

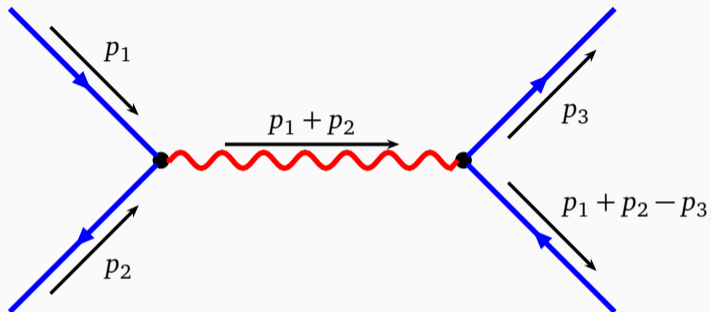
# Компьютер в руках теоретика

Андрей Пикельнер

ЛТФ ОИЯИ

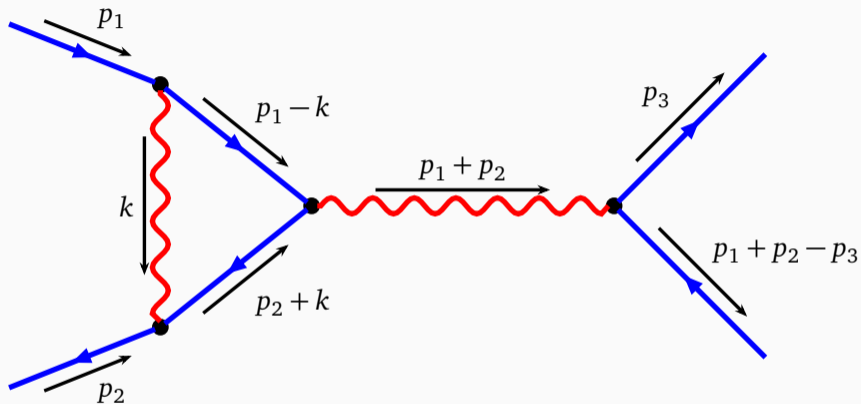
ДУ//08.092022

# Диаграмма Фейнмана под микроскопом



- В **вершинах** (2шт.) энергия и импульс сохраняются!
- Для внешних линий  $p_i^2 = m_i^2$ , для **пропагатора** (1шт.) нет!

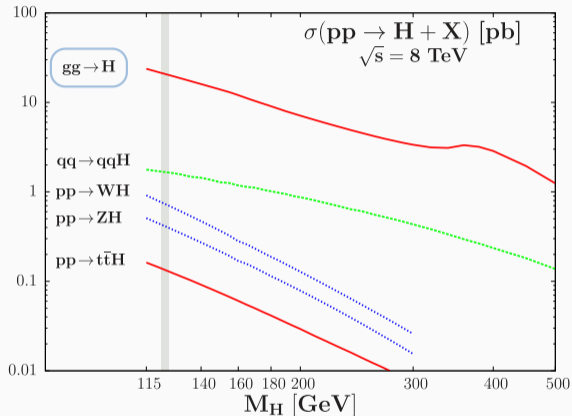
## Добавим петель



- Итого: вершин - 4шт., пропагаторов - 4шт.
- Чему равен импульс  $k$ ?

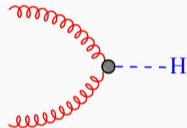
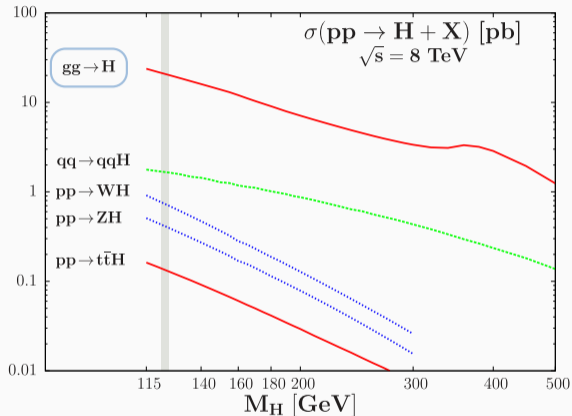
# Рождение бозона Хиггса на LHC

- Основной процесс рождения бозона Хиггса на LHC  $gg \rightarrow H$



# Рождение бозона Хиггса на LHC

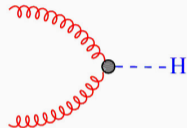
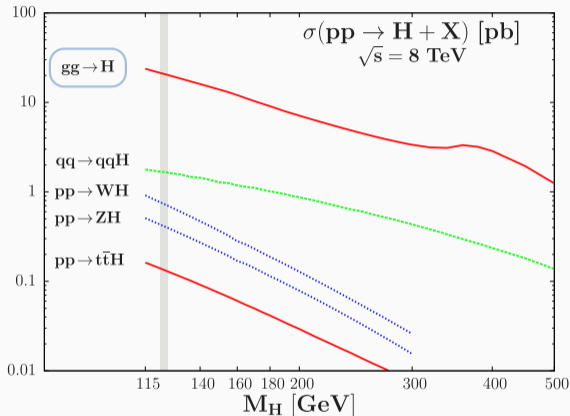
- Основной процесс рождения бозона Хиггса на LHC  $gg \rightarrow H$



- Но есть ли такое взаимодействие, если  $m_g = 0$ ?

# Рождение бозона Хиггса на LHC

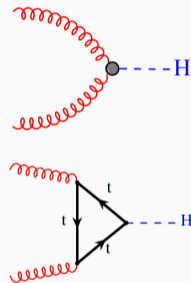
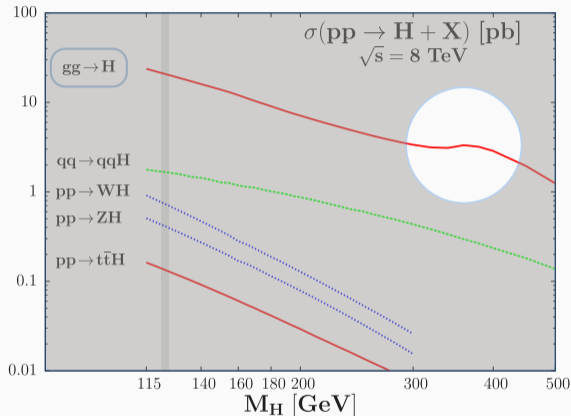
- Основной процесс рождения бозона Хиггса на LHC  $gg \rightarrow H$



- Но есть ли такое взаимодействие, если  $m_g = 0$ ?
- Следы пары t-кварков?  $2 \times m_t = 174 \times 2 = 348$

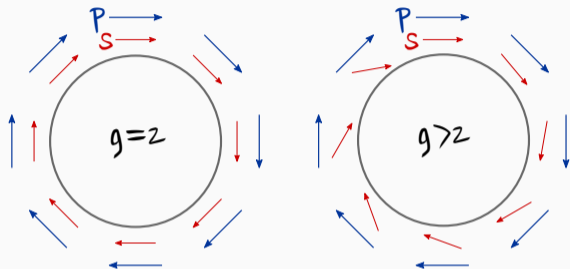
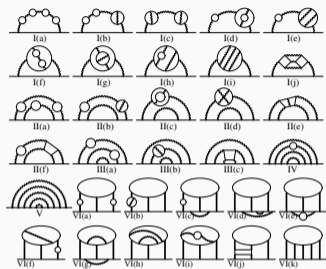
# Рождение бозона Хиггса на LHC

- Основной процесс рождения бозона Хиггса на LHC  $gg \rightarrow H$



- Но есть ли такое взаимодействие, если  $m_g = 0$ ?
- Следы пары t-кварков?  $2 \times m_t = 174 \times 2 = 348$

# Аномальный магнитный момент



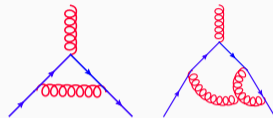
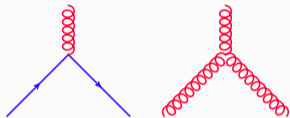
Потрясающее согласие эксперимента и вычислений,  $a_e = \frac{g_e - 2}{2}$ :

$$a_e^{\text{QED}}(\alpha_{\text{Rb}}) \cdot 10^{12} = 1159652180.31(72)$$

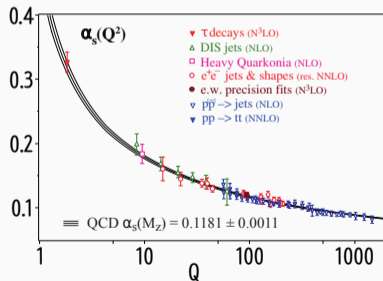
$$a_e^{\text{exp}} \cdot 10^{12} = 1159652180.73(28)$$



# Бегущая константа КХД

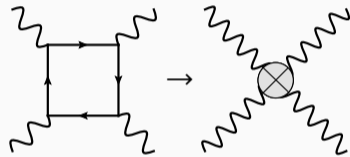
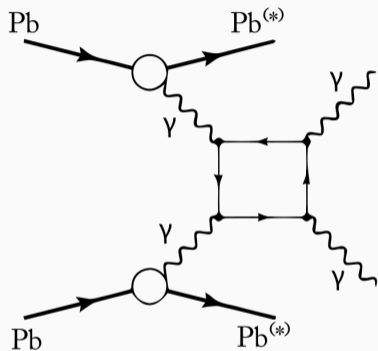


“Константа” = const



Поправки меняют взаимодействие

# Рассеяние света на свете



- Наблюдалось в столкновениях тяжелых ионов ATLAS/CMS
- Появляется взаимодействие, которого не было

# Петлевые интегралы

в чем же сложность?

# Необходимый минимум

Ручка + бумага =

$W = \frac{\omega E}{M} + \frac{\omega^2}{M}$   
 $E_0 = \frac{E^2}{M} - \frac{\omega^2}{M} = M c^2$   
 $\frac{W}{M} = \frac{\omega}{M}$   
 $\frac{W'}{M} = \frac{\omega'}{M}$   
 $\omega \sin \alpha = W' \sin \theta + \frac{W M}{M^2 (1 - \cos \theta)}$   
 $W' \cos \theta = W \cos \alpha + \frac{W M}{M^2 (1 - \cos \theta)}$   
 $W' = \frac{\omega E}{M} + \frac{\omega^2}{M} \cos \alpha$   
 $\frac{dW}{W'} = \frac{\omega^2}{M} (\sin \alpha d\alpha)$   
 $\frac{\omega E}{M} + \frac{\omega^2}{M} \cos \alpha$   
 $\alpha = \pi - \theta \quad \omega \cos \alpha = -1 + \frac{\omega}{M}$   
 $\frac{E}{M} = \omega + \frac{\omega^2}{2M}$   
 $W' = \omega + \frac{\omega^2}{2M}$   
 $W' = \omega + \frac{\omega^2}{2M} \cos \alpha$   
 $1 + (1 - \cos \alpha) \frac{\omega^2}{2M} = (1 - \cos \alpha) \frac{\omega^2}{2M} + \omega^2 \sin^2 \alpha$

Compton Effect

$W' = W - E = \frac{W M}{M + W(1 - \cos \theta)}$   
 $W \gg M, W' \approx W$  (for all values of  $\theta$ )  
 $K(W', W) dW' d\Omega'$   
 $= \frac{C M}{W} \frac{dW'}{W'} \left[ 1 + \left(\frac{W'}{W}\right)^2 - \left(\frac{W'}{W}\right)^2 \sin^2 \theta \right]$   
 $W \gg M \quad \frac{W'}{W} \sin^2 \theta \approx \sin^2 \theta$  unless  $\theta \approx 0$   
 $\sin \theta = \frac{\omega \sin \alpha}{\omega' \sin \theta}$   
 $\frac{W'}{W} = \frac{\omega \sin \alpha}{\omega' \sin \theta}$   
 $1 + \left(\frac{W'}{W}\right)^2 = \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{\omega'^2 \sin^2 \theta} + \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{\omega'^2 \sin^2 \theta}$

- $$= \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha \omega' \sin^2 \theta}{(E_1 - E_0 - E)(E_1 - E_0 - E + \omega)}$$
- $$= \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha \omega' \sin^2 \theta}{(E_2 - E_0 + \omega)(E_2 - E_0 + \omega)}$$
- $$= \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha \omega' \sin^2 \theta}{(E_1 - E_0 + \omega)(E_1 - E_0 - E + \omega)}$$

$\text{Sum} = \left( \frac{1}{(E_1 - E_0 - E + \omega)} \right) \left( \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{E_1 - E_0 - E} + \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{E_1 - E_0 + \omega} \right)^2 G(\omega, \theta) d\Omega d\omega$   
 Pole has complex poles hence permanent transition liable.  
 It is prob that an electron be found in final state of momentum  $\mathbb{P}_\pm$ , energy  $E_\pm$   

$$\int \frac{1}{E_1 - E_0 - E} + \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{E_2 - E_0 + \omega} G(E_0 + E - E_\pm, \mathbb{P}_0 + \mathbb{P} - \mathbb{P}_\pm)$$
  
 which may be negative!

# Пределы метода

1980: ручки и бумаги уже недостаточно для промежуточных расчетов

2010: сложно переписать руками даже конечный ответ

Handwritten mathematical derivations for the function  $f(x) = \ln(x)$  using the Taylor series expansion. The derivations show the expansion of  $\ln(x)$  around  $x=1$  and the calculation of the coefficients  $C_n$  and  $D_n$  for the series  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} (x-1)^{-n}$ .

Key equations shown include:

- $f(x) = \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$
- $f(x) = \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^{-n}$
- Derivation of the coefficients  $C_n$  and  $D_n$  using the binomial theorem and the expansion of  $\ln(x)$ .

Handwritten mathematical derivations for the function  $f(x) = \ln(x)$  using the Taylor series expansion. The derivations show the expansion of  $\ln(x)$  around  $x=1$  and the calculation of the coefficients  $C_n$  and  $D_n$  for the series  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} (x-1)^{-n}$ .

Key equations shown include:

- $f(x) = \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$
- $f(x) = \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^{-n}$
- Derivation of the coefficients  $C_n$  and  $D_n$  using the binomial theorem and the expansion of  $\ln(x)$ .

# Что значит много для диаграмм Фейнмана?

При вычислении диаграмм Фейнмана основная сложность определяется:

- Числом **петель**

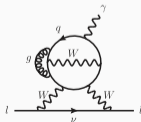


- Числом **масштабов**

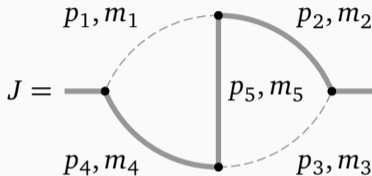
- Внешние линии и соответственно число кинематических инвариантов



- Массы на внутренних линиях



# Основные строительные блоки



$$J = \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{\underbrace{[(k_1)^2]^{n_1}}_{p_1} \underbrace{[(k_2)^2 - m_2^2]^{n_2}}_{p_2} \underbrace{[(q - k_2)^2]^{n_3}}_{p_3} \underbrace{[(q - k_1)^2 - m_4^2]^{n_4}}_{p_4} \underbrace{[(k_1 - k_2)^2 - m_5^2]^{n_5}}_{p_5}}$$

$D$  - размерность пространства-времени,  $q$  - внешний импульс,  $k_1, k_2$  - петлевые импульсы

# Размерная регуляризация

от четырехмерия к произвольной размерности



# Типы расходимостей

$$T_{0m}(n_1, n_2) = \text{bubble}(n_1, n_2, m^2) = \int \frac{d^D k}{[k^2]^{n_1} [k^2 + m^2]^{n_2}} \stackrel{d=4-2\varepsilon}{\sim} \frac{\overbrace{\Gamma(2-n_1-\varepsilon)}^{\text{IR}} \overbrace{\Gamma(n_1+n_2-2+\varepsilon)}^{\text{UV}}}{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(n_2)}$$

Свойства размерной регуляризации:

- Безмассовые бублики равны нулю:  $T_{0m}(n, 0) \equiv 0$
- **ИК** расходимость ( $k \rightarrow 0$ ) при  $n_1 \geq 2$ , например:

$$T_{0m}(2, 1) = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + O(\varepsilon)$$

- **УФ** расходимость ( $k \rightarrow \infty$ ) при  $n_1 + n_2 \leq 2$ , например:

$$T_{0m}(1, 1) = \frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon)$$

- Интеграл конечен при  $n_1 + n_2 \geq 2$  и  $n_1 \leq 1$

# IBP=Integration By Parts

соотношения между интегралами и многое другое...

# Двигаем степени пропагаторов

$$j(n_1, \dots, n_N) = \int \prod_{i=1}^L d^D k_i \frac{D_{M+1}^{-n_{M+1}} \cdot \dots \cdot D_N^{-n_N}}{D_1^{n_1} \cdot \dots \cdot D_M^{n_M}}$$

- Тут:
  - $D_1 \dots D_M$  - знаменатели,  $D_{M+1} \dots D_N$  - скалярные произведения в числителе
  - $L$  - число петель,  $E + 1$  - число внешних линий
  - $N = L(L + 1)/2 + L \cdot E$
- В размерной регуляризации:  $0 = O_{a,b} = \int \prod_{i=1}^L d^D k_i \frac{\partial}{\partial k_a} \cdot q_b \prod_{k=1}^N D^{-n_k}$
- Источник соотношений между интегралами с различными степенями пропагаторов
  - Упрощение интегралов с числителями (в реальных теориях)
  - Сведение большого числа интегралов к **малому набору**
  - Системы дифференциальных/разностных уравнений для интегралов

# Дифференциальные уравнения

если в интеграле есть по чему дифференцировать...

# Берем производную

- IBP редукция сводит производную к исходному интегралу

$$\frac{d}{dm^2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = 2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{\text{IBP}}$$
$$\frac{2(3-d)}{p^2-4m^2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{d-2}{m^2(p^2-4m^2)} \text{---} \text{---} \text{---}$$

- Система ДУ, но необходимы еще начальные условия - например  $J(0)$

$$\frac{d}{dm^2} \begin{pmatrix} T(m^2) \\ J(m^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d-2}{2m^2} & 0 \\ \frac{d-2}{m^2(p^2-4m^2)} & \frac{2(3-d)}{p^2-4m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(m^2) \\ J(m^2) \end{pmatrix}$$

# Разностные уравнения

ИСТОЧНИК ЧИСЛЕННЫХ ОТВЕТОВ С ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТЬЮ

# Разностные уравнения по размерности пространства-времени

- Что если рассмотреть интеграл в размерной регуляризации, как функцию от  $D$ ?

$$I_{n_1, n_2}(D) = \text{---} \bullet \left( \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \right) \bullet \text{---} \rightarrow = \int \frac{d^D k}{[k^2]^{n_1} [(k-q)^2]^{n_2}}$$

- Существуют соотношения связывающие  $I_{n_1, n_2}(D)$  с интегралами  $\sum_i c_i I_{a_i, b_i}(D+2)$
- Используя **IBP** - редукция  $I_{a_i, b_i}(D+2)$  к  $I_{n_1, n_2}(D+2)$ , например для  $I_{1,1}$ :

$$I_{1,1}(D) = 2(1-D)I_{1,1}(D+2)$$

- **Сложность:** зафиксировать “граничные условия” - произвольные периодические функции

# Разностные уравнения по степени пропагаторов

- Если мы умеем изменять степени пропагаторов (IBP), то можно придумать новые уравнения (тут  $q^2 = m^2 = 1$ )

$$J(n) = I_{n,1} = \text{Diagram} = \int \frac{d^D k}{[k^2 - m^2]^n [(k - q)^2 - m^2]}$$

$n, m^2$  (top) and  $1, m^2$  (bottom) labels for the diagram.

- Неоднородная система относительно  $J(n)$ ,  $T(n)$  известно

$$J(n) - \frac{n-d}{3(n-1)} J(n-2) + \frac{2n-d-1}{3(n-1)} J(n-1) = \frac{6+d-4n}{3(2+d-2n)} T(n)$$



# FORM

Специальным задачам – специальные инструменты!

# Главное в системах компьютерной алгебры

- Численная арифметика произвольной точности

$$\frac{172937129378}{1237129371293} + \frac{6899790234}{23453534534} = \frac{6295960045159875146207}{14507528216323041866231}$$

- Полиномиальная арифметика

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

- Мощная система подстановок и pattern matching

$$(x + 1)^3(y + 1)^3 \stackrel{xy \rightarrow 0}{=} 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 3y + 3y^2 + y^3$$

# Mathematica vs FORM

Mathematica



FORM



# Основные особенности FORM

- Все скобки принудительно раскрываются

$$(1 + x)^2 \rightarrow 1 + 2x + x^2$$

- Все функции локальны – применяются к каждому члену отдельно

$$a + b + c + d \rightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$$

- Нет предела по памяти – эффективное кэширование на диск
- Нет проблем (в разумных пределах) с подстановкой длинных выражений

# HPL

специальные функции, которые просто интегрировать

# Обобщение классических полилогарифмов

- Как вычислить интеграл?

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log^2(1-t)\log^2(1+t)}{1+t} dt$$

- Введем набор функций веса 1

$$H_1(x) = -\log(1-x), \quad H_0(x) = \log(x), \quad H_{-1}(x) = \log(1+x)$$

- Старший вес определен по индукции с ядрами  $f_1 = \frac{1}{1-t}, f_0 = \frac{1}{t}, f_{-1} = \frac{1}{1+t}$

$$H_{a_1 a_2 \dots a_n}(x) = \int_0^x f_{a_1}(t) H_{a_2 \dots a_n}(t) dt$$

- Перепишем исходный интеграл

$$F(x) = \int_0^x f_{-1}(t) \cdot (H_1(t))^2 \cdot (H_{-1}(t))^2 dt$$

# И зачем это все?

- **Shuffle algebra!** все перемешивания с сохранением порядка в  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$H_{\vec{a}}(x) \cdot H_{\vec{b}}(x) = \sum_{\vec{c}=\vec{a} \sqcup \vec{b}} H_{\vec{c}}(x)$$



- **Пример:**  $a$  всегда перед  $b$ ,  $y$  перед  $z$ :

$$H_{ab} \cdot H_{yz} = H_{abyz} + H_{aybz} + H_{ayzb} + H_{yazb} + H_{yzab} + H_{ayzb}$$
$$H_a \cdot H_{b_1 \dots b_n} = H_{ab_1 \dots b_n} + H_{b_1 a \dots b_n} + H_{b_1 b_2 a \dots b_n} + \dots + H_{b_1 \dots b_n a}$$

## И зачем это все?

- Тогда наш интеграл принимает следующий вид:

$$F(x) = 4 \int_0^x \frac{dt}{1+t} \left[ H_{-1,-1,1,1}(t) + H_{-1,1,-1,1}(t) + H_{-1,1,1,-1}(t) \right. \\ \left. + H_{1,-1,-1,1}(t) + H_{1,-1,1,-1}(t) + H_{1,1,-1,-1}(t) \right]$$

- Каждый член легко интегрируется по определению  $H_{\vec{a}}(x)$

$$F(x) = 4 \left[ H_{-1,-1,-1,1,1}(x) + H_{-1,-1,1,-1,1}(x) + H_{-1,-1,1,1,-1}(x) \right. \\ \left. + H_{-1,1,-1,-1,1}(x) + H_{-1,1,-1,1,-1}(x) + H_{-1,1,1,-1,-1}(x) \right]$$



# Вычисление и манипуляции с HPL

- Используя недокументированные возможности, при  $x = 0.3$ :

Wolfram Mathematica

```
SpecialFunctions`HarmonicPolyLog[{-1, -1, -1, 1, 1}, 0.3]  
(* result *)  
0.0000138723
```

- Shuffle Algebra и другие свойства используя сторонний пакет **HPL**:

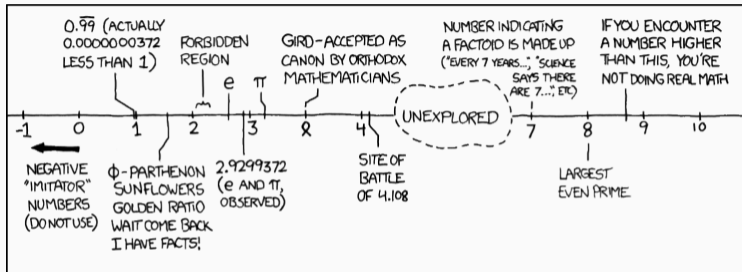
Wolfram Mathematica

```
<<HPL`  
HPLProductExpand[HPL[{1}, x]*HPL[{-1}, x]]  
(* result *)  
HPL[{-1, 1}, x] + HPL[{1, -1}, x]
```

# PSLQ

аналитический ответ из численного с очень высокой точностью

# Зачем нам аналитические ответы?



- Сокращения становятся точными,  $0=0$
- Из аналитического ответа, можно получить численный с произвольной точностью
- Наличие в ответе иррациональных констант  $\pi$ ,  $e$ ,  $\zeta_3$ ,  $\ln 2$  и т.д. связано со спецификой решаемой задачи

# Задача

Из этого:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088

# Задача

Этого:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088  
7915188303682479479081810150776329971510086528551476053524461688650378

# Задача

Или даже этого:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088  
7915188303682479479081810150776329971510086528551476053524461688650378  
0854726224023533725338903400117528023696807374682526333748659204321604  
0947638471239292335292198700532230031436172905320339990465601647316415  
9747107295851269417039008167867793598962773489667664742943791801906795  
6097744698570556436027481038605351047822356036364437047873599943615212  
1779603610663285517425426498087720337488406915665207568733428197785831  
8104783374603967672250611334155688760976703966185306845773777228682061  
2916045194931477968525734823977178395598907926168549944311970459562558  
1023131782866889662719613395882081488725530945611062196040560830842726  
0335491913617156265009965694349649005649377126075247847220107697476615  
1046720534621797394770229568171384547748013171049893910112436781863873  
8169411825608328733188213193692578033114686207005022462924135098410415  
3498098008007214969252690949568253105359054504111866799379760159616925  
9762350543205278508671049288685058213257524459166504759797438440651466  
7305214041645573744149979776125478401397407400575760482760462680475020  
7185913210756379308242730377258293359638113037760848573377982609551262  
9667078732646010020133068730638390109300820421146431423918470375164496

# Задача

Получить:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088  
7915188303682479479081810150776329971510086528551476053524461688650378  
0854726224023533725338903400117528023696807374682526333748659204321604  
0947638471239292335292198700532230031436172905320339990465601647316415  
9747107295851269417039008167867793598962773489667664742943791801906795  
6097744698570556436027481038605351047822356036364437047873599943615212  
1779603610663285517425426498087720337488406915665207568733428197785831  
8104783374603967672250611334155688760976703966185306845773777228682061  
2916045194931477968525734823977178395598907926168549944311970459562558  
1023131782866889662719613395882081488725530945611062196040560830842726  
0335491913617156265009965694349649005649377126075247847220107697476615  
1046720534621797394770229568171384547748013171049893910112436781863873  
8169411825608328733188213193692578033114686207005022462924135098410415  
3498098008007214969252690949568253105359054504111866799379760159616925  
9762350543205278508671049288685058213257524459166504759797438440651466  
7305214041645573744149979776125478401397407400575760482760462680475020  
7185913210756379308242730377258293359638113037760848573377982609551262  
9667078732646010020133068730638390109300820421146431423918470375164496

$$= 1 + \ln 6$$

# Числа рациональные и не очень

Рациональные числа в виде десятичных дробей:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333333333333333333 \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0.14285714285714285714 \dots$$

Для иррациональных чисел однозначного соответствия нет:

$$\pi = 3.1415926535897932385 \dots$$

$$\ln 2 = 0.6931471805599453094 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488 \dots$$

Число возможных композиций быстро растет:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \quad \ln 2 \cdot \ln 3 \dots$$



# Поиск простой и не очень

Попробуем найти ответ  $1 + \log 6$  по известному численному значению  $2.79175946922805\dots$

2.79175946922805

Все Карты Видео Картинки Новости Ещё Настройки Инструменты

Результатов: 2 (0,17 сек.)

研究テーマ/アンケート生成/J48C025M1\_ver13 - Kimura seminar in ...  
minna.ih.otaru-uc.ac.jp/index.php?...ver13 - Перевести эту страницу  
... 1(文字数) = 27.879253198304 TFIIDF(活動) = 9(TF) \* 2.79175946922805(IDF) \* 1(文字数) =  
25.1258352230525 TFIIDF(今) = 11(TF) \* 2.09861228866811(IDF) ...

Ln 6 - Cuánto es el logaritmo natural de 6  
<https://logaritmo.org> Logaritmo Natural - Перевести эту страницу  
 $\ln(6) - 1 = 0.791759469228055$ ,  $\ln(6) + 1 = 2.79175946922805$ ,  $\ln(6) - 2 = -0.208240330771945$ ,  $\ln(6) + 2 = 3.79175946922805$ ,  $\ln(6) - 3 = -...$

Google

Possible closed forms:

$1 + \log(6) \approx 2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088791518830368247 \cdot 947908181015077632997$

$\pi$  root of  $61x^5 + 717x^4 - 853x^3 + 882x^2 - 190x - 410$  near  $x = 0.888645 \approx 2.79175946922805500079617$

$\frac{1214611243\pi}{1366813223} \approx 2.79175946922805500066639$

$\log(x)$  is the natural logarithm

WolframAlpha

Wolfram Alpha

Для  $(1 + \ln 6)^2$  безрезультатно

# Более продвинутый поиск

Пробуем различные преобразования над введенным числом, пока результат не будет совпадать с одной из известных констант имеющихся в базе:

## INVERSE SYMBOLIC CALCULATOR

### Results of the search:

Performing a smart lookup on 2.7917594692280550008:

Function	Result	Precision	Matches
<a href="#">exp(1-K)</a>	.1666666666666666666666666666874622	16	3
<a href="#">1/(1-K)</a>	.55811062655124725372128997	16	1
<a href="#">exp(-K)</a>	.61313240195240386933352322	16	1
<a href="#">K-1</a>	1.7917594692280550008	16	6
<a href="#">abs(K-1)</a>	1.7917594692280550008	16	6
<a href="#">exp(K)</a>	16.309690970754271411958222	16	4
<a href="#">K-2/3</a>	2.1250928025613883341333333	16	1
<a href="#">K-1/2</a>	2.2917594692280550008000000	16	1
<a href="#">K-1/3</a>	2.4584261358947216674666666	16	1

- Наше исходное число

$$K = 1 + \ln 6 \approx 2.7917594692\dots$$

- Найденное преобразование

$$e^{1-K} = \frac{1}{6} \approx 0.166666666666\dots$$

<http://wayback.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html>

- Набор преобразований ограничен, как и набор “узнаваемых” констант
- Опять безрезультатно для  $(1 + \ln 6)^2$

## Время уточнить условия задачи...

Что если сфокусироваться на более узком классе функций?

$$K^n = (1 + \ln 6)^n$$

Можно ли теперь по численному ответу восстановить начальное выражение?

## Время уточнить условия задачи...

Что если сфокусироваться на более узком классе функций?

$$K^n = (1 + \ln 6)^n$$

Можно ли теперь по численному ответу восстановить начальное выражение?

Можно!

## Время уточнить условия задачи...

Что если сфокусироваться на более узком классе функций?

$$K^n = (1 + \ln 6)^n$$

Можно ли теперь по численному ответу восстановить начальное выражение?

Можно!

Для различных степеней  $n$ ,  $K^n$  имеет следующий явный вид:

$$K = 1 + \ln 2 + \ln 3$$

$$K^2 = 1 + 2(\ln 2 + \ln 3) + \ln^2 2 + \ln^2 3 + 2 \ln 2 \ln 3$$

$$K^3 = 1 + 3(\ln 2 + \ln 3) + 3(\ln^2 2 + \ln^2 3 + 2 \ln 2 \ln 3) + \ln^3 2 + \ln^3 3 + 2 \ln^2 2 \ln 3 + 2 \ln 2 \ln^2 3$$

У нас есть **базис** трансцендентных констант - всевозможные произведения  $\ln^a 2 \cdot \ln^b 3$

# PSLQ или как сделать $\pi$ из 3.14159...

Алгоритм PSLQ позволяет найти целочисленное решение  $\vec{c}$  для:

$$c_0 \cdot K + c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 + \dots + c_n \cdot b_n = 0$$

- $\vec{c} = [c_0, c_1, \dots, c_n]$  – целые числа
- $K$  – число, которое мы пытаемся восстановить
- $\vec{b} = [b_1, \dots, b_n]$  – элементы базиса

Применение на практике

- Чем больше элементов в базисе, тем с большей точностью необходимо задать элементы базиса и восстанавливаемую величину
- Элементы базиса должны быть линейно независимы, иначе мы найдем соотношение между элементами базиса, а не между элементами базиса и искомым числом
- Желательно нормировать искомую величину так, чтобы коэффициенты  $c_i$  были минимальны, иначе потребуется большая точность

# Как попробовать самому?

Пример:  $1 \cdot \log 2 + 0 \cdot \log 3 + 1 \cdot \log 5 + 0 \cdot \log 7 + (-1) \cdot \log 10 = 0$

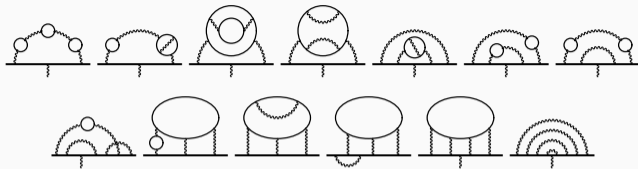
## Python с пакетом `mpmath`

```
>>> from mpmath import *
>>> pslq([log(2),log(3),log(5),log(7),log(10)])
# result
[1, 0, 1, 0, -1]
```

## Wolfram Mathematica

```
FindIntegerNullVector[
  {Log[2], Log[3], Log[5], Log[7], Log[10]}]
(* result *)
{1, 0, 1, 0, -1}
```

# Пример из жизни: четырехпетлевой АММ электрона



```
-1.9122457649264455741526471674398300540608733906587253451713298480060  
3844398065170614276089270000363158375584153314732700563785149128545391  
9028043270502738223043455789570455627293099412966997602777822115784720  
3390641519081665270979708674381150121551479722743221642734319279759586  
0740500578373849607018743283140248380251922494607422985589304635061404  
9225266343109442400023563568812806206454940132249775943004292888367617  
4889923691518087808698970526357853375377696411702453619601349757449436  
1268486175162606832387186747303831505962741878015305514879400536977798  
3694642786843269184311758895811597435669504330483490736134265864995311  
6387811743475385423488364085584441882237217456706871041823307430517443  
0557394596117155085896114899526126606124699407311840392747234002346496  
9531735482584817998224097373710773657404645135211230912425281111372153  
0215445372101481112115984897088422327987972048420144512282845151658523  
6561786594592600991733031721302865467212345340500349104700728924487200  
6160442613254490690004319151982300474881814943110384953782994062967586  
7875385249781946989793132162197975750676701142904897962085050785592...
```

- Доступная точность  $\approx 10000$  знаков, базис функций  $\approx 500$

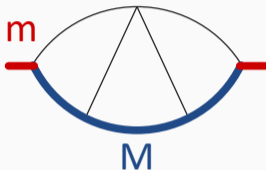




нахождение вида функции по малому числу первых членов разложения

## Диаграмма похожая на аномальный магнитный момент

Рассмотрим трехпетлевую диаграмму с тремя массивными линиями массой  $M$  и внешним импульсом  $q^2 = t^2$  в виде ряда по отношению  $t^2/M^2 \ll 1$ , остальные безмассовые



Интеграл **конечен**, рассмотрим сразу ответ для случая произвольного  $z = t^2/M^2$ :

$$I_{18} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{M^2} \right)^k \left[ 2 \frac{\zeta_3}{k^2} - 2 \frac{\zeta_2}{k^3} + 4 \zeta_2 \frac{S_1(k)}{k^2} + 2 \frac{S_1(k)}{k^4} - 2 \frac{S_1^2(k)}{k^3} + 4 \frac{S_1(k)S_2(k)}{k^2} - 4 \frac{S_{2,1}(k)}{k^2} \right]$$

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}, \quad S_n(k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^n}$$

# Как получить полный ответ из первых членов разложения?

- **Типичная ситуация:** известны лишь несколько членов разложения, а каждый следующий посчитать сложнее, чем все предыдущие

$$I_{18} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{M^2} \right)^k f(k)$$

$$f(1) = 2\zeta_2 + 2\zeta_3$$

$$f(2) = \frac{1}{8} + \frac{5}{4}\zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_3$$

...

$$f(7) = \frac{3337}{26460} + \frac{353}{1715}\zeta_2 + \frac{2}{49}\zeta_3$$

- Можно ли получить **полный ответ** из первых членов разложения  $f(k)$ ?
- Если да, то **сколько** членов нам необходимо и как **уменьшить** их число?

# Построение подходящего базиса

- Функция  $f(k)$  имеет однородный трансцендентный вес  $w = 5$ :

функция	$\zeta_a$	$\frac{1}{n^a}$	$S_a(n)$	$S_{a_1, \dots, a_k}(n)$
вес	$a$	$a$	$a$	$a_1 + \dots + a_k$

- После выделения  $\zeta_i$ , можно сосредоточиться на самой сложной части  $\alpha(k)$ :

$$f(k) = \alpha(k) + \beta(k)\zeta_2 + \gamma(k)\zeta_3$$

- Для  $\alpha(k)$  из “физических” соображений можно выбрать следующий анзац из 7 элементов:

$$\alpha(k) = x_1 \frac{S_1}{k^4} + x_2 \frac{S_1^2}{k^3} + x_3 \frac{S_2}{k^3} + x_4 \frac{S_1^3}{k^2} + x_5 \frac{S_1 S_2}{k^2} + x_6 \frac{S_{2,1}}{k^2} + x_7 \frac{S_3}{k^2}$$

- Чтобы зафиксировать  $x_1 \dots x_7$  достаточно лишь семи членов разложения  $f(1) \dots f(7)$

# Уменьшаем необходимый порядок разложения

В реальных задачах все немножко сложнее, общие правила можно сформулировать так:

- Сложность вычисления каждого последующего члена может быть сложнее предыдущих
- Необходим способ зафиксировать  $x_i \dots x_n$  из недоопределенной системы с числом уравнений меньшим чем  $n$
- Наша цель – решить систему Диафантовых уравнений, но как выбрать нужное решение?

Ищем решение с минимальной нормой!

$$\min \sum_{i=1}^n x_i^2$$

# LLL алгоритм и решение с минимальной нормой

На практике решение с минимальной нормой это:

- часть из  $x_i$  могут быть равны нулю
- ожидаемый ответ имеет разумные выражения для коэффициентов  $x_i$

LLL алгоритм позволяет найти решение нашей системы лишь используя  $\alpha(1) \dots \alpha(4)$ , вместо требования  $\alpha(1) \dots \alpha(7)$  в наивном подходе

- Достаточно использовать лишь первые четыре уравнения, чтобы получить ответ

$$x_1 \dots x_7 = \{2, -2, 0, 0, 4, -4, 0\}$$

- Даже достаточно использовать только уравнения из  $\alpha(4)$  и  $\alpha(5)$ , а предыдущие  $\alpha(1)$ ,  $\alpha(2)$ ,  $\alpha(3)$  использовать для проверки

# Как попробовать самому?

- Mathematica команда `LatticeReduce`
- Python пакеты `fpyl11` и `diophantine`

## Python с пакетом `diophantine`

```
>>> from sympy import Matrix
>>> from diophantine import solve
>>> A = Matrix([[1, 0, 0, 2], [0, 2, 3, 5], [2, 0, 3, 1], [-6, -1, 0, 2],
[0, 1, 1, 1], [-1, 2, 0, 1], [-1, -2, 1, 0]]).T
>>> b = Matrix([1, 1, 1, 1])
>>> solve(A, b)
# result
[-1, 1, 0, 0, -1, -1, -1]
```

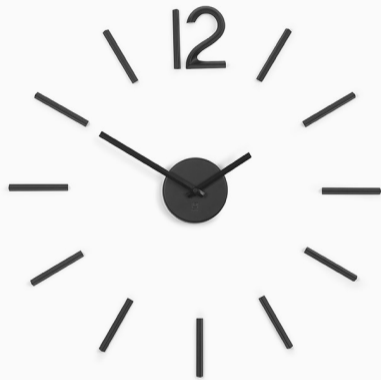
# Finite Fields

от системы уравнений с полиномиальными коэффициентами к нескольким с численными



# Модулярная арифметика в быту

- $\mathbb{Z}_{60}$  секунды, минуты
- $\mathbb{Z}_{12}$  часы
- $\mathbb{Z}_{365}$  дни



- Естественное ограничение на размер целых чисел (например 64 бита)
- Попробовать использовать арифметику  $\mathbb{Z}_p$  с  $p$  укладывающимся в машинную точность

# Идея метода

В большой системе, где одно из уравнений имеет вид:

$$\frac{a_{1,0} + a_{1,1}d + \dots + a_{1,n}d^{n_1}}{b_{1,0} + b_{1,1}d + \dots + b_{1,m}d^{m_1}} J_1 + \dots + \frac{a_{k,0} + a_{k,1}d + \dots + a_{k,n}d^{n_k}}{b_{k,1} + b_{k,1}d + \dots + b_{k,m}d^{m_k}} J_k = 0$$

Мы делаем следующее:

- Из **одной** делаем **много** систем, но которые сильно проще решить:
  - Все переменные ( $d$ ) кладем равными каким-то целым числам
  - Рассматриваем коэффициенты в  $\mathbb{Z}_p$ , дроби переходят в числа конечной длины
- Решаем системы с целочисленными коэффициентами
- Из решений восстанавливаем решение с рациональными коэффициентами

Какие **преимущества**:

- на промежуточных шагах выражения не раздуваются
- системы независимы, можно решать **параллельно**

# Деление по модулю и Китайская Теорема об Остатках

- После замены переменных на числа ( $d \rightarrow c_i$ ) остаются дроби, деление в  $\mathbb{Z}_p$

$$1 = s \cdot p + t \cdot b, \quad \gcd(p, b) = 1 \quad \implies \quad \frac{1}{b} = t \pmod{p}$$

- Вместо вычислений по модулю одного большого числа  $P$  много разных  $p_i$

$$\gcd(p_i, p_j) = 1, \quad P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$$

- Можно восстановить рациональные коэффициенты из большого числа вычислений для разных  $p_i$ , которые могут быть достаточно малыми, чтобы использовать арифметику с машинной точностью

# Ускорение сходимости

или как не ждать сутками...

# Суммируем ряд без ускорения сходимости

$$\zeta_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \lim_{N \rightarrow \infty} S(N), \quad S(N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^3}$$

- Попробуем как конечный ответ использовать частичные суммы
  - Точное значение:  
1.2020569031595942853997381615114499907649862923405
  - Влоб,  $S(N = 50)$ :  
1.2019203097971823811805667457755819484815854781457
  - Влоб,  $S(N = 10^3)$ :  
1.2020564500765681800840194815894640061234081503606
  - Влоб,  $S(N = 10^6)$  (~ 10 секунд):  
1.2020569031590955634444104209278519293431947202163
- Хотим считать **быстро**, **точно** и используя **минимальное число** частичных сумм  $S(N)$

# Включаем ускорение

- К последовательности частичных сумм  $S(1), S(2), \dots, S(N)$  применим преобразование

$$S \approx T(\{S(i)\})$$

- Точное значение:  $\zeta_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$

1.2020569031595942853997381615114499907649862923405

- Преобразование Ричардса,  $N = 50$

1.2020569031595942853997381615114499907650202840371

- **Но!** Преобразования **могут быть затратны** по использованию как памяти, так и процессорного времени
- Не все преобразования одинаково хорошо работают для всех типов сумм

# Примеры суммирований

## Python с пакетом `mpmath`

```
>>> from mpmath import *
>>> mp.dps = 60
>>> nsum(lambda k: 1 / k**3, [1, inf], method='direct',maxterms=50)
# result
1.20192030979718238118056674577558194848158547814574191745552
```

## Python с пакетом `mpmath`

```
>>> from mpmath import *
>>> mp.dps = 60
>>> nsum(lambda k: 1 / k**3, [1, inf], method='richardson',maxterms=50)
# result
1.20205690315959428539973816151144999076502028403710648094398
```

# Sector Decomposition

или считаем численно интегралы с расходимостями



# Суть задачи

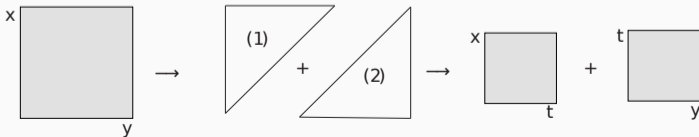
- Вычислить интеграл выделив **расходимость** при  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ , при этом  $f(0, 0)$  конечна

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{f(x, y)}{(x + y)^{2-\varepsilon}}$$

- Разобьем область интегрирования на два сектора  $S_1$  и  $S_2$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{f(x, y)}{(x + y)^{2-\varepsilon}} \left[ \underbrace{\Theta(x - y)}_{S_1} + \underbrace{\Theta(y - x)}_{S_2} \right]$$

- И сделаем замену  $y \rightarrow xt$  в  $S_1$  и  $x \rightarrow yt$  в  $S_2$



# Выделение расходимостей

- В каждом секторе интеграл расходится только по **одной** переменной

$$S_1 = \int_0^1 dx \int_0^1 dt \frac{f(x, xt)}{x^{1-\varepsilon}(1+t)^{2-\varepsilon}}, \quad S_2 = \int_0^1 dy \int_0^1 dt \frac{f(yt, y)}{y^{1-\varepsilon}(1+t)^{2-\varepsilon}}$$

- Выделяем расходимости при помощи правила


$$G = \int_0^1 dt \frac{g(t)}{t^{1+a\varepsilon}} = \int_0^1 dt \frac{g(0) + g(t) - g(0)}{t^{1+a\varepsilon}} = \underbrace{\int_0^1 dt \frac{g(0)}{t^{1+a\varepsilon}}}_{(S)} + \underbrace{\int_0^1 dt \frac{g(t) - g(0)}{t^{1+a\varepsilon}}}_{(R)}$$

- Легко интегрируем **(S)** и раскладываем в ряд по  $\varepsilon$  под знаком интеграла **(R)**

# Искривление контура в ДУ

Решаем дифуры с произвольной точностью и не боясь особенностей

# Дифференциальное уравнение и его решение

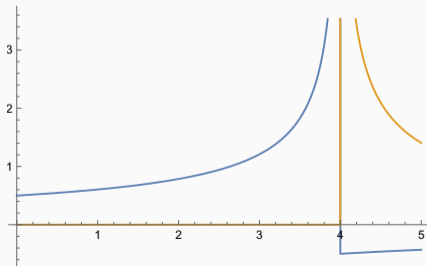
$$f(z) = \int \frac{d^4 k}{[k^2 - m^2]^2 [(k - q)^2 - m^2]}, \quad z = \frac{q^2}{m^2}$$


- Дифференциальное уравнение по переменной  $z = \frac{q^2}{m^2}$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = -\frac{1 + 2f(z)}{4(z - 4)} + \frac{1 - 2f(z)}{4z}$$

Аналитическое решение

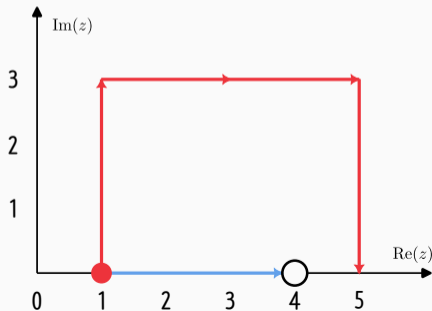
$$f(z) = -\frac{2}{\sqrt{z}\sqrt{z-4}} \operatorname{ArcTanh} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z-4}}$$



# Искавление контура интегрирования

- **Задача:** найти  $f(5)$ , если известно, что  $f(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
- Проблема в разрезе при  $\operatorname{Re}(z) > 4$
- Численное интегрирование ДУ вдоль действительной оси упирается в  $z = 4$
- **Решение:** выход в комплексную плоскость и выбор контура


$$z \in [1; 1 + 3i] \cup [1 + 3i; 5 + 3i] \cup [5 + 3i; 5]$$



## Начальные условия в нуле

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = -\frac{1+2f(z)}{4(z-4)} + \frac{1-2f(z)}{4z}$$

- В точке  $z = 0$  интеграл сильно упрощается и может быть легко вычислен

$$f(0) = \text{oint} = \frac{1}{2}$$


- Проблема:** особая точка ДУ  $z = 0$ , но можно разложить в ряд в нуле

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z + \frac{1}{60}z^2 + \frac{1}{280}z^3 + \frac{1}{1260}z^4 + \frac{1}{5544}z^5 + O(z^6)$$

- Значение  $f(z)$  в регулярной точке  $z = \delta$  из  $\hat{f}(\delta)$ , далее так же как с  $z_0 = 1$

Спасибо за внимание!