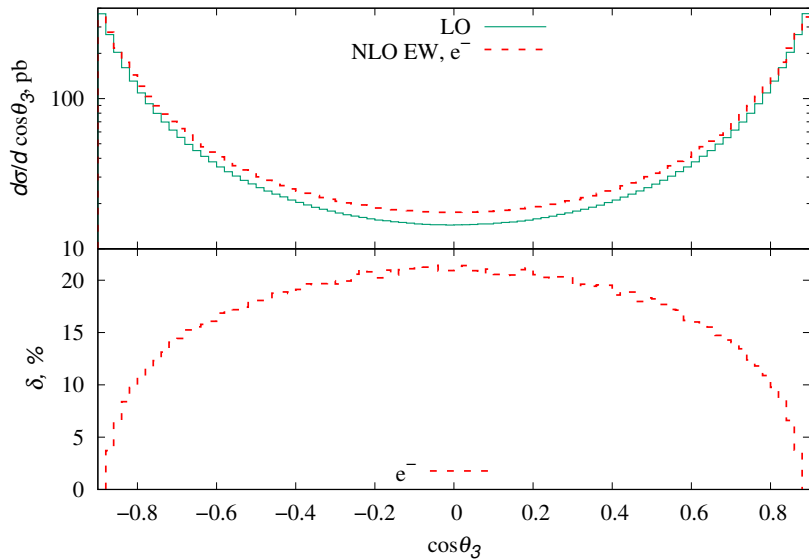
# $e^-e^- \rightarrow e^-e^- (\gamma)$ Сечения в пб и относительные поправки в процентах

$\sqrt{s}$ , ГэВ	250	380	500	1000	1500	3000
$P_{e^-}, P_{e^-} = 0, 0$						
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	94.661(1)	42.969(1)	25.498(1)	6.657(1)	2.992(1)	0.7536(1)
$\sigma^{\text{one-loop}}$ , pb	103.906(2)	47.327(1)	28.068(1)	7.218(1)	3.185(1)	0.7665(1)
$\delta$ , %	9.77(1)	10.14(1)	10.08(1)	8.42(1)	6.46(1)	1.71(1)
$P_{e^-}, P_{e^-} = 0.8, 0.8$						
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	120.152(1)	55.739(1)	33.430(1)	8.850(1)	3.989(1)	1.007(1)
$\sigma^{\text{one-loop}}$ , pb	134.976(2)	63.264(1)	38.171(2)	10.229(1)	4.635(1)	1.177(1)
$\delta$ , %	12.34(1)	13.50(1)	14.18(1)	15.58(1)	16.19(1)	16.94(1)
$P_{e^-}, P_{e^-} = -0.8, -0.8$						
$\sigma^{\text{Born}}$ , pb	136.377(1)	65.487(1)	39.984(1)	10.865(1)	4.928(1)	1.249(1)
$\sigma^{\text{one-loop}}$ , pb	147.224(2)	70.345(1)	42.627(2)	11.104(1)	4.827(1)	1.103(1)
$\delta$ , %	7.95(1)	7.42(1)	6.61(1)	2.20(1)	-2.06(1)	-11.70(1)

$\mu^+\mu^+ \rightarrow \mu^+\mu^+(\gamma)$  Сечения в пб и относительные поправки в процентах

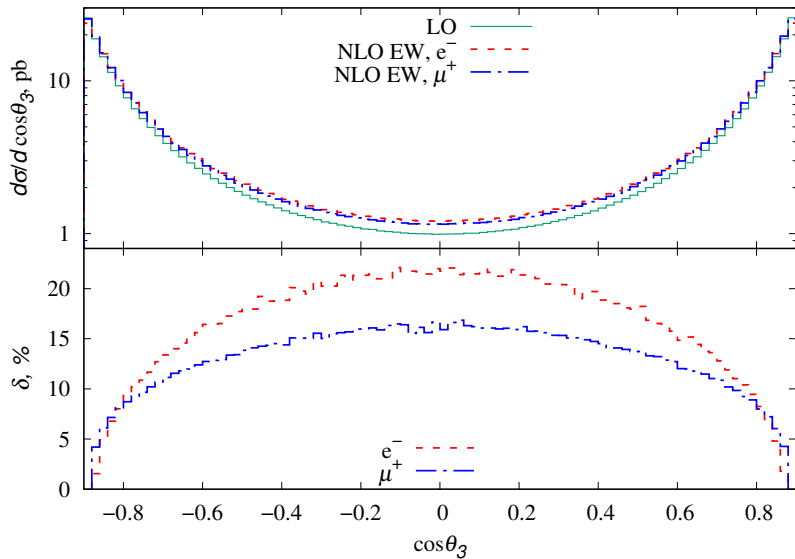
$P_{\mu^+}, P_{\mu^+}$	0, 0	0.8, 0.8	-0.8, -0.8
$\sqrt{s} = 600 \text{ GeV}$			
$\sigma^{\text{Born}}, \text{ pb}$	17.974(1)	23.690(1)	28.601(1)
$\sigma^{\text{one-loop}}, \text{ pb}$	19.715(1)	27.064(1)	30.160(1)
$\delta, \%$	9.69(1)	14.24(1)	5.45(1)
$\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$			
$\sigma^{\text{Born}}, \text{ pb}$	6.6572(1)	8.8497(1)	10.8648(1)
$\sigma^{\text{one-loop}}, \text{ pb}$	7.2019(1)	10.1930(1)	11.0589(2)
$\delta, \%$	8.18(1)	15.18(1)	1.79(1)
$\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}$			
$\sigma^{\text{Born}}, \text{ pb}$	1.6903(1)	2.2559(1)	2.7935(1)
$\sigma^{\text{one-loop}}, \text{ pb}$	1.7646(1)	2.6195(1)	2.6210(1)
$\delta, \%$	4.40(1)	16.12(1)	-6.17(1)

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-(\gamma)$ ,  $d\sigma/d\cos\vartheta_3$ ,  $\sqrt{s} = 250 \text{ GeV}$





$e^-e^- \rightarrow e^-e^-(\gamma)$  и  $\mu^+\mu^+ \rightarrow \mu^+\mu^+(\gamma)$ ,  $d\sigma/d\cos\vartheta_3$ ,  
 $\sqrt{s} = 1000 \text{ ГэВ}$



## Глава 3. Поправки высших поправок для $e^+e^- \rightarrow HZ$

# Поправки высших поправок, КЭД

В аннигиляционном канале  $e^+e^- \rightarrow HZ(n\gamma)$  большой логарифм равен  $L = \ln \frac{s}{m_e^2}$ .

$O(1)$	1		
$O(\alpha)$	$\alpha L$	$\alpha$	
$O(\alpha^2)$	$\frac{1}{2}\alpha^2 L^2$	$\frac{1}{2}\alpha^2 L$	$\frac{1}{2}\alpha^2$
$O(\alpha^3)$	$\frac{1}{6}\alpha^3 L^3$	$\frac{1}{6}\alpha^3 L^2$	...

В ведущем логарифмическом (ВЛ) приближении можно разделить чисто фотонные (помечены “ $\gamma$ ”) и остальные поправки, включающие эффекты излучения лептонных пар и смешанные фотон-пары эффекты (помечены как “pair”).

# ISR поправки в ВЛ приближении

Основная формула:

$$\sigma^{\text{LLA}} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \mathcal{D}_{ee}(x_1) \mathcal{D}_{ee}(x_2) \sigma_0(x_1, x_2, s) \Theta(\text{cuts}),$$

где  $\sigma_0(x_1, x_2, s)$  – сечение борновского уровня аннигиляционного процесса с измененными импульсами начальных частиц.

$\mathcal{D}_{ee}(x)$  описывает плотность вероятности найти электрон с долей энергии  $x$  в начальном электронном пучке.

# Функции партонной плотности электрона

$$\mathcal{D}_{ee}(x) = \mathcal{D}_{ee}^{\gamma}(x) + \mathcal{D}_{ee}^{\text{pair}}(x),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ee}^{\gamma}(x) = & \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi}(L-1)P^{(1)}(x) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}(L-1)\right)^2 \frac{1}{2!}P^{(2)}(x) \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}(L-1)\right)^3 \frac{1}{3!}P^{(3)}(x) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}(L-1)\right)^4 \frac{1}{4!}P^{(4)}(x) + \mathcal{O}(\alpha^5 L^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ee}^{\text{pair}}(x) = & \left(\frac{\alpha}{2\pi}L\right)^2 \left[ \frac{1}{3}P^{(1)}(x) + \frac{1}{2}R_s(x) \right] \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}L\right)^3 \left[ \frac{1}{3}P^{(2)}(x) + \frac{4}{27}P^{(1)}(x) + \frac{1}{3}R_p(x) - \frac{1}{9}R_s(x) \right] + \mathcal{O}(\alpha^4 L^4). \end{aligned}$$

Поправки для эффектов излучения пар можно разделить на синглетные ( $\sim R_{s,p}$ ) и несинглетные ( $\sim P^{(n)}$ ). По умолчанию мы учитываем и те, и другие.

Большой логарифм равен  $L = \ln(s/m_e^2)$ , где  $\sqrt{s}$  выбрано как масштаб факторизации.

# Функции расщепления

Несинглетные функции расщепления:

$$P^{(n)}(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \delta(1-x) P_{\Delta}^{(n)} + P_{\Theta}^{(n)}(x) \Theta(1-\Delta-x) \right\},$$

где  $\Delta \ll 1$  — разделитель между мягкой и жесткой частью.  
Например, для  $n = 1$ :

$$P_{\Delta}^{(1)} = 2 \ln \Delta + \frac{3}{2}, \quad P_{\Theta}^{(1)}(x) = \frac{1+x^2}{1-x}.$$

Чисто фотонные несинглетные функции расщепления высшего порядка получаются путем итерированной свертки

$$P^{(n+1)}(x) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \delta(x - x_1 x_2) P^{(n)}(x_1) P^{(1)}(x_2).$$

Подробнее в [А.В. Arbuzov. Phys. Lett. B 1999,470, 252–258]

# КЭД ISR вклады с различной кинематикой

Партонное сечение борновского уровня  $\sigma_0(x_1, x_2, s)$  известно в партонной СЦМ как  $\sigma_{\text{Born}}(\hat{s})$ , где  $\hat{s} = x_1 x_2 s$ . Необходим переход от партонной СЦМ в лабораторную систему отсчета, если  $x_1 x_2 \neq 1$ .

Вклады с различной кинематикой:

- I.  $(SV)_1 \times (SV)_2$  Борновская кинематика: дополнительный вклад в "Born+Soft+Virt".
- II.  $H_1 \times (SV)_2$  Один жесткий фотон, коллинеарный первой начальной частице, с возможными мягкими и (или) виртуальными (Soft+Virt) поправками ко второй начальной частице. Здесь и далее "один жесткий фотон" означает "по крайней мере один жесткий фотон в том же направлении".
- III.  $(SV)_1 \times H_2$  Мягкая+виртуальная поправка к первой начальной частице и один жесткий фотон вдоль второй начальной частицы.
- IV.  $H_1 \times H_2$  Один жесткий фотон вдоль первой начальной частицы и один вдоль второй.

## Схема с экспоненциацией

Экспоненцированные структурные функции включают ВЛ часть однопетлевых радиационных поправок КЭД. Чтобы избежать двойного счета с полными однопетлевыми поправками, мы должны вычесть ведущие логарифмические члены первого порядка из однопетлевых поправок. Таким образом, окончательный результат выглядит следующим образом

$$\sigma^{\text{corr.}} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \mathcal{D}_{ee}^{\text{exp}}(x_1) \mathcal{D}_{ee}^{\text{exp}}(x_2) \sigma_0(x_1, x_2, s) \Theta(\text{cuts}) \\ + \left[ \sigma^{\text{Soft+Virt}} - \sigma_{\text{LLA}}^{\text{Soft+Virt}} \right] + \left[ \sigma^{\text{Hard}} - \sigma_{\text{LLA}}^{\text{Hard}} \right].$$

“Soft+Virt” часть имеет борноподобную кинематику:

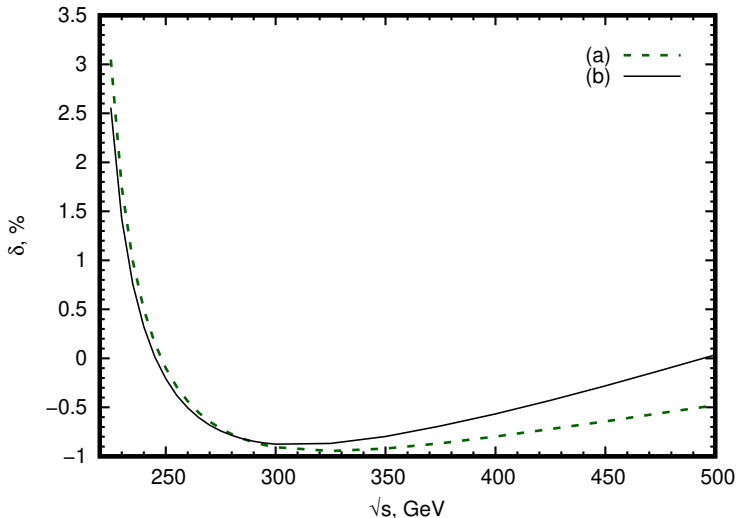
$$\sigma_{\text{LLA}}^{\text{Soft+Virt}} = \sigma^{\text{Born}} 2 \frac{\alpha}{2\pi} (L-1) \left[ 2 \ln \omega + \frac{3}{2} \right].$$

“Hard LLA” вклад переписан так, чтобы соответствовать “Hard” кинематике:

$$\sigma_{\text{LLA}}^{\text{Hard}} = \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{k_0^2 2\pi} \left[ \frac{E^2}{k p_1} \sigma^{\text{Born}}(x_1, 1, s) + \frac{E^2}{k p_2} \sigma^{\text{Born}}(1, x_2, s) \right] \left( 2 - 2 \frac{k_0}{E} + \frac{k_0^2}{E^2} \right).$$

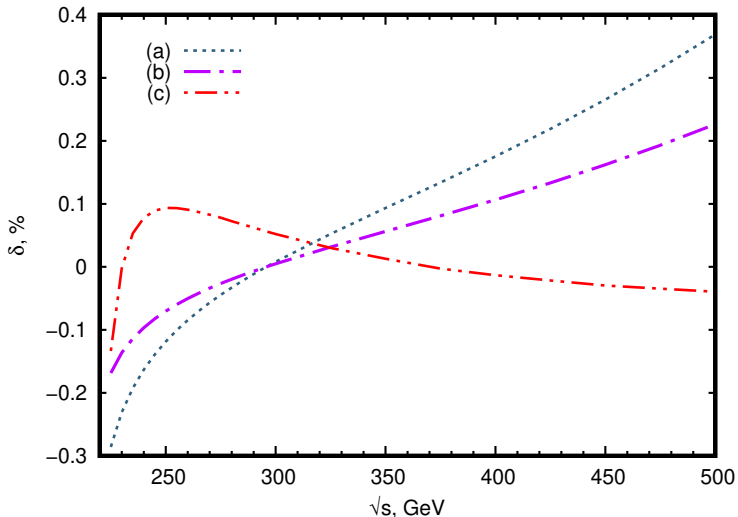


$e^+e^- \rightarrow ZH$ . КЭД поправки в ВЛП [Symmetry 13, 01256]



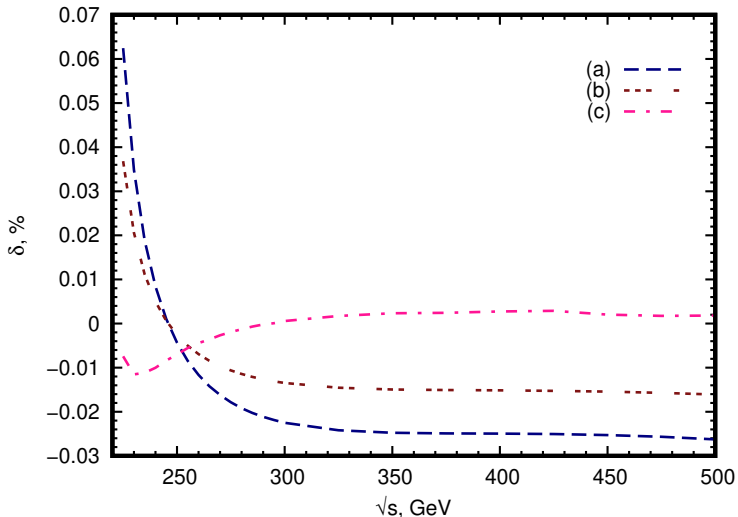
(a)  $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)\gamma$ , (b)  $\sum_{n=2}^4 \mathcal{O}(\alpha^n L^n)$ .

$e^+e^- \rightarrow ZH$ . КЭД поправки в ВЛП [Symmetry 13, 01256]



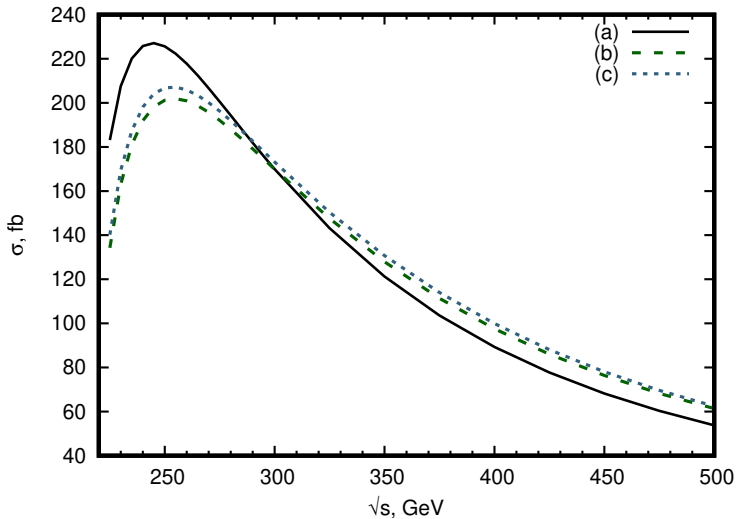
(a)  $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)e^+e^-$ , (b)  $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)\mu^+\mu^-$ , (c)  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)\gamma$ .

$e^+e^- \rightarrow ZH$ . КЭД поправки в ВЛП [Symmetry 13, 01256]



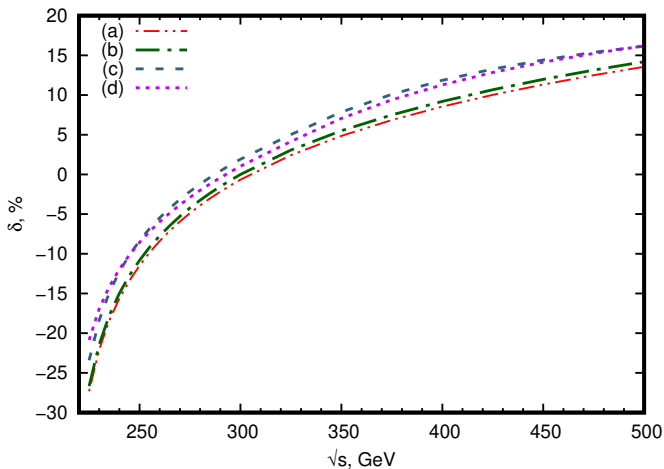
(a)  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)e^+e^-$ , (b)  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)\mu^+\mu^-$ , (c)  $\mathcal{O}(\alpha^4 L^4)\gamma$ .

$$e^+e^- \rightarrow ZH \quad [\text{Symmetry 13, 01256}]$$



Сечения: (а) Борновское, (b) с  $\mathcal{O}(\alpha)$  КЭД поправками, (с) с полными  
однопетлевыми ЭС вкладами

$e^+e^- \rightarrow ZH$  [Symmetry 13, 01256]



Сечения: (a) для  $\mathcal{O}(\alpha L)$ , (b) для КЭД  $\mathcal{O}(\alpha)$ , (c) для полных 1-петлевых ЭС и (d) для суммы (c) и  $\sum_{n=2}^4 \mathcal{O}(\alpha^n L^n)$  ISR

$$e^+ e^- \rightarrow ZH, \sqrt{s} = 240 \text{ ГэВ} \quad [\text{Symmetry 13, 01256}]$$

	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ $\gamma$	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ $e^+ e^-$	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ $\mu^+ \mu^-$	$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ $\gamma$
$\delta\sigma_{\text{LLA}}, \text{ fb}$	1.128(1)	-0.368(1)	-0.218(1)	0.176(1)
$\delta_{\text{LLA}}, \%$	0.500(1)	-0.163(1)	-0.097(1)	0.078(1)
	$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ $e^+ e^-$	$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ $\mu^+ \mu^-$	$\mathcal{O}(\alpha^4 L^4)$ $\gamma$	$\sum_{n=2}^4 \mathcal{O}(\alpha^n L^n)$
$\delta\sigma_{\text{LLA}}, \text{ fb}$	0.019(1)	0.011(1)	-0.023(1)	0.727(1)
$\delta_{\text{LLA}}, \%$	0.008(1)	0.005(1)	-0.010(1)	0.322(1)

$$\delta_{\text{ISR LLA}} \equiv \delta\sigma_{\text{ISR LLA}}/\sigma_0, \sigma_0 = 225.74(1) \text{ fb.}$$

Изменение масштаба факторизации в аргументе большого логарифма  $L$  может моделировать следующие за ведущими логарифмические поправки, например,  $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ .

$$\delta_{\text{LLA}}(2\sqrt{s}) = 0.361(1)\%$$

$$\delta_{\text{LLA}}(\sqrt{s}/2) = 0.286(1)\%$$

$$e^+e^- \rightarrow ZH, \sqrt{s} = 250 \text{ ГэВ} \quad [\text{Symmetry 13, 01256}]$$

	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ $\gamma$	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ $e^+e^-$	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ $\mu^+\mu^-$	$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ $\gamma$
$\delta\sigma_{\text{LLA}}, \text{ fb}$	-0.223(1)	-0.268(1)	-0.159(1)	0.211(1)
$\delta_{\text{LLA}}, \%$	-0.099(1)	-0.119(1)	-0.070(1)	0.094(1)
	$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ $e^+e^-$	$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ $\mu^+\mu^-$	$\mathcal{O}(\alpha^4 L^4)$ $\gamma$	$\sum_{n=2}^4 \mathcal{O}(\alpha^n L^n)$
$\delta\sigma_{\text{LLA}}, \text{ fb}$	-0.010(1)	-0.006(1)	-0.016(1)	-0.468(1)
$\delta_{\text{LLA}}, \%$	-0.004(1)	-0.003(1)	-0.007(1)	-0.207(1)

$$\delta_{\text{ISR LLA}} \equiv \delta\sigma_{\text{ISR LLA}}/\sigma_0, \sigma_0 = 225.59(1) \text{ fb.}$$

Изменение масштаба факторизации в аргументе большого логарифма  $L$  может моделировать следующие за ведущими логарифмические поправки, например,  $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ .

$$\delta_{\text{LLA}}(2\sqrt{s}) = -0.228(1)\%$$

$$\delta_{\text{LLA}}(\sqrt{s}/2) = -0.187(1)\%$$

# $e^+e^- \rightarrow ZH$ . Order-by-order vs Exponentiated SF

[Symmetry 13, 01256]

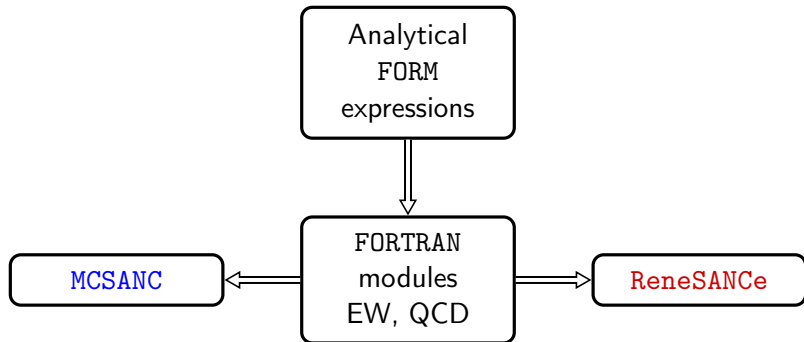
	$\sum_{n=1}^N \mathcal{O}(\alpha^n L^n)$			
$N$	1	2	3	4
$\sqrt{s} = 240 \text{ GeV}$				
$R_{\text{LLA}}$	0.9934	0.9993	1.0002	1.0001
$R_{\text{Exp Add}}$	0.9975	1.0054	1.0000	
$R_{\text{Exp Mul}}$	0.9996	1.0000	1.0000	
$\sqrt{s} = 250 \text{ GeV}$				
$R_{\text{LLA}}$	1.0001	0.9990	1.0000	0.9999
$R_{\text{Exp Add}}$	0.9969	1.0002	1.0000	
$R_{\text{Exp Mul}}$	0.9994	1.0000	1.0000	

Учтены только чисто фотонные поправки. Здесь  $R_i = \sigma_i / \sigma_{\text{Exp Mul}}^{(3)}$ ,  $i = (\text{LLA}, \text{Exp Add}, \text{Exp Mul})$ ,  $\sigma_{\text{Exp Add}}$  рассчитано со структурной функцией электрона взятой в аддитивной экспоненцированной форме [Cacciari et al., M. Europhys. Lett.1992,17,123–128] и  $\sigma_{\text{Exp Mul}}$  в мультипликативной экспоненцированной форме [Przybycien, M., Acta Phys. Polon. B 1993,24, 1105–1114].



## Глава 4. Монте-Карло генератор событий ReneSANCe

## Фрэймворк SANC и семейство продуктов



### Публикации:

SANC – *Comput.Phys.Commun.* 174 (2006), 481-517.

MCSANC (pp-mode) – *Comput.Phys.Commun.* 184 (2013), 2343-2350;  
*JETP Letters* 103 (2016), 131-136.

ReneSANCe – *Comput.Phys.Commun.* 256 (2020), 107445.

Продукты SANC доступны на сайте <http://sanc.jinr.ru/download.php>

# Генератор ReneSANCe

**ReneSANCe** (**R**enewed **SANC** Monte Carlo **e**vent generator)

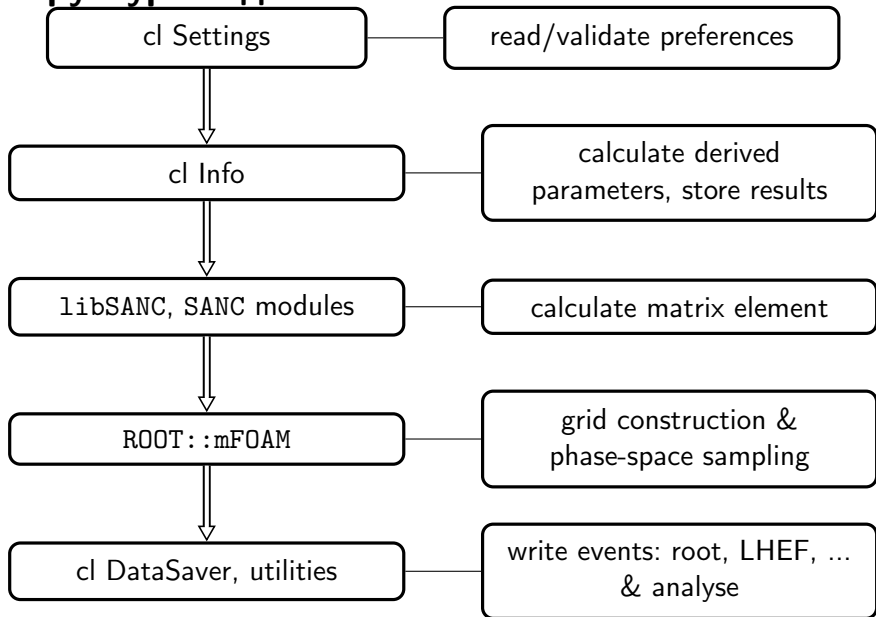
– Монте-Карло генератор событий для симуляции процессов на лептонных и адронных коллайдерах.

- В том числе реализованы процессы:
  - ▶  $\mu^\pm e^- \rightarrow e^- \mu^\pm$
  - ▶  $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$
  - ▶  $e^+ e^- \rightarrow HZ$
- Основан на модулях **SANC** (**S**upport for **A**nalytic and **N**umeric **C**alculations for experiments at colliders)
- Реализованы полные однопетлевые электрослабые поправки и некоторые поправки высших порядков
- Все частицы массивные и поляризованные
- Эффективно работает в коллинеарном регионе и в широком интервале значений  $\sqrt{s}$
- Новые процессы могут быть легко добавлены

# Генератор ReneSANCe

- CMAKE build system (generator)
- Модульная архитектура
- c++ & FORTRAN
- Для сэмплирования используется адаптивный алгоритм **mFOAM**  
[Jadach, S. and Sawicki, P., Comp. Phys. Comm. 177 \(2007\), pp. 441–458](#)
- События записываются в root/LHEF формат и затем могут быть обработаны (построены гистограммы и т.д.)

# Структура кода ReneSANCe



# Стратегия генерации событий

Для генерации событий мы используется многоканальную стратегию с преобразованием переменных. Реализовано два подхода:

- Ручное разыгрывание канала. Для каждого канала создан отдельный экземпляр класса **FOAM**. В этом случае каждый канал может использовать как оптимальное преобразование переменных, так и оптимальную настройку сэмплера **FOAM**. Как следствие, необходим дополнительный этап для вычисления весов ветвления, который замедляет этап инициализации генератора.
- Разыгрывание событий производится с использованием только одного экземпляра **FOAM**. Тем не менее, оптимальное преобразование переменных для каждого канала также доступно. В таком подходе **FOAM** отвечает за разыгрывание канала, что достигается путем создания искусственной дополнительной размерности интеграла с фиксированными точками деления.

# Генератор ReneSANCe

ReneSANCe v1.2.1

доступен публично

<http://sanc.jinr.ru/download.php>

<https://renewance.hepforge.org>

## Заключение



## Основные публикации

Результаты по теме диссертации изложены в 6 статьях, из которых 4 изданы в журналах, рекомендованных ВАК или в научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

- MCSANCe generator with one-loop electroweak corrections for processes with polarized  $e^+e^-$  beams, J. Phys. Conf. Ser. **1525** 012012 (2020).
- Polarized NLO EW  $e^+e^-$  cross section calculations with ReneSANCe-v1.0.0, Comp.Phys.Comm. **256**, 107445 (2020).
- Electroweak Effects in  $e^+e^- \rightarrow ZH$  Process, Symmetry **13**, no. 7, 1256 (2021).
- Electroweak effects in polarized muon-electron scattering, Physical Review D **105**, no. 3, 033009 (2022).
- One-loop electroweak radiative corrections to polarized Møller scattering, arXiv:2203.10538, отправлено в JETP Letters
- ReneSANCe event generator for high-precision  $e^+e^-$  physics, отправлено в J. Phys. Conf. Ser.

# Апробация результатов

- CEPC Topical Workshop: Theoretical Uncertainty Controls for the CEPC measurements, Beijing, China, 04 April 2019.
- 13th APCTP-BLTP JINR Joint Workshop, г. Дубна, РФ, 14-20 Июля 2019 г.
- 3rd FCC Physics and Experiments Workshop, Geneva, Switzerland, 13-17 January 2020.
- 4th FCC Physics and Experiments Workshop, Geneva, Switzerland, 10-13 November 2020.
- The Joint Workshop of the CEPC Physics, Software and New Detector Concept, Yangzhou, China, 14-17 April 2021.
- Workshop on future Super c-tau factories, Novosibirsk, Russia, 15-17 November 2021.

## Положения выносимые на защиту

- Впервые вычислены полные однопетлевые ЭС поправки к поляризованному упругому мюон-электронному рассеянию. Исследовано поведение КЭД и слабых поправок при больших значениях энергии  $\mu\text{TRISTAN}$  (КЕК), а также при условиях эксперимента MUonE (ЦЕРН).
- Впервые вычислены полные однопетлевые ЭС поправки к поляризованному процессу Меллера и мюон-мюонному рассеянию с учетом масс лептонов. Проанализировано поведение КЭД и слабых поправок в широком диапазоне энергий.
- Предложена схема учета отдельных универсальных поправок высших порядков для t-канальных четырехфермионных процессов через параметр  $\Delta\rho$ .
- Проведено вычисление КЭД поправок вплоть до  $O(\alpha^4 L^4)$  к полному сечению  $e^+e^- \rightarrow HZ$ .
- Создан Монте-Карло генератор ReDeSANCe, позволяющий эффективно разыгрывать события в широких кинематических пределах.

**Спасибо за внимание!**

## Дополнительные слайды

$$\mu^- e^- \rightarrow e^- \mu^- (\gamma)$$

## Сравнение

$P_{\mu^-}, P_{e^-}$	0, 0	-1, -1	-1, 1	1, -1	1, 1
S	102.42(1)	157.64(1)	56.53(1)	56.52(1)	139.05(1)
W	102.43(1)	157.62(1)	56.53(1)	56.54(1)	139.05(1)
C	102.43(1)	157.63(1)	56.53(1)	56.52(1)	139.06(2)

Сравнение между SANC (первая линия), WHIZARD (вторая линия), и CalcHEP (третья линия) результатов для сечения жесткого тормозного излучения (пб) для 100% поляризованного  $\mu^- e^- \rightarrow e^- \mu^- \gamma$  рассеяния при энергии  $\sqrt{s} = 250$  ГэВ в СЦМ. Кинематические ограничения по углу составляют  $|\cos \vartheta_\mu| \leq 0.9$  и  $|\cos \vartheta_e| \leq 0.9$ . Кроме того, применялось дополнительное ограничение на энергию фотона  $E_\gamma \geq \omega = 10^{-4} \sqrt{s}/2$ .

$$e^+e^- \rightarrow \mu^-\mu^+(n\gamma)$$

## ISR поправки в ЛЛ приближении

$\sqrt{s} = 250$  GeV, Born cross section  $\sigma_0 = 1417.6(1)$  fb.

$$\Sigma \equiv \sum_{n=2}^4 \mathcal{O}(\alpha^n L^n), \quad \delta = \delta_{\text{ISR LLA}} \equiv \delta\sigma_{\text{ISR LLA}}/\sigma_0$$

	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$		$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$		$\mathcal{O}(\alpha^4 L^4)$	$\Sigma$
	$[\gamma]$	[pair]	$[\gamma]$	[pair]	$[\gamma]$	
Cuts: $ \cos\theta_{\mu^\pm}  < 0.9, M_{\mu^+\mu^-} > 10$ GeV.						
$\delta\sigma$ , fb	108.2(1)	53.70(1)	-0.49(3)	3.47(1)	-0.23(1)	164.7(1)
$\delta$ , %	7.63(1)%	3.79(1)%	-0.035(2)%	0.245(1)%	-0.017(1)%	11.62(1)%
Cuts: $ \cos\theta_{\mu^\pm}  < 0.9, M_{\mu^+\mu^-} > 100$ GeV.						
$\delta\sigma$ , fb	4.8(1)	5.9(1)	-0.76(2)	0.00(1)	0.00(1)	9.9(1)
$\delta$ , %	0.34(1)%	0.42(1)%	-0.053(1)%	0.00(1)%	0.00(1)%	0.70(1)%

$$e^+e^- \rightarrow \mu^-\mu^+(n\gamma)$$

## FSR поправки в ЛЛ приближении

$\sqrt{s} = 250$  GeV, Born cross section  $\sigma_0 = 1417.6(1)$  fb.

$$\Sigma \equiv \sum_{n=2}^4 \mathcal{O}(\alpha^n L^n), \quad \delta = \delta_{\text{FSR LLA}} \equiv \delta\sigma_{\text{FSR LLA}}/\sigma_0$$

	$\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$		$\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$		$\mathcal{O}(\alpha^4 L^4)$	$\Sigma$
	$[\gamma]$	[pair]	$[\gamma]$	[pair]	$[\gamma]$	
Cuts: $ \cos\theta_{\mu^\pm}  < 0.9, M_{\mu^+\mu^-} > 10$ GeV.						
$\delta\sigma$ , fb	0.00(1)	7.64(1)	0.00(1)	-0.129(1)	0.00(1)	7.50(1)
$\delta$ , %	0.00(1)%	0.539(1)%	0.00(1)%	-0.0091(1)%	0.00(1)%	0.529(1)%
Cuts: $ \cos\theta_{\mu^\pm}  < 0.9, M_{\mu^+\mu^-} > 100$ GeV.						
$\delta\sigma$ , fb	-0.54(1)	0.87(1)	0.00(1)	-0.069(1)	0.00(1)	0.26(1)
$\delta$ , %	-0.038(1)%	0.061(1)%	0.00(1)%	-0.005(1)%	0.00(1)%	0.018(1)%



$$e^+e^- \rightarrow \mu^-\mu^+$$

## Поправки высших порядков, слабые

$P_{e^+}, P_{e^-}$	0, 0	0,-0.8	0.3,-0.8	0,0.8	-0.3,0.8
$\sigma_{\alpha(0)}^{\text{Born}}, \text{ pb}$	1.41763(1)	1.54645(1)	1.93499(1)	1.28880(1)	1.58073(1)
$\sigma_{G_\mu}^{\text{Born}}, \text{ pb}$	1.50971(1)	1.64690(1)	2.06068(1)	1.37252(1)	1.68341(1)
$\sigma_{\alpha(M_Z^2)}^{\text{Born}}, \text{ pb}$	1.59923(1)	1.74456(1)	2.18287(1)	1.45391(1)	1.78323(1)
$\delta\sigma_{\alpha(0)}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	0.15525(1)	0.11883(1)	0.14243(1)	0.19167(1)	0.242587(1)
$\delta\sigma_{G_\mu}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	0.07911(1)	0.03249(1)	0.03400(1)	0.12574(1)	0.162206(1)
$\delta\sigma_{\alpha(M_Z^2)}^{\text{weak}}, \text{ pb}$	-0.01194(1)	-0.07003(1)	-0.09468(1)	0.46147(1)	0.06506(1)
$\delta\sigma_{\alpha(0)}^{\text{ho}}, \text{ pb}$	0.02122(1)	0.02304(1)	0.02882(1)	0.01940(1)	0.02380(1)
$\delta\sigma_{G_\mu}^{\text{ho}}, \text{ pb}$	-0.00555(1)	-0.00351(1)	-0.00407(1)	-0.00759(1)	-0.00969(1)
$\delta\sigma_{\alpha(M_Z^2)}^{\text{ho}}, \text{ pb}$	0.00387(1)	0.00898(1)	0.01183(1)	-0.00124(1)	-0.00222(1)

cuts are:  $|\cos\theta_{\mu^-}| < 0.9, \quad |\cos\theta_{\mu^+}| < 0.9.$

$$e^+e^- \rightarrow \mu^-\mu^+(n\gamma)$$

## Влияние различных поправок

	Born	+QED (1-loop)	+WEAK (1-loop)	+WEAK ( $\Delta\rho$ )	+QED (LL)
$\sigma$ , pb	1.50971(1)	cut1: + 0.829(1) cut2: + 0.197(1)	+0.07911(1)	-0.00555(1)	cut1: + 0.1837(1) cut2: + 0.0108(1)
$\delta$ , %		cut1: + 54.9(1)% cut2: + 13.1(1)%	+5.24(1)%	-0.37(1)%	cut1: + 12.17(1)% cut2: + 0.72(1)%

Calculated in  $G_\mu$  EW scheme,  $\sqrt{s} = 250$  GeV.

Cuts are:  $|\cos\theta_{\mu^-}| < 0.9$ ,  $|\cos\theta_{\mu^+}| < 0.9$ ,

cut1:  $M_{ll} > 10$  GeV,

cut2:  $M_{ll} > 100$  GeV.