

# МЕТОД СУПЕРОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ НАГРЕТЫХ ЯДЕР И АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. I. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАГРЕТЫХ ЯДЕР

*А. А. Джюев\**, *А. И. Вдовин*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Метод супероператоров в пространстве Лиувилля применен к изучению спектральных характеристик нагретых ядер. Показано, что при подходящем определении фермионных супероператоров метод уравнения движения может быть обобщен на случай нагретых ядер. С помощью метода супероператоров для модели ядра с сепарабельзованным остаточным частично-дырочным взаимодействием в форме Ландау–Мигдала получены уравнения теплоквазичастичного приближения случайных фаз, позволяющие рассчитывать спектральные плотности и силовые функции зарядово-обменных и зарядово-нейтральных возбуждений нагретых ядер термодинамически последовательным образом, т. е. без нарушения принципа детального баланса. Для квазичастично-фононной модели ядра предложен термодинамически последовательный способ выхода за рамки приближения случайных фаз путем учета взаимодействия тепловых фононов. С использованием метода Доннелли–Валечки и супероператорного подхода получены выражения для сечений полулептонных слабых реакций с нагретыми ядрами.

The method of superoperators in Liouville space was applied to study spectral properties of hot nuclei. It is shown that properly defined fermionic superoperators allow us to generalize the equation of motion method to hot nuclei. Within the superoperator approach, for the nuclear model with separable particle-hole residual interaction of Landau–Migdal type, we derived the equations of thermal quasiparticle random phase approximation. From these equations one can calculate the spectral densities and strength functions of charge-exchange and charge-neutral excitations of hot nuclei in a thermodynamically consistent way, i.e., without violating the principle of detailed balance. Within the quasiparticle–phonon nuclear model, a thermodynamically consistent way for going beyond the random phase approximation is proposed, which takes into account the interaction of thermal phonons. Using the Donnelly–Walecka method and the superoperator approach, expressions for cross sections of semileptonic weak reactions with hot nuclei are obtained.

PACS: 24.10.Pa; 21.60.-n; 26.50.+x

---

\* E-mail: dzhioev@theor.jinr.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Свойства нагретых ядер, т.е. ядер, в которых энергия возбуждения равномерно перераспределена по многим степеням свободы, вот уже четыре десятилетия остаются предметом активных экспериментальных и теоретических исследований. Несмотря на то, что атомные ядра представляют собой изолированные системы с относительно небольшим числом нуклонов, концепция ядерной температуры используется с середины 1930-х гг., когда методы термодинамики были применены к статистическому описанию процессов образования и распада компаунд-ядер\* [1–4]. Однако лишь в начале 1980-х гг. благодаря усовершенствованию ускорителей тяжелых ионов стало возможно получение нагретых ядер с температурой  $T \lesssim 5$  МэВ ( $0,862$  МэВ  $\approx 10^{10}$  К или  $1$  МэВ  $\approx 11,6T_9$ , где  $T_9 = 10^9$  К) [6, 9]. С тех пор экспериментальное и теоретическое исследование нагретых ядер является важным источником информации о свойствах атомных ядер и ядерной материи в экстремальных состояниях [10].

Изучение нагретых ядер стало особенно актуальным для физики гигантских резонансов (ГР). Обнаружение изовекторного дипольного ГР (ГДР), построенного на высоковозбужденных ( $E \sim 100$  МэВ) состояниях [11], послужило началом систематических исследований коллективного движения в нагретых ядрах. К настоящему времени накоплен обширный материал о свойствах ГДР в нагретых ядрах (см. ссылки в работах [10, 12–15]). Экспериментально было обнаружено, что энергия максимума ГДР, равно как и степень исчерпанности энергетически взвешенного правила сумм, слабо зависит от энергии возбуждения ядра, в то время как ширина ГДР до определенного предела растет с увеличением температуры. Последнее обстоятельство указывает на нарушение гипотезы Бринка–Акселя (ГБА) [16, 17] о независимости силовой функции резонанса от энергии возбужденного состояния.

Теоретическое описание силовой функции мультипольных резонансов в нагретых ядрах, как правило, опирается на температурное обобщение методов и приближений, используемых для холодных ядер. Сегодня большинство расчетов в этой области производятся либо в рамках теории линейного отклика, либо с помощью функций Грина и ограничиваются температурным приближением случайных фаз (ТПСФ) [18, 19] и его различными усовершенствованиями, позволяющими учесть эффект парных корреляций [20, 21], наличие одночастичного континуума [22] или одновременно и то и другое [23, 24]. Самосогласованные расчеты ТПСФ проводятся на основе как сил Скирма, так и релятивистских сил [19, 21].

---

\* Вопрос о границах применимости термодинамического подхода к описанию свойств атомных ядер и способы определения температуры ядра рассматриваются во многих работах (см., например, [5–8]).

Возможность использования диаграммной техники Фейнмана для мацубаровских функций Грина [25] позволяет сделать их основным инструментом при температурном обобщении методов, выходящих за рамки приближения случайных фаз. Для нагретых ядер такое обобщение имело место в рамках теории ядерных полей [26] и теории конечных ферми-систем [27, 28]. Еще один подход в изучении нагретых ядер, использующий формализм мацубаровских функций Грина и так называемое приближение временной блокировки [29], в последнее время интенсивно развивается в работах [30–32]. Фундаментальная проблема, которую стремятся решить в этих исследованиях, — выяснить механизм затухания коллективных возбуждений в нагретых ядрах, в частности научиться рассчитывать для  $T \neq 0$  взаимодействие простых и сложных конфигураций, которое отвечает за фрагментацию силы резонансов, т. е. их ширину, в холодных ядрах. Несмотря на прогресс в этой области, задача описания ширины ГДР в нагретых ядрах до сих пор не является полностью решенной. Так, в работе [32] при сравнении теоретических и экспериментальных значений ширины ГДР в  $^{120,132}\text{Sn}$  показано, что в определенной области температур для правильного описания ширины ГДР помимо взаимодействия простых и сложных конфигураций необходимо учесть и другие факторы, такие как деформация ядра и флуктуация его формы.

Помимо температурных функций Грина существуют и другие статистические подходы, с помощью которых можно изучать свойства нагретых систем. Одним из таких подходов является термополевая динамика (ТПД) [33], которая широко применяется в теории конденсированных сред [34]. По сравнению с методом мацубаровских функций Грина ТПД обладает рядом преимуществ, благодаря которым ее формализм удобен в практическом плане. В частности, время и температура в ТПД являются независимыми переменными, поэтому для изучения зависящих от времени процессов нет необходимости использовать процедуру аналитического продолжения на комплексной временной плоскости. Это свойство ТПД позволяет достаточно просто исследовать спектральные характеристики нагретых систем, т. е. энергию возбужденных состояний и реакцию на внешнее возмущение (силовые функции и спектральные плотности). Кроме того, в ТПД доступны все те рабочие инструменты, которые используются при  $T = 0$ , а именно метод канонических преобразований, теорема Вика, понятие вакуумного состояния и т. п., что удобно для построения различных приближений. Перечисленные преимущества есть следствие особой операторной структуры ТПД, которая возникает благодаря удвоению степеней свободы нагретой системы за счет введения ее фиктивной копии.

Несмотря на эти преимущества и на то, что основные положения ТПД были сформулированы в середине 1970-х гг., в теории нагретых ядер данный формализм не получил достаточно широкого распространения. За исключением наших публикаций число работ, в которых ТПД

применялась при изучении свойств нагретых ядер, весьма ограничено (см. ссылки [6–19] в работе [35]). Причин этого, на наш взгляд, две. Первая — не до конца понятый смысл дополнительных степеней свободы, связанных с фиктивной системой. В исходном варианте ТПД [33] введение фиктивной системы рассматривалось как удобный формальный прием, позволяющий выразить статистическое среднее произвольного оператора в виде среднего по специальным образом построенному тепловому вакууму. Позже фиктивная система стала трактоваться как дырочные состояния, которые присутствуют благодаря взаимодействию системы с термостатом [34]. Такое объяснение, однако, мало что дает с точки зрения обоснования правил соответствия между операторами, действующими в пространстве состояний исходной физической системы, и операторами, действующими в пространстве состояний фиктивной системы. В ТПД такое соответствие *постулируется* в виде правил тильда-сопряжения.

Математически строгую трактовку тепловой вакуум и фиктивная система получили в рамках метода супероператоров, т. е. операторов в пространстве Лиувилля [36]. Было показано соответствие между тепловым вакуумом и оператором матрицы плотности нагретой системы, а удвоение степеней свободы получило обоснование как следствие использования двух наборов операторов в пространстве Лиувилля: первый действует на матрицу плотности слева, а второй — справа. И хотя супероператорная точка зрения на термодинамику в дальнейшем получила распространение наряду с  $C^*$ -алгебраическим подходом [37] (см. также [38]), тем не менее это не способствовало широкому применению метода супероператоров к исследованию свойств нагретых ядер. Препятствием на этом направлении является вторая из вышеупомянутых причин, а именно сложность так называемого условия теплового состояния, которое связывает действие левых и правых супероператоров на тепловой вакуум и, по сути, определяет температуру системы. И в ТПД [33], и в версии метода супероператоров работы [36] для фермионных систем эта связь носит нетривиальный характер и сложным образом зависит от структуры супероператоров. По этой причине обобщение методов, которые используются при изучении свойств основного и возбужденных состояний холодных ядер, на случай нагретых ядер не получило, на наш взгляд, должного развития. В частности, в рамках метода супероператоров не был сформулирован температурный аналог метода уравнения движения [39–41], с помощью которого термодинамически последовательным образом, т. е. без нарушения принципа детального баланса\*, можно было бы рассчитывать реакцию нагретого ядра на внешнее возмущение.

---

\* В случае самосопряженного оператора  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\dagger$  принцип детального баланса связывает вероятности возбуждения и девозбуждения нагретых систем:  $S_{\mathcal{T}}(-E, T) = e^{-E/T} S_{\mathcal{T}}(E, T)$ .

Таким образом, представляет большой интерес обобщить метод супероператоров так, чтобы, с одной стороны, сделать теоретическое описание спектральных характеристик нагретых ядер не сильно отличающимся от расчетов для холодных ядер, а с другой — обеспечить, чтобы оно было термодинамически последовательным в вышеуказанном смысле. Оказалось, что такое обобщение возможно, если определять фермионные супероператоры, как это было сделано одним из авторов в работах по изучению транспорта электронов через коррелированные квантовые системы [42–46].

Как уже отмечалось, благодаря большому объему экспериментальных данных основным объектом изучения теории нагретых ядер являются температурные свойства ГДР. Однако с точки зрения астрофизических приложений значительный интерес представляют температурные свойства и других мод ядерных возбуждений, в частности, зарядово-обменных и зарядово-нейтральных гамов-теллеровских (ГТ) резонансов. Известно, что ГТ-переходы доминируют во многих ядерных реакциях, обусловленных слабым взаимодействием и играющих важную роль на поздней стадии эволюции массивных звезд и взрыве сверхновых [47–49]. Среди таких реакций — захват атомными ядрами электронов и нейтрино,  $\beta$ -распад, рассеяние нейтрино и т. д. К астрофизическим проявлениям перечисленных слабых реакций относят инициирование гравитационного коллапса кора массивной звезды, нейтронизацию вещества во время коллапса, удержание нейтрино при больших плотностях, перенос энергии нейтринным излучением и нейтринный разогрев ударной волны, а также синтез тяжелых элементов на конечном этапе взрыва. Кроме того, слабые реакции с ядрами влияют на нейтринный спектр, который отражает процессы, происходящие в недрах звезды, и поэтому важен для проверки различных механизмов взрыва. Скорости и сечения различных слабых ядерных реакций используются как входные данные при компьютерном моделировании сверхновых [50].

Температура среды, в которой происходят слабые реакции в звездах, меняется от сотен килоэлектронвольт до нескольких мегаэлектронвольт на финальной стадии коллапса. Как было показано Хойлом [51], в условиях плотного вещества звезды происходит достаточно быстрый обмен энергией между материей и  $\gamma$ -квантами, в результате которого устанавливается термодинамическое равновесие между атомными ядрами и электромагнитным излучением. Строго говоря, именно в горячем веществе звезды атомные ядра можно рассматривать как нагретые квантовые системы, так как электромагнитное излучение выступает в роли внешнего макроскопического теплового резервуара, при взаимодействии с которым ядра нагреваются, т. е. происходит тепловое заселение их возбужденных уровней согласно распределению Больцмана.

Тепловое заселение ядерных уровней способно значительно повлиять на протекание слабых ядерных реакций, а также на спектр образующихся нейтрино. Так, для зарядово-обменных реакций (захвата электрона

или нейтрино) уменьшается или полностью исчезает порог реакции, связанный с разностью масс родительского и дочернего ядер. Кроме того, становятся возможными экзотермические процессы, в которых энергия возбужденного ядра передается вылетающему лептону. Все это приводит к увеличению сечений и скоростей реакций. Обсуждается влияние температурных эффектов на протекание взрывного нуклеосинтеза тяжелых и сверхтяжелых ядер в сверхновых [52]. Важно подчеркнуть, что результаты компьютерного моделирования сверхновых во многом зависят от используемых входных данных по слабым ядерным реакциям [53–61]. Поэтому не будет большим преувеличением сказать, что сильная зависимость результатов моделирования сверхновых от данных по слабым ядерным реакциям в значительной степени означает чувствительность к свойствам нагретых ядер.

С микроскопической точки зрения существуют два подхода к расчету вклада ГТ-переходов в сечения и скорости слабых реакций с нагретыми ядрами. Первый предполагает больцмановское усреднение вкладов от термически возбужденных ядерных состояний. Для этого требуется знать силовую функцию ГТ-переходов как для основного, так и для возбужденных ядерных состояний. Сегодня этот подход наиболее полно реализован в рамках крупномасштабных оболочечных расчетов (*large-scale shell model* — *LSSM*) для ядер начала и середины *pf*-оболочки (ядра группы железа) [62–65]. Именно такие ядра доминируют в составе кора звезды на начальном этапе коллапса. Однако для более тяжелых нейтронно-избыточных ядер, которые преобладают в составе кора при плотностях, превышающих  $10^{10}$  г/см<sup>3</sup>, *LSSM*-расчеты в настоящее время невозможны, так как их проведение требует слишком большого конфигурационного пространства, что находится за пределами возможностей современных компьютеров. По этой же причине, а также из-за быстрого роста с увеличением температуры числа термически возбужденных уровней в *LSSM*-расчетах используется гипотеза Бринка–Акселя, чтобы учесть вклад термически возбужденных ядерных состояний в полное сечение и скорость реакции. Но так как экспериментально наблюдаемый температурный рост ширины ГДР [14], а также изменения в его низкоэнергетической части, пигми-резонансе, [66] свидетельствуют о нарушении ГБА, то нет никаких оснований считать, что ГБА верна для силовой функции ГТ-переходов. Совместное использование в *LSSM*-расчетах ГБА и так называемого метода обратных резонансов приводит к недооценке вклада ГТ-переходов с возбужденных состояний, что, в частности, выражается в нарушении принципа детального баланса и правила сумм Икеды.

Второй способ расчета скоростей и сечений слабых реакций с нагретыми ядрами основан на статистическом подходе к ядерной задаче многих тел. В рамках такого подхода сначала рассчитывается зависящая от температуры силовая функция ГТ-переходов, а затем через нее выражаются скорости и сечения слабых реакций. Впервые этот подход, основанный на ТПСФ, был использован в работе [67] при изучении

эффекта температурной разблокировки  $GT_+$ -переходов в нейтронно-избыточных ядрах. В дальнейшем различные варианты самосогласованного ТПСФ применялись для расчета скоростей и сечений захвата электронов [68–71]. Эти расчеты обладают, однако, тем недостатком, что учитывают лишь ту часть  $GT$ -переходов, которая соответствует передаче энергии ядру. Поэтому рассчитываемая методом ТПСФ силовая функция  $GT$ -переходов не удовлетворяет принципу детального баланса, а сечения демонстрируют наличие порога реакции даже при высоких температурах (см., например, рис. 1 в [70] или рис. 3 в [69]).

Реализация статистического подхода в рамках оболочечной модели ядра стала возможна в связи с разработкой квантового алгоритма Монте-Карло (shell-model Monte Carlo — SMMC) [72]. При его применении к расчету силовой функции  $GT_+$ -переходов в ядрах группы железа продемонстрирована зависимость силовой функции от температуры, что указывает на нарушение ГБА. Однако методу SMMC присущ ряд ограничений, связанных с процедурой статистического моделирования и численного обратного преобразования Лапласа.

Таким образом, задача надежного расчета скоростей и сечений слабых ядерных реакций в веществе звезды все еще далека от своего окончательного решения. Поэтому, с точки зрения астрофизических приложений теории нагретых ядер, актуальным является создание подхода, позволяющего рассчитывать скорости и сечения реакций без привлечения гипотезы Бринка–Акселя и без нарушения принципа детального баланса. Так как на различных этапах эволюции звезды в ее веществе образуются самые разнообразные атомные ядра, в том числе и такие, характеристики которых в настоящее время неизвестны, то такой подход не должен быть чрезвычайно затратным с точки зрения вычислительных ресурсов и иметь ограничения по массе ядер, но должен обладать достаточной предсказательной силой.

Данная работа является первой из цикла трех статей, посвященных применению метода супероператоров к изучению свойств нагретых ядер и к расчету сечений и скоростей слабых ядерных реакций с ними в условиях, реализующихся при взрыве коллапсирующих сверхновых. Целью работы является создание на основе метода супероператоров термодинамически последовательного подхода к изучению спектральных характеристик нагретых ядер. Конкретные расчеты для холодных и нагретых ядер в веществе звезды будут приведены в следующих трех статьях.

Структура этой статьи следующая. В разд. 2 излагается формализм метода супероператоров в пространстве Лиувилля и показана его связь с термополевой динамикой. Обсуждаются преимущества используемого определения фермионных супероператоров рождения и уничтожения. В разд. 3 и 4 на основе формализма супероператоров и метода уравнения движения описана общая процедура расчета спектральных плотностей и силовых функций в нагретых ядрах. В разд. 5 приводится общий вид используемого в расчетах ядерного гамильтониана с сепарабельзован-

ным остаточным взаимодействием в форме Ландау–Мигдала. Строится соответствующий тепловой гамильтониан. В разд. 6 и 7 вероятности одночастичных переходов рассчитываются в приближении независимых тепловых квазичастиц и качественно рассмотрен вопрос о температурной эволюции зарядово-нейтральных и зарядово-обменных силовых функций. В разд. 8 и 10 для зарядово-нейтральных и зарядово-обменных возбуждений получены уравнения теплоквазичастичного приближения случайных фаз (ТКПСФ) в модели ядра с сепарабельизованным остаточным частично-дырочным взаимодействием в форме Ландау–Мигдала. В разд. 9 для гамильтониана квазичастично-фононной модели ядра изложен термодинамически последовательный способ выхода за рамки приближения случайных фаз, учитывающий взаимодействие тепловых фононов. В последнем разделе на основе метода Доннелли–Валечки и развитой с помощью метода супероператоров процедуры расчета спектральных плотностей мультипольных операторов получены общие выражения для расчета сечений слабых реакций с нагретыми ядрами в рамках статистического подхода. Выражения для сечений получены как с учетом ненулевого переданного ядру импульса, так и в длинноволновом приближении, когда в сечении слабых реакций доминируют разрешенные фермиевские и ГТ-переходы. В прил. А дан вывод некоторых соотношений из разд. 2, а в прил. Б и В приведены вывод и явный вид секулярных уравнений ТКПСФ, использованных в расчетах структуры и энергии зарядово-нейтральных и зарядово-обменных однофононных возбуждений в нагретых ядрах.

## 1. СПЕКТР НАГРЕТЫХ СИСТЕМ

В квантовой механике задача нахождения спектра холодной системы ( $T = 0$ ) может быть решена двумя способами. Согласно первому основное и возбужденные состояния системы определяются решением стационарного уравнения Шредингера

$$H|i\rangle = E_i|i\rangle, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

т. е. соответствуют собственным функциям гамильтониана  $H$ , в то время как его собственные значения определяют весь спектр энергий возбужденных состояний, начиная с основного —  $|0\rangle$ . Если же нас интересуют только те состояния, которые возбуждаются под влиянием оператора внешнего возмущения  $\mathcal{T}$ , то задачу их нахождения можно свести к вычислению функции распределения силы переходов (силовой функции)

$$S_{\mathcal{T}}(E) = \sum_f |\langle f|\mathcal{T}|0\rangle|^2 \delta(E - E_f + E_0), \quad (2)$$

полюсы (т. е. сингулярности) которой определяют спектр возбужденных состояний относительно основного состояния.

Для нагретой системы роль основного состояния играет равновесное смешанное состояние, которое описывается матрицей плотности  $\rho(T)$  и в структуру которого входят все решения уравнения Шредингера (1). Чтобы определить понятие возбужденного состояния нагретой системы, рассмотрим силовую функцию при  $T \neq 0$ :

$$S_{\mathcal{T}}(E, T) = \sum_{i,f} p_i(T) |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 \delta(E - E_f + E_i). \quad (3)$$

Силовая функция включает статистическое усреднение по всем возможным начальным термически возбужденным состояниям, вероятность нахождения в которых определяется бoльцмановской функцией распределения  $p_i(T) = e^{-E_i/T} / Z(T)$ ,  $Z(T) = \sum_i e^{-E_i/T}$ . По аналогии со случаем  $T = 0$  будем называть спектром нагретой системы полюсы силовой функции (3). Подчеркнем, что при  $T \neq 0$  спектр состоит как из положительных, так и отрицательных энергий. Поэтому словосочетание «возбужденные состояния» при  $T \neq 0$  подразумевает состояния, отличающиеся от равновесного.

В методе функций Грина и теории линейного отклика расчет силовой функции (3) сводится к нахождению функции отклика  $R_{\mathcal{T}\mathcal{T}}(E, T)$ , мнимая часть которой и определяет  $S_{\mathcal{T}}(E, T)$ :

$$S_{\mathcal{T}}(E, T) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - e^{-E/T}} \text{Im} R_{\mathcal{T}\mathcal{T}}(E, T). \quad (4)$$

Формально  $R_{\mathcal{T}\mathcal{T}}(E, T)$  является решением уравнения Бете–Солпитера

$$R = R^0 + R^0 U R, \quad (5)$$

которое включает в себя свободную функцию отклика  $R^0$  и вершинную часть  $U$ , учитывающую взаимодействие. В простейшем приближении  $U$  содержит только одну вершину взаимодействия, и в этом случае решение (5) соответствует температурному приближению случайных фаз [73].

Далее мы покажем, что, используя метод супероператоров, можно построить температурное обобщение уравнения Шредингера (1). Решения этого уравнения определяют полюсы силовой функции (3) и, таким образом, соответствуют возбужденным состояниям (спектру) нагретой системы. Иными словами, метод супероператоров позволяет обобщить на конечные температуры те модели ядра, которые основаны на использовании ядерных волновых функций.

## 2. ФОРМАЛИЗМ СУПЕРОПЕРАТОРОВ

Изложение метода супероператоров начнем с общих определений [36, 74–76]. Рассмотрим гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$ , элементами которого являются векторы состояний рассматриваемой системы. Пространством Лиувилля  $\mathfrak{L}$  называется множество линейных операторов, действующих в  $\mathfrak{H}$  со скалярным произведением и нормой, определенными согласно

$$\langle\langle A|B \rangle\rangle = \text{Tr}\{A^\dagger B\}, \quad |A| = \langle\langle A|A \rangle\rangle^{1/2}. \quad (6)$$

Следуя работе [76], будем использовать дираковские обозначения  $\langle\langle A \rangle\rangle$  и  $\langle\langle A |$ , чтобы различать элементы пространств  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{L}$ . В этих обозначениях статистическое среднее  $\langle\langle A \rangle\rangle$  оператора  $A$  запишем в виде матричного элемента

$$\langle\langle A \rangle\rangle \equiv \text{Tr} \{A\rho\} = \langle\langle A^\dagger | \rho \rangle\rangle = \langle\langle \rho | A \rangle\rangle. \quad (7)$$

Здесь мы учли, что матрица плотности  $\rho$  является эрмитовым оператором и  $\text{Tr} \{A\rho\} = \text{Tr} \{\rho A\}$ .

В  $\mathfrak{L}$ -пространстве уравнение фон Неймана для матрицы плотности ( $\hbar = 1$ )

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = [H, \rho(t)] \quad (8)$$

принимает вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle \rho(t) \rangle\rangle = \langle\langle H\rho(t) \rangle\rangle - \langle\langle \rho(t)H \rangle\rangle. \quad (9)$$

В следующих пунктах мы сформулируем правила, которые позволят переписать последнее соотношение в виде уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle \rho(t) \rangle\rangle = \mathcal{L} \langle\langle \rho(t) \rangle\rangle, \quad (10)$$

где  $\mathcal{L}$  — специальным образом сконструированный супероператор Лиувилля (лиувиллиан), т. е. оператор, действующий на векторы в пространстве Лиувилля или, что то же самое, на операторы в гильбертовом пространстве. Покажем, как получить явный вид лиувиллиана  $\mathcal{L}$ , исходя из гамильтониана системы  $H(a^\dagger, a)$ , записанного в терминах операторов рождения и уничтожения.

**2.1. Базис в пространстве Лиувилля.** Пусть множество векторов  $\{|n\rangle\}$  образуют полный ортонормированный базис в исходном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$ :

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{nm}, \quad (11)$$

следовательно, для произвольного линейного оператора в  $\mathfrak{H}$  справедливо разложение

$$A = \sum_{mn} A_{mn} |m\rangle\langle n|, \quad A_{mn} = \langle m|A|n\rangle. \quad (12)$$

Рассмотрим множество кет-бра операторов  $|m\rangle\langle n|^*$ . Каждому оператору  $|m\rangle\langle n|^*$  сопоставим в пространстве Лиувилля кет-вектор  $\langle\langle mn \rangle\rangle \equiv$

\* Если множество  $\{|n\rangle\}$  состоит из собственных состояний гамильтониана  $H$ , то  $|m\rangle\langle n|^*$  являются собственными состояниями супероператора Лиувилля  $\mathcal{L}(A) \equiv [H, A]$ :

$$\mathcal{L}(|m\rangle\langle n|^*) = E_{mn} |m\rangle\langle n|^*, \quad (13)$$

где  $E_{mn} = E_m - E_n$ . Причем  $|m\rangle\langle n|^*$  и эрмитово-сопряженному оператору  $|n\rangle\langle m|^*$  соответствуют равные по модулю, но имеющие противоположные знаки собственные значения.

$\equiv \| |m\rangle\langle n| \rangle$  и бра-вектор  $\langle mn \| \equiv \langle |m\rangle\langle n| \rangle$ . При таком определении векторы  $\|mn\rangle$  образуют полный ортонормированный базис в  $\mathfrak{L}$ :

$$\langle mn \| m' n' \rangle = \text{Tr} \{ (|m\rangle\langle n|)^\dagger |m'\rangle\langle n'| \} = \langle m|m'\rangle\langle n'|n\rangle = \delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad (14)$$

$$\sum_{mn} \|mn\rangle\langle mn \| = \mathbf{I}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный супероператор в пространстве Лиувилля. Если  $N$  — размерность пространства  $\mathfrak{H}$ , то размерность пространства  $\mathfrak{L}$  равна  $N^2$ .

Рассмотрим скалярные произведения вектора  $\|A\rangle$  и базисных векторов  $\|mn\rangle$ :

$$\langle mn \| A \rangle = \text{Tr} \{ |n\rangle\langle m| A \} = \langle m|A|n\rangle = A_{mn}, \quad (16)$$

$$\langle A \| mn \rangle = \text{Tr} \{ A^\dagger |m\rangle\langle n| \} = \langle n|A^\dagger|m\rangle = A_{mn}^*.$$

Следовательно, используя свойство полноты (15), для произвольного  $A$ , рассматриваемого как вектор в  $\mathfrak{L}$ -пространстве, получим разложение по базисным векторам  $\|mn\rangle$ :

$$\|A\rangle = \sum_{mn} \|mn\rangle\langle mn|A\rangle = \sum_{mn} A_{mn} \|mn\rangle, \quad (17)$$

$$\langle A \| = \sum_{mn} \langle A|mn\rangle\langle mn \| = \sum_{mn} A_{mn}^* \langle mn \|.$$

Полученные разложения согласуются с определением скалярного произведения (6):

$$\langle A \| B \rangle = \sum_{mn} A_{mn}^* B_{mn} = \text{Tr} \{ A^\dagger B \}. \quad (18)$$

Кроме того, из (17) следует, что

$$\|cA\rangle = c\|A\rangle, \quad \langle cA \| = c^* \langle A \|, \quad (19)$$

где  $c$  — комплексное число.

Определим также бра- и кет-векторы, соответствующие единичному оператору  $I$  (11) в  $\mathfrak{H}$ -пространстве:

$$\|I\rangle = \sum_n \|nn\rangle, \quad \langle I \| = \sum_n \langle nn|. \quad (20)$$

С их помощью операция  $\text{Tr} \{ \dots \}$  записывается в виде матричного элемента

$$\text{Tr} \{ A \} = \langle I \| A \rangle = \langle A^\dagger \| I \rangle. \quad (21)$$

В частности, для статистического среднего (7) оператора  $A$  получим

$$\langle A \rangle = \langle I \| A \rho \rangle = \langle A^\dagger \rho \| I \rangle, \quad (22)$$

а также

$$\langle A \rangle = \langle I \| \rho A \rangle = \langle \rho A^\dagger \| I \rangle. \quad (23)$$

Условие нормировки для матрицы плотности можно записать как

$$\text{Tr} \{ \rho \} = \langle I | \rho \rangle = \langle \rho | I \rangle = 1. \quad (24)$$

**2.2. Супероператоры рождения и уничтожения.** В качестве базисных векторов  $\{ |n\rangle \}$  в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  многочастичной квантовой системы будем рассматривать собственные функции оператора числа частиц:

$$|n\rangle = a_{j_1}^\dagger \dots a_{j_n}^\dagger |0\rangle, \quad a_j^\dagger a_j |n\rangle = n_j |n\rangle, \quad n = \sum_j n_j, \quad (25)$$

где операторы рождения и уничтожения  $a_j^\dagger$  и  $a_j$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j^\dagger]_\sigma = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j]_\sigma = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_\sigma = 0. \quad (26)$$

Для фермионов  $\sigma = +1$ , а для бозонов  $\sigma = -1$ .

В пространстве Лиувилля, образованном базисными векторами  $\|mn\rangle$ , определим супероператоры рождения и уничтожения, которые действуют на операторы гильбертова пространства  $\mathfrak{H}$  *слева* \*:

$$\vec{a}_j \|mn\rangle \equiv \|a_j |m\rangle \langle n|\rangle, \quad \vec{a}_j^\dagger \|mn\rangle \equiv \|a_j^\dagger |m\rangle \langle n|\rangle. \quad (27)$$

Так как

$$\langle kl | \vec{a}_j \|mn\rangle = \langle k | a_j |m\rangle \delta_{ln}, \quad \langle kl | \vec{a}_j^\dagger \|mn\rangle = \langle k | a_j^\dagger |m\rangle \delta_{ln}, \quad (28)$$

то действие супероператоров  $\vec{a}_j^\dagger$ ,  $\vec{a}_j$  на бра-вектор  $\langle mn |$  определяется согласно правилу

$$\langle mn | \vec{a}_j = \langle a_j^\dagger |m\rangle \langle n |, \quad \langle mn | \vec{a}_j^\dagger = \langle a_j |m\rangle \langle n |. \quad (29)$$

Супероператоры  $\vec{a}_j^\dagger$ ,  $\vec{a}_j$  являются эрмитово-сопряженными по отношению друг к другу, так как

$$\langle kl | \vec{a}_j^\dagger \|mn\rangle = \langle mn | \vec{a}_j \|kl\rangle^*, \quad (30)$$

и наследуют исходные перестановочные соотношения (26), т. е.

$$[\vec{a}_i, \vec{a}_j^\dagger]_\sigma = \delta_{ij}, \quad [\vec{a}_i, \vec{a}_j]_\sigma = [\vec{a}_i^\dagger, \vec{a}_j^\dagger]_\sigma = 0. \quad (31)$$

Кроме того,  $\vec{a}_j^\dagger \vec{a}_j$  является супероператором числа частиц

$$\vec{a}_j^\dagger \vec{a}_j \|mn\rangle = m_j \|mn\rangle, \quad \langle mn | \vec{a}_j^\dagger \vec{a}_j = m_j \langle mn |. \quad (32)$$

\* Используемое нами определение левых супероператоров  $\vec{a}^\dagger$ ,  $\vec{a}$  не отличается от определения из статьи Шмутца [36]. Однако для правых фермионных супероператоров, как будет показано далее, мы используем более удобное определение. Отметим также, что в [36] левые супероператоры обозначались с помощью символа  $\hat{\phantom{x}}$  («крышечка»), а правые — с помощью символа  $\tilde{\phantom{x}}$  (тильда).

Из (27), (29) и свойства  $a_j = a_j I = I a_j$  непосредственно следует\*

$$\begin{aligned} \vec{a}_j \|I\rangle &= \|a_j\rangle, \quad \vec{a}_j^\dagger \|I\rangle = \|a_j^\dagger\rangle, \\ \langle\langle I | \vec{a}_j &= \langle\langle a_j^\dagger |, \quad \langle\langle I | \vec{a}_j^\dagger = \langle\langle a_j |. \end{aligned} \tag{33}$$

Иными словами, векторы пространства Лиувилля, соответствующие операторам рождения и уничтожения, можно представить как действие супероператоров  $\vec{a}_j^\dagger, \vec{a}_j$  на единичный вектор  $\|I\rangle$ .

Покажем, что данное утверждение справедливо для произвольного оператора  $A$ . Пусть  $A = A(a^\dagger, a)$  — оператор в  $\mathfrak{H}$ -пространстве, записанный в виде полинома от операторов рождения и уничтожения:

$$A(a^\dagger, a) = \sum_{m,n,p,q} c_{p_1 \dots p_m; q_1 \dots q_n} a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_m}^\dagger a_{q_1} \dots a_{q_n}. \tag{34}$$

Условимся называть оператор  $A(a^\dagger, a)$  ферминоподобным (бозоноподобным), если каждое слагаемое разложения (34) содержит нечетное (четное) количество фермионных операторов. Будем предполагать, что разложение (34) не содержит одновременно ферминоподобных и бозоноподобных слагаемых. Последовательно применяя (27), (29) и учитывая свойство (19), легко убедиться в том, что

$$\vec{A} \|mn\rangle = \|A|m\rangle\langle n|\rangle, \quad \langle\langle mn | \vec{A} = \langle\langle A^\dagger |m\rangle\langle n|\rangle, \tag{35}$$

где левый супероператор  $\vec{A}$  строится из (34) путем замены операторов  $a_j^\dagger, a_j$  на левые супероператоры  $\vec{a}_j^\dagger, \vec{a}_j$ , т. е.  $\vec{A} = A(\vec{a}^\dagger, \vec{a})$ .

С помощью (35) и определения скалярного произведения (6) получим выражение для матричных элементов  $\vec{A}$ :

$$\langle\langle kl | \vec{A} \|mn\rangle = \langle k|A|m\rangle\delta_{ln}. \tag{36}$$

Определим также эрмитово-сопряженный к  $\vec{A}$  супероператор  $(\vec{A})^\dagger$ :

$$\langle\langle kl | (\vec{A})^\dagger \|mn\rangle = \langle\langle mn | \vec{A} \|kl\rangle^*. \tag{37}$$

Тогда из равенства  $\langle\langle mn | \vec{A} \|kl\rangle^* = \langle\langle kl | \vec{A}^\dagger \|mn\rangle$  следует, что  $(\vec{A})^\dagger = \vec{A}^\dagger$ .

Используя свойства (35), соответствующие оператору (34), кет- и бра-векторы в  $\mathfrak{L}$ -пространстве можно представить в виде

$$\|A\rangle = \vec{A} \|I\rangle, \quad \langle\langle A | = \langle\langle I | \vec{A}^\dagger. \tag{38}$$

\* Другой способ доказательства соотношений (33) состоит в рассмотрении скалярных произведений правой и левой частей с базисными векторами, например:

$$\langle\langle mn | \vec{a}_i \|I\rangle = \sum_k \langle\langle mn | a_i |k\rangle\langle k|\rangle = \sum_k \langle m|a_i|k\rangle\delta_{kn} = \langle m|a_i|n\rangle = \langle\langle mn | a_i\rangle,$$

откуда следует  $\vec{a}_i \|I\rangle = \|a_i\rangle$ . Аналогично доказываются и другие соотношения.

Отсюда, принимая во внимание свойство (21) векторов  $\|I\rangle$  и  $\langle I|$ , получим

$$\text{Tr}\{A\} = \langle I|\vec{A}\|I\rangle. \quad (39)$$

Следовательно, как и должно быть,  $\text{Tr}\{A\} = 0$  для фермионоподобного  $A$ .

Для произведения операторов имеем  $\overrightarrow{AB} = \vec{A}\vec{B}$  и  $(\vec{A}\vec{B})^\dagger = \vec{B}^\dagger\vec{A}^\dagger$  \*. Поэтому

$$\begin{aligned} \|AB\rangle\rangle &= \vec{A}\vec{B}\|I\rangle = \vec{A}\|B\rangle\rangle, \\ \langle\langle AB| &= \langle\langle I|\vec{B}^\dagger\vec{A}^\dagger = \langle\langle B|\vec{A}^\dagger. \end{aligned} \quad (40)$$

Подчеркнем, что данные правила согласуются с соотношением (19), а также с определением скалярного произведения в пространстве Лиувилля (6):

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle = \langle\langle I|\vec{A}^\dagger\vec{B}\|I\rangle\rangle = \langle\langle I|A^\dagger B\rangle\rangle = \langle\langle B^\dagger A|I\rangle\rangle, \quad (41)$$

где мы учли (39). Используя свойства (40), статистическое среднее (22) оператора  $A$  можно представить в виде матричного элемента соответствующего левого супероператора:

$$\langle\langle A\rangle\rangle = \langle\langle I|\vec{A}\|\rho\rangle\rangle = \langle\langle\rho|\vec{A}\|I\rangle\rangle. \quad (42)$$

С помощью левых супероператоров, определенных согласно (27), (29), кет-вектор  $\|H\rho(t)\rangle\rangle$  в уравнении фон Неймана (9) запишем в виде  $\vec{H}\|\rho(t)\rangle\rangle$ , где  $\vec{H} = H(\vec{a}^\dagger, \vec{a})$  — левый супероператор, соответствующий гамильтониану  $H = H(a^\dagger, a)$ . Но чтобы иметь возможность записать уравнение (9) в виде уравнения Шредингера (10), нужно определить супероператор  $\vec{H}$ , действующий на матрицу плотности *справа*, т. е. такой, что  $\vec{H}\|\rho(t)\rangle\rangle = \|\rho(t)H\rangle\rangle$ . Возникает идея определить правые супероператоры рождения и уничтожения способом, аналогичным рассмотренному выше, т. е. принять

$$\begin{aligned} \vec{a}_j\|mn\rangle\rangle &\equiv \| |m\rangle\langle n| a_j^\dagger \rangle\rangle, \quad \vec{a}_j^\dagger\|mn\rangle\rangle \equiv \| |m\rangle\langle n| a_j \rangle\rangle, \\ \langle\langle mn|\vec{a}_j &\equiv \langle\langle |m\rangle\langle n| a_j \rangle\rangle, \quad \langle\langle mn|\vec{a}_j^\dagger \equiv \langle\langle |m\rangle\langle n| a_j^\dagger \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

Легко показать, что при таком определении  $\vec{a}_j$  и  $\vec{a}_j^\dagger$  являются эрмитово-сопряженными друг к другу и удовлетворяют правилам коммутации (26). Кроме того, для них справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \vec{a}_j\|I\rangle\rangle &= \|a_j^\dagger\rangle\rangle, \quad \vec{a}_j^\dagger\|I\rangle\rangle = \|a_j\rangle\rangle, \\ \langle\langle I|\vec{a}_j &= \langle\langle a_j|, \quad \langle\langle I|\vec{a}_j^\dagger = \langle\langle a_j^\dagger|, \end{aligned} \quad (44)$$

\* Действительно,

$$(\vec{A}\vec{B})^\dagger = (\overrightarrow{AB})^\dagger = \overrightarrow{(AB)}^\dagger = \overrightarrow{B^\dagger A^\dagger} = \vec{B}^\dagger\vec{A}^\dagger.$$

$\bar{a}_j^\dagger \bar{a}_j$  является супероператором числа частиц

$$\bar{a}_j^\dagger \bar{a}_j \|mn\rangle\rangle = n_j \|mn\rangle\rangle, \quad \langle\langle mn | \bar{a}_j^\dagger \bar{a}_j = n_j \langle\langle mn |. \quad (45)$$

Однако при таком определении левые и правые супероператоры коммутируют между собой независимо от того, относятся они к фермионам или к бозонам:

$$[\bar{a}_i, \bar{a}_j^\dagger]_{-1} = [\bar{a}_i, \bar{a}_j^\dagger]_{-1} = [\bar{a}_i, \bar{a}_j]_{-1} = [\bar{a}_i^\dagger, \bar{a}_j^\dagger]_{-1} = 0. \quad (46)$$

Иными словами, определенное выше множество левых и правых супероператоров рождения и уничтожения наследует исходные правила коммутации (26) только для бозонной системы. Для фермионных же систем перестановочные соотношения для супероператоров отличаются от исходных.

Чтобы множество супероператоров наследовало перестановочные соотношения (26), а также чтобы иметь возможность впоследствии применять канонические преобразования, смешивающие левые и правые фермионные супероператоры (так называемое тепловое преобразование Боголюбова), последние нужно определить так, чтобы они антикоммутировали с левыми. Для этой цели воспользуемся методом из работы [76] и модифицируем его. Для общности будем одновременно рассматривать фермионные и бозонные супероператоры. Определение левых супероператоров оставим без изменения (см. (27)), а для правых примем

$$\bar{a}_j \|mn\rangle\rangle \equiv \alpha(m, n) \| |m\rangle \langle n | a_j^\dagger \rangle\rangle, \quad \bar{a}_j^\dagger \|mn\rangle\rangle \equiv \beta(m, n) \| |m\rangle \langle n | a_j \rangle\rangle, \quad (47)$$

где  $\alpha(m, n)$ ,  $\beta(m, n)$  — комплексные числа, зависящие от  $m = \sum_j m_j$  и  $n = \sum_j n_j$ . Потребуем выполнения следующих условий:

- 1) правые операторы рождения и уничтожения подчиняются исходным перестановочным соотношениям (26);
- 2) операторы  $\bar{a}_j^\dagger$  и  $\bar{a}_j$  являются эрмитово-сопряженными по отношению друг к другу, т. е.  $\langle\langle m_1 n_1 | \bar{a}_j^\dagger \| m_2 n_2 \rangle\rangle = \langle\langle m_2 n_2 | \bar{a}_j \| m_1 n_1 \rangle\rangle^*$ ;
- 3) бозонные (фермионные) левые и правые операторы рождения и уничтожения коммутируют (антикоммутируют) друг с другом;
- 4)  $\bar{a}_i^\dagger \| I \rangle\rangle = c \| a_i \rangle\rangle$ , где  $c$  — комплексное число.

В прил. А показано, что перечисленные условия определяют функции  $\alpha(m, n)$  и  $\beta(m, n)$  с точностью до фазового множителя:

$$\beta(m, n) = c(-\sigma)^{m+n}, \quad \alpha(m, n) = c^*(-\sigma)^{m+n+1} \quad \text{и} \quad cc^* = 1. \quad (48)$$

Для бозонных ( $\sigma = -1$ ) правых супероператоров определение (43) соответствует выбору  $c = +1$ . В работе Шмутца [36] фазовый множитель  $c = +1$  выбран и для определения правых фермионных супероператоров. Недостатки такого определения обсуждаются ниже. Следуя нашим работам [42–46], будем использовать  $c = i$  при определении правых фермион-

ных супероператоров. Переход от правых фермионных супероператоров работы [36] к используемым нами осуществляется по следующим правилам:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(определение Шмутца)} & & \text{(наше определение)} \\
 \bar{a}_j & \leftrightarrow & i\bar{a}_j \\
 \bar{a}_j^\dagger & \leftrightarrow & -i\bar{a}_j^\dagger.
 \end{array} \tag{49}$$

При таком выборе фазового множителя правые фермионные супероператоры действуют на базисные кет-векторы пространства Лиувилля по правилу

$$\bar{a}_j \|mn\rangle\rangle = i(-1)^{m+n} \| |m\rangle\langle n| a_j^\dagger \rangle\rangle, \quad \bar{a}_j^\dagger \|mn\rangle\rangle = i(-1)^{m+n} \| |m\rangle\langle n| a_j \rangle\rangle. \tag{50}$$

Определим, как действуют правые фермионные супероператоры на базисные бра-векторы. Для этого отметим, что

$$\begin{aligned}
 \langle\langle kl | \bar{a}_j \|mn\rangle\rangle &= i(-1)^{m+n} \delta_{km} \langle n | a_j^\dagger | l \rangle = -i(-1)^{k+l} \delta_{km} \langle n | a_j^\dagger | l \rangle, \\
 \langle\langle kl | \bar{a}_j^\dagger \|mn\rangle\rangle &= i(-1)^{m+n} \delta_{km} \langle n | a_j | l \rangle = -i(-1)^{k+l} \delta_{km} \langle n | a_j | l \rangle,
 \end{aligned} \tag{51}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
 \langle\langle mn | \bar{a}_j &= -i(-1)^{m+n} \langle\langle |m\rangle\langle n| a_j \|, \\
 \langle\langle mn | \bar{a}_j^\dagger &= -i(-1)^{m+n} \langle\langle |m\rangle\langle n| a_j^\dagger \| .
 \end{aligned} \tag{52}$$

Кроме того,  $\bar{a}_j^\dagger \bar{a}_j$  удовлетворяет свойству (45), т. е. является супероператором числа частиц.

С помощью правых и левых фермионных супероператоров рождения базисные векторы в пространстве Лиувилля можно представить в виде

$$\|mn\rangle\rangle = \mathcal{D}_{mn} \|00\rangle\rangle, \quad \langle\langle mn | = \langle\langle 00 | \mathcal{D}_{mn}^\dagger, \tag{53}$$

где  $\mathcal{D}_{mn} = \sigma_n \bar{a}_{p_1}^\dagger \dots \bar{a}_{p_m}^\dagger \bar{a}_{q_1}^\dagger \dots \bar{a}_{q_n}^\dagger$  и

$$\sigma_n = (-i)^{n^2} = \begin{cases} -i, & n = 2k + 1 \\ +1, & n = 2k. \end{cases} \tag{54}$$

Кет-вектор  $\|00\rangle\rangle$  является вакуумом для  $\bar{a}_j$  и  $\bar{a}_j$ , а  $\langle\langle 00 |$  — для  $\bar{a}_j^\dagger$  и  $\bar{a}_j^\dagger$ . Так как

$$\|nn\rangle\rangle = (-i)^n \bar{a}_{j_1}^\dagger \bar{a}_{j_1}^\dagger \dots \bar{a}_{j_n}^\dagger \bar{a}_{j_n}^\dagger \|00\rangle\rangle, \tag{55}$$

то  $\|I\rangle\rangle$  можно представить в виде

$$\|I\rangle\rangle = \exp \left( -i \sum_j \bar{a}_j^\dagger \bar{a}_j^\dagger \right) \|00\rangle\rangle. \tag{56}$$

Последовательно применяя (50), (52) и учитывая свойство (19), легко убедиться в том, что для фермионоподобного оператора  $A(a^\dagger, a)$  (34) справедливы равенства

$$\begin{aligned}\vec{A} \|mn\rangle\rangle &= i(-1)^{m+n} \| |m\rangle\langle n| A^\dagger \rangle\rangle, \\ \langle\langle mn|\vec{A} &= -i(-1)^{m+n} \langle\langle |m\rangle\langle n| A \|,\end{aligned}\quad (57)$$

где правый супероператор  $\vec{A}$  строится из  $A(a^\dagger, a)$  путем замены  $a_j^\dagger, a_j$  на  $\vec{a}_j^\dagger, \vec{a}_j$  и комплексного сопряжения всех численных коэффициентов, т. е.  $\vec{A} = A^{(*)}(\vec{a}^\dagger, \vec{a})$ , где комплексное сопряжение  $(*)$  действует только на  $c$ -числа. Для бозоноподобного оператора имеем

$$\vec{A} \|mn\rangle\rangle = \| |m\rangle\langle n| A^\dagger \rangle\rangle, \quad \langle\langle mn|\vec{A} = \langle\langle |m\rangle\langle n| A \|.\quad (58)$$

Независимо от того, является ли  $A$  фермионоподобным или бозоноподобным, матричные элементы правого супероператора  $\vec{A}$  можно записать в следующем виде (ср. с (36)):

$$\langle\langle kl|\vec{A} \|mn\rangle\rangle = \sigma_{k+l}^* \sigma_{m+n} \langle n|A^\dagger|l\rangle \delta_{km}.\quad (59)$$

Данное выражение для матричных элементов также непосредственно следует из соотношения (78), полученного ниже. Как и в случае левых супероператоров, из равенства  $\langle\langle mn|\vec{A} \|kl\rangle\rangle^* = \langle\langle kl|\vec{A}^\dagger \|mn\rangle\rangle$  следует, что  $(\vec{A})^\dagger = \vec{A}^\dagger$ .

На основании свойств (57) и равенства (38) получим

$$\|A\rangle\rangle = \vec{A} \|I\rangle\rangle = \sigma_A \vec{A}^\dagger \|I\rangle\rangle, \quad \langle\langle A| = \langle\langle I|\vec{A}^\dagger = \sigma_A^* \langle\langle I|\vec{A},\quad (60)$$

где  $\sigma_A = -i(+1)$  для фермионоподобного (бозоноподобного) оператора  $A(a^\dagger, a)$ . Таким образом, произвольный вектор в пространстве Лиувилля можно представить либо как действие левого супероператора на единственный вектор  $\|I\rangle\rangle$ , либо как действие правого супероператора. Из (60) также следует, что

$$(\vec{A} - \sigma_A \vec{A}^\dagger) \|I\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle I|(\vec{A}^\dagger - \sigma_A^* \vec{A}) = 0\quad (61)$$

и

$$\text{Tr}\{A\} = \langle\langle I|\vec{A} \|I\rangle\rangle = \langle\langle I|\vec{A}^\dagger \|I\rangle\rangle\quad (62)$$

с учетом того, что  $\text{Tr}\{A\} = 0$  для фермионоподобного  $A$ .

Для произведения правых супероператоров имеем  $\vec{A}\vec{B} = \overleftarrow{AB}$  и  $(\vec{A}\vec{B})^\dagger = \vec{B}^\dagger\vec{A}^\dagger$ . Поэтому на основании (60) и (40) можно записать

$$\begin{aligned}\vec{A} \|B\rangle\rangle &= \|AB\rangle\rangle = \sigma_{AB} \vec{B}^\dagger\vec{A}^\dagger \|I\rangle\rangle = \sigma_{AB} \sigma_A^* \vec{B}^\dagger \|A\rangle\rangle, \\ \langle\langle B|\vec{A}^\dagger &= \langle\langle AB| = \sigma_{AB}^* \langle\langle I|\vec{A}\vec{B} = \sigma_{AB}^* \sigma_A \langle\langle A|\vec{B}.\end{aligned}\quad (63)$$

Отметим, что  $\sigma_{AB}\sigma_A^* = i$ , если  $A$  и  $B$  являются ферминоподобными операторами, и  $\sigma_{AB}\sigma_A^* = \sigma_B$ , если один из операторов является бозоноподобным. С помощью (40) и (63) произведение операторов  $AB$  можно представить в виде действия правого или левого супероператора на вектор в пространстве Лиувилля. Важно, что за счет введения правых и левых супероператоров в качестве вектора можно представить любой из сомножителей.

Равенства (63) согласуются с определением скалярного произведения в пространстве Лиувилля (6):

$$\begin{aligned}\langle\langle A|B\rangle\rangle &= \sigma_A^* \sigma_B \langle\langle I|\bar{A}\bar{B}^\dagger|I\rangle\rangle = \sigma_A^* \sigma_B \sigma_{AB} \langle\langle I|BA^\dagger\rangle\rangle = \langle\langle I|A^\dagger B\rangle\rangle = \\ &= \sigma_A^* \sigma_B \sigma_{AB}^* \langle\langle AB^\dagger|I\rangle\rangle = \langle\langle B^\dagger A|I\rangle\rangle.\end{aligned}\quad (64)$$

Здесь учтено, что матричные элементы равны нулю, если  $AB$  является ферминоподобным оператором.

Так как матрица плотности  $\rho$  является бозоноподобным оператором, то статистическое среднее  $\langle\langle A\rangle\rangle = \text{Tr}\{A\rho\}$  отлично от нуля только для бозоноподобного  $A$ . Поэтому из (23) и (63) следует, что

$$\langle\langle A\rangle\rangle = \langle\langle I|\bar{A}^\dagger|\rho\rangle\rangle = \langle\langle \rho|\bar{A}^\dagger|I\rangle\rangle.\quad (65)$$

Таким образом, статистическое среднее оператора  $A$  можно представить в виде матричного элемента либо правого супероператора, либо левого супероператора (см. (42)).

Особо следует подчеркнуть, что соотношения (60) и (63) для фермионных супероператоров выполняются только в том случае, если правые супероператоры рождения и уничтожения определены согласно (50). Если же правые фермионные супероператоры определить согласно Шмутцу [36] (т. е. в (48) принять  $c = 1$ ), то соотношения вида (60) можно получить только для такого оператора  $A(a^\dagger, a)$ , у которого величина  $(-1)^{(m-n+1)(m-n)/2}$  одинакова для всех членов разложения (34). В этом случае

$$\bar{A}|I\rangle\rangle = (-1)^{(\eta+1)\eta/2} \bar{A}^\dagger|I\rangle\rangle,\quad (66)$$

где  $\eta = m - n$  (см. формулу (2.31) в [36]). Помимо этого, при определении правых фермионных супероператоров согласно Шмутцу соотношения, аналогичные (63), выполняются только для таких  $A$  и  $B$ , у которых величина  $(-1)^{(m_B-n_B+1)(m_B-n_B)/2}(-1)^{(m_A+n_B)(m_A+n_A)}$  одна и та же для всех членов разложения операторов  $A$  и  $B$ . Так, если  $B$  сохраняет число частиц (т. е.  $m_B = n_B$ ), то  $\langle\langle AB\rangle\rangle = \bar{B}^\dagger|A\rangle\rangle$ . Однако если правые супероператоры рождения и уничтожения определены согласно (50), то равенство  $\langle\langle AB\rangle\rangle = \bar{B}^\dagger|A\rangle\rangle$  выполняется для *всех* бозоноподобных  $B$ . Следовательно, используемое нами определение (50) правых фермионных супероператоров расширяет область применимости соотношений вида (60) и (63). Кроме того, далее будет показано, что определение правых фермионных

супероператоров согласно (50) существенно облегчает применение метода уравнения движения к исследованию спектральных характеристик нагретой системы.

Используя приведенные выше соотношения для произведения операторов, можно записать  $\|\rho(t)H\| = \vec{H}\|\rho(t)\|$ , где учтено, что гамильтониан  $H(a^\dagger, a)$  является бозоноподобным эрмитовым оператором, следовательно  $\vec{H}^\dagger = \vec{H} = H(\vec{a}^\dagger, \vec{a})$ . Теперь можно записать явный вид супероператора Лиувилля  $\mathcal{L}$  в уравнении Шредингера (10) для вектора  $\|\rho(t)\|$ :

$$\mathcal{L} = \vec{H} - \vec{H} \quad (67)$$

и  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ , т. е. является эрмитовым супероператором.

Укажем на некоторые свойства  $\mathcal{L}$ . Прежде всего покажем, что  $\mathcal{L}$  является оператором трансляции во времени в пространстве Лиувилля. Действительно, если  $A(t)$  — гейзенберговское представление оператора  $A$ , то соответствующее ему гейзенберговское представление левого супероператора запишем в виде

$$\vec{A}(t) = e^{i\vec{H}t} \vec{A} e^{-i\vec{H}t} = e^{i\mathcal{L}t} \vec{A} e^{-i\mathcal{L}t} \quad (68)$$

с учетом того, что  $[\vec{H}, \vec{A}] = 0$ , так как гамильтониан  $H$  является бозоноподобным оператором. Аналогично получается гейзенберговское представление правого супероператора:

$$\vec{A}(t) = e^{i\mathcal{L}t} \vec{A} e^{-i\mathcal{L}t}. \quad (69)$$

Следовательно, гейзенберговское представление оператора  $\mathcal{C}$ , являющегося произвольной линейной комбинацией произведения левых и правых супероператоров, есть

$$\mathcal{C}(t) = e^{i\mathcal{L}t} \mathcal{C} e^{-i\mathcal{L}t}, \quad (70)$$

что и доказывает исходное утверждение.

Из (60) следует, что  $\|I\rangle$  и  $\langle I|$  являются, соответственно, правым и левым собственными состояниями лиувиллиана  $\mathcal{L}$  с нулевым собственным значением:

$$\mathcal{L}\|I\rangle = 0, \quad \langle I|\mathcal{L} = 0. \quad (71)$$

Отсюда следует, что уравнение (10) сохраняет норму матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Tr} \{\rho(t)\} = \langle I| \frac{\partial}{\partial t} \|\rho(t)\rangle = -i \langle I|\mathcal{L}\|\rho(t)\rangle = 0. \quad (72)$$

Если рассматривать матрицу плотности как бра-вектор в пространстве Лиувилля, то соответствующее уравнение Шредингера имеет вид

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(t)| = \langle \rho(t)| \mathcal{L} \quad (73)$$

с учетом свойства (19). Из (10) и (73) следует, что векторы  $\|\rho\rangle$  и  $\langle \rho|$ , соответствующие стационарной (т. е. не зависящей от времени) матрице

плотности, также являются собственными состояниями  $\mathcal{L}$  с нулевым собственным значением:

$$\mathcal{L}|\rho\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle\rho|\mathcal{L} = 0. \quad (74)$$

Итак, мы показали, что в рамках формализма супероператоров нахождение статистических средних сводится к решению уравнению Шредингера (10) (или (73)) при заданном начальном условии\* и последующему расчету матричных элементов от левых (42) или правых (65) супероператоров. При переходе от уравнения фон Неймана к уравнению Шредингера происходит удвоение числа операторов рождения и уничтожения. За счет такого удвоения смешанное состояние системы, описываемое матрицей плотности  $\rho$ , описывается чистым состоянием  $|\rho\rangle\rangle$  в пространстве Лиувилля.

В наших работах [42–46] формализм супероператоров применялся к изучению транспорта электронов через коррелированные квантовые системы. Было показано, что уравнение для матрицы плотности в форме уравнения Шредингера можно получить и в том случае, когда эволюция открытой квантовой системы описывается с помощью уравнения Линдблада\*\*. Однако в этом случае соответствующий супероператор эволюции не является эрмитовым, т. е.  $\mathcal{L}^\dagger \neq \mathcal{L}$ .

**2.3. Операция тильда-сопряжения.** При непосредственной проверке можно убедиться, что определенные выше правые и левые фермионные супероператоры уничтожения удовлетворяют свойству\*\*\*

$$\langle\langle kl|\tilde{a}_j|mn\rangle\rangle = \sigma_{k+l}^* \sigma_{m+n} \langle\langle lk|\tilde{a}_j|nm\rangle\rangle^*, \quad (76)$$

\* Для не зависящего от времени лиувиллиана формальное решение уравнения (10) имеет вид

$$|\rho(t)\rangle\rangle = e^{-i\mathcal{L}(t-t_0)}|\rho(t_0)\rangle\rangle.$$

\*\* В работах [42–46], для того чтобы получить супероператорное представление уравнения Линдблада для матрицы плотности открытой квантовой системы, соотношения (63) использовались в следующем виде:

$$|\mathcal{A}\rho B\rangle\rangle = \sigma_B \vec{A} \vec{B}^\dagger |\rho\rangle\rangle. \quad (75)$$

Произведения вида  $\mathcal{A}\rho B$  содержатся в той части уравнения Линдблада, которая описывает процессы диссипации в системе [77].

\*\*\* Из (50) следует, что

$$\langle\langle kl|\tilde{a}_j|mn\rangle\rangle = i(-1)^{(m+n)} \langle\langle lk|\tilde{a}_j|nm\rangle\rangle^*.$$

Но так как отличными от нуля являются только матричные элементы с  $k+l = m+n-1$ , то

$$\begin{aligned} \sigma_{k+l}^* \sigma_{m+n} &= (+i)^{(k+l)^2} (-i)^{(m+n)^2} = (+i)^{(k+l+m+n)(k+l-m-n)} = \\ &= (+i)^{-2(m+n)+1} = i(-1)^{(m+n)}. \end{aligned}$$

где  $\sigma_{m+n}$  определен согласно (54). Это же соотношение выполняется для правых и левых фермионных супероператоров рождения. Более того, соотношение (76) остается справедливым, если правые и левые супероператоры в нем поменять местами.

Рассмотрим произвольный супероператор  $\mathcal{C}$ , являющийся полиномом от правых и левых супероператоров рождения и уничтожения:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\vec{a}^\dagger, \vec{a}, \vec{a}^\dagger, \vec{a}). \quad (77)$$

Используя соотношение (76) и свойство (15) полноты базисных векторов  $\|mn\rangle$ , нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \langle kl | \mathcal{C} | mn \rangle &= \sigma_{k+l}^* \sigma_{m+n} \langle lk | \tilde{\mathcal{C}} | nm \rangle^* = \\ &= \sigma_{k+l}^* \sigma_{m+n} \langle nm | \tilde{\mathcal{C}}^\dagger | lk \rangle, \end{aligned} \quad (78)$$

где  $\tilde{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{C}^\sim$  — так называемый тильда-сопряженный к  $\mathcal{C}$  супероператор. Операция тильда-сопряжения меняет все правые (левые) супероператоры на левые (правые), а  $c$ -числа переводит в комплексно-сопряженные. Она обладает очевидными свойствами\*:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \mathcal{C}_1 + \alpha_2 \mathcal{C}_2)^\sim &= \alpha_1^* \tilde{\mathcal{C}}_1 + \alpha_2^* \tilde{\mathcal{C}}_2, \\ (\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2)^\sim &= \tilde{\mathcal{C}}_1 \tilde{\mathcal{C}}_2, \\ (\mathcal{C}^\dagger)^\sim &= (\tilde{\mathcal{C}})^\dagger, \\ (\tilde{\mathcal{C}})^\sim &= \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (79)$$

С помощью перечисленных правил каждому супероператору  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\vec{a}^\dagger, \vec{a}, \vec{a}^\dagger, \vec{a})$  ставится в соответствие тильда-сопряженный супероператор  $\tilde{\mathcal{C}}$ , такой, что для произвольных  $\|mn\rangle$  и  $\|kl\rangle$  справедливо равенство (78). Так как  $\vec{A} = (\vec{A})^\sim$  и  $\vec{A} = (\vec{A})^\sim$ , то, применяя операцию тильда-сопряжения к ливиллиану (67), получим важное свойство

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\mathcal{L}. \quad (80)$$

Соотношение (78) устанавливает связь между матричными элементами левого  $\vec{A} = A(\vec{a}^\dagger, \vec{a})$  и правого  $\vec{A} = A^{(*)}(\vec{a}^\dagger, \vec{a})$  супероператоров. Из него, в частности, следует выражение (59) для  $\langle kl | \vec{A} | mn \rangle$ .

Операция тильда-сопряжения тесно связана с операцией  $\mathbb{C}_L$  ливиллевского сопряжения (Liouville conjugation) [78]:

$$\mathbb{C}_L \|mn\rangle = \|nm\rangle, \quad \mathbb{C}_L = \mathbb{C}_L^{-1}. \quad (81)$$

\* Последнее правило, правило двойного тильдования, согласуется с (78), так как

$$\langle kl | (\tilde{\mathcal{C}})^\sim | mn \rangle = \sigma_{k+l}^* \sigma_{m+n} \langle lk | \tilde{\mathcal{C}} | nm \rangle^* = \langle kl | \mathcal{C} | mn \rangle.$$

Действительно, если представить базисный кет-вектор  $\|mn\rangle$  в виде  $\|mn\rangle = \mathcal{D}_{mn}\|00\rangle$ , где супероператор  $\mathcal{D}_{mn}$  определен согласно (53), то тильда-сопряженный кет-вектор можно записать как

$$\|\widetilde{mn}\rangle \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_{mn}\|00\rangle = \sigma_{m+n}^*\|nm\rangle. \quad (82)$$

Аналогично для базисного бра-вектора можно записать

$$\langle\widetilde{mn}| \equiv \langle\langle 00| \widetilde{\mathcal{D}}_{mn}^\dagger = \sigma_{m+n}\langle\langle nm|. \quad (83)$$

Таким образом, для четного  $m+n$  операция лиувиллевского сопряжения совпадает с тильда-сопряжением базисного вектора. Для нечетных  $m+n$  появляется дополнительный фазовый множитель  $+i$ .

С помощью (82) и (83) соотношения (78) можно записать в более компактном виде:

$$\langle\langle kl| \mathcal{C} \|mn\rangle\rangle = \langle\langle \widetilde{kl}| \widetilde{\mathcal{C}} \|\widetilde{mn}\rangle\rangle^* = \langle\langle \widetilde{mn}| \widetilde{\mathcal{C}}^\dagger \|\widetilde{kl}\rangle\rangle. \quad (84)$$

Данные равенства допускают обобщение на случай произвольных векторов. Действительно, пусть  $\|O\rangle$  — вектор в пространстве Лиувилля:

$$\|O\rangle = \sum_{mn} O_{mn}\|mn\rangle, \quad O_{mn} = \langle\langle mn|O\rangle\rangle. \quad (85)$$

Определим тильда-сопряженный вектор  $\|\widetilde{O}\rangle$  как

$$\|\widetilde{O}\rangle = \sum_{mn} O_{mn}^*\|\widetilde{mn}\rangle = \sum_{mn} O_{nm}^*\sigma_{m+n}^*\|mn\rangle, \quad (86)$$

т. е.  $\langle\langle mn|\widetilde{O}\rangle\rangle = O_{nm}^*\sigma_{m+n}^*$ . Из такого определения непосредственно следует, что двукратное тильда-сопряжение не меняет вектор:

$$\|\widetilde{\widetilde{O}}\rangle = \sum_{mn} O_{nm}\sigma_{m+n}\|\widetilde{mn}\rangle = \|O\rangle. \quad (87)$$

Кроме того, из (84) следует

$$\langle\langle O_1| \mathcal{C} \|O_2\rangle\rangle = \langle\langle \widetilde{O}_1| \widetilde{\mathcal{C}} \|\widetilde{O}_2\rangle\rangle^* = \langle\langle \widetilde{O}_2| \widetilde{\mathcal{C}}^\dagger \|\widetilde{O}_1\rangle\rangle. \quad (88)$$

Рассмотрим в качестве  $\mathcal{C}$  единичный супероператор  $\mathbf{I} = \widetilde{\mathbf{I}}$  (15). Тогда из (88) следует, что

$$\langle\langle O_1|O_2\rangle\rangle = \langle\langle \widetilde{O}_1|\widetilde{O}_2\rangle\rangle^* = \langle\langle \widetilde{O}_2|\widetilde{O}_1\rangle\rangle. \quad (89)$$

Будем называть вектор  $\|\theta\rangle$  тильда-инвариантным, если  $\|\theta\rangle = \|\widetilde{\theta}\rangle$ , т. е.  $\langle\langle mn|\theta\rangle\rangle = \langle\langle mn|\widetilde{\theta}\rangle\rangle$  для любого  $\|mn\rangle$ . Если  $A$  — эрмитовый бозоноподобный оператор, то  $\|A\rangle\rangle$  является тильда-инвариантным, так как  $\langle\langle mn|A\rangle\rangle = \langle\langle mn|\widetilde{A}\rangle\rangle = A_{mn}$ . Вакуум  $\|00\rangle$  является тильда-инвариантным по определению. Другими примерами тильда-инвариантных векторов яв-

ляются \*  $\|I\rangle$  и  $\|\rho\rangle$ . Для тильда-инвариантных векторов соотношения (88) принимают вид

$$\langle\langle\theta_1|C|\theta_2\rangle\rangle = \langle\langle\theta_1|\tilde{C}|\theta_2\rangle\rangle^* = \langle\langle\theta_2|\tilde{C}^\dagger|\theta_1\rangle\rangle. \quad (90)$$

Рассмотрим кет-вектор  $\|O\rangle \equiv \mathcal{O}\|\theta\rangle$ , где  $\|\theta\rangle$  — тильда-инвариантный вектор, а  $\mathcal{O}$  — супероператор вида (77). Покажем, что  $\|\tilde{O}\rangle = \tilde{\mathcal{O}}\|\theta\rangle$ , где  $\tilde{\mathcal{O}}$  — супероператор, тильда-сопряженный к  $\mathcal{O}$ . Для произвольного  $\|mn\rangle$  имеем

$$\begin{aligned} \langle\langle mn|\tilde{\mathcal{O}}|\theta\rangle\rangle &= \langle\langle \widetilde{mn}|\mathcal{O}|\theta\rangle\rangle^* = \langle\langle \widetilde{mn}|\mathcal{O}\rangle\rangle^* = \\ &= \sigma_{m+n}^* \langle\langle nm|\mathcal{O}\rangle\rangle^* = \sigma_{m+n}^* \mathcal{O}_{nm}^* = \langle\langle mn|\tilde{\mathcal{O}}\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (91)$$

что и доказывает требуемое равенство. Полученное равенство допускает двоякую трактовку: 1) действие супероператора  $\tilde{\mathcal{O}}$ , тильда-сопряженного к  $\mathcal{O}$ , на  $\|\theta\rangle$  дает вектор  $\|\tilde{O}\rangle$ , тильда-сопряженный к  $\|O\rangle$ ; 2) вектор  $\|\tilde{O}\rangle$  можно представить как результат действия супероператора  $\tilde{\mathcal{O}}$ , тильда-сопряженного к  $\mathcal{O}$ , на  $\|\theta\rangle$ .

Особо подчеркнем, что для произвольного  $\mathcal{C}$  и его тильда-сопряженного партнера  $\tilde{\mathcal{C}}$  равенства (90) справедливы только в том случае, если правые супероператоры рождения и уничтожения определены согласно (50). Если же правые супероператоры рождения и уничтожения определять согласно Шмутцу, то соотношения (90) в общем случае не выполняются. В этом легко убедиться, если представить  $\mathcal{C}$  в виде

$$C = \sum_i c_i \vec{A}_i \vec{B}_i, \quad (92)$$

где  $\vec{A}_i$  ( $\vec{B}_i$ ) — одночлены от левых (правых) супероператоров рождения и уничтожения, а в качестве  $\|\theta\rangle$  взять  $\|I\rangle$ . Обозначим  $\eta_{A_i} = m_{A_i} - n_{A_i}$ ,  $N_{A_i} = m_{A_i} + n_{A_i}$ ,  $\eta_{B_i} = m_{B_i} - n_{B_i}$ ,  $N_{B_i} = m_{B_i} + n_{B_i}$  (см. (34)). Тогда из (66) следует

$$\begin{aligned} \langle\langle I|\vec{A}_i \vec{B}_i|I\rangle\rangle &= (-1)^{(\eta_{A_i}+1)\eta_{A_i}/2} (-1)^{(\eta_{B_i}+1)\eta_{B_i}/2} (-1)^{N_{A_i}N_{B_i}} \langle\langle I|\vec{A}_i \vec{B}_i|I\rangle\rangle^* = \\ &= (-1)^{N_{A_i}N_{B_i}} \langle\langle I|\vec{A}_i \vec{B}_i|I\rangle\rangle^* \end{aligned} \quad (93)$$

с учетом того, что матричные элементы слева и справа отличны от нуля только при  $\eta_{A_i} = \eta_{B_i}$  \*\*. Значение множителя перед правым матричным элементом зависит от конкретного вида  $A_i$  и  $B_i$ . Следовательно,

\* Из тильда-инвариантности матрицы плотности следует, что  $\tilde{\mathcal{L}} = -\mathcal{L}$  даже в том случае, когда  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^\dagger$  [42-46].

\*\* Если

$$\langle\langle I|\vec{A}_i \vec{B}_i|I\rangle\rangle = (-1)^{(\eta_{B_i}+1)\eta_{B_i}/2} \text{Tr}(A_i B_i^\dagger) \neq 0, \quad (94)$$

то  $N_{A_i} + N_{B_i}$  — четное, а  $m_{A_i} + n_{B_i} = n_{A_i} + m_{B_i}$ .

при определении правых супероператоров согласно Шмутцу соотношение (90) между  $\mathcal{C}$  и  $\tilde{\mathcal{C}}$  не выполняется\*.

**2.4. Связь метода супероператоров с термополевой динамикой.**

До сих пор никак не использовался тот факт, что матрица плотности равновесного состояния при температуре  $T$  имеет вполне определенный вид:

$$\rho(T) = Z(T)^{-1} e^{-H/T}, \tag{95}$$

где  $Z(T) = \text{Tr} \{e^{-H/T}\}$  — статистическая сумма. Определим показательную функцию от равновесной матрицы плотности:

$$\rho(T)^\alpha = Z(T)^{-\alpha} e^{-\alpha H/T}. \tag{96}$$

Очевидно, что  $\rho(T)^\alpha$  также является бозоноподобным эрмитовым оператором и  $\rho(T)^\alpha \rho(T)^{1-\alpha} = \rho(T)$ . Кроме того,  $\rho(T)^\alpha$  коммутирует с гамильтонианом. Используя циклическое свойство следа  $\text{Tr} \{ABC\} = \text{Tr} \{CAB\}$  и соотношения (42), (65), статистическое среднее оператора  $A$  можно записать в виде матричного элемента

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \langle\langle \sqrt{\rho(T)} \parallel \vec{A} \parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle = \langle\langle \sqrt{\rho(T)} \parallel \vec{A}^\dagger \parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle. \tag{97}$$

В этом смысле вектор  $\parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle = \vec{\rho}(T)^{1/2} \parallel I \rangle\rangle$  в пространстве Лиувилля описывает равновесное состояние системы при температуре  $T$ . Соотношение (97), т. е. возможность представить равновесное среднее значение оператора  $A$  в виде матричного элемента относительно некоторого состояния, лежит в основании термополевой динамики [33, 34].

Перечислим свойства равновесного состояния  $\parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle$ .

- Пусть векторы  $|n\rangle$  образуют полный набор собственных состояний гамильтониана  $H$ , а  $E_n$  — соответствующие собственные значения. Тогда  $\parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle$  можно записать в следующем виде:

$$\parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(T)}} \sum_n e^{-E_n/2T} \parallel nn \rangle\rangle. \tag{98}$$

- Вектор  $\parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle$  является тильда-инвариантным. Поэтому для произвольного супероператора  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\vec{a}^\dagger, \vec{a}, \vec{a}^\dagger, \vec{a})$  выполняется равенство (см. (90))

$$\langle\langle \sqrt{\rho(T)} \parallel \mathcal{C} \parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle = \langle\langle \sqrt{\rho(T)} \parallel \tilde{\mathcal{C}} \parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle^* = \langle\langle \sqrt{\rho(T)} \parallel \tilde{\mathcal{C}}^\dagger \parallel \sqrt{\rho(T)} \rangle\rangle. \tag{99}$$

\* Если правые супероператоры рождения и уничтожения определены согласно (50), то

$$\langle\langle I \parallel \vec{A}_i \vec{B}_i \parallel I \rangle\rangle = \sigma_{A_i}^* \sigma_{B_i}^* (-1)^{N_{A_i} N_{B_i}} \langle\langle I \parallel \vec{A}_i \vec{B}_i \parallel I \rangle\rangle^*.$$

Для фермионоподобного  $A_i B_i$  матричные элементы слева и справа равны нулю. В противном случае  $\sigma_{A_i}^* \sigma_{B_i}^* (-1)^{N_{A_i} N_{B_i}} = 1$ .

Если  $C$  — фермионоподобный супероператор, то матричные элементы (99) равны нулю.

- Так как  $\|H\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle = \|\sqrt{\rho(T)}H\rangle\rangle$ , то (см. (63))

$$\mathcal{L}\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\mathcal{L} = 0. \quad (100)$$

• Учитывая, что  $\vec{H}$  является бозоноподобным супероператором и поэтому коммутирует с любым правым супероператором, с помощью (63) можно показать, что для произвольного  $A$  справедливы следующие равенства\*:

$$\begin{aligned} \vec{A}\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle &= \sigma_A e^{\mathcal{L}/2T} \vec{A}^\dagger \|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle, \\ \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{A} &= \sigma_A^* \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{A}^\dagger e^{\mathcal{L}/2T}. \end{aligned} \quad (101)$$

Отсюда для гейзенберговских супероператоров (68) и (69) следует, что

$$\begin{aligned} \vec{A}(t)\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle &= \sigma_A \vec{A}^\dagger(t-i/2T)\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle, \\ \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{A}(t) &= \sigma_A^* \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{A}^\dagger(t+i/2T). \end{aligned} \quad (102)$$

• Используя предыдущие свойства, для равновесной корреляционной функции двух гейзенберговских операторов  $\langle\langle A(t)B(t')\rangle\rangle$  получим соотношение\*\*

$$\begin{aligned} \langle\langle A(t)B(t')\rangle\rangle &= \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{A}(t)\vec{B}(t')\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle = \\ &= \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{B}(t')\vec{A}(t+i/T)\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle = \langle\langle B(t')A(t+i/T)\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (103)$$

которое обычно называют условием Кубо–Мартина–Швингера (КМШ) [79, 80]. Условие КМШ однозначно определяет состояние системы, которое описывается равновесной матрицей плотности (95) [81, (2.2.5)]. В равновесном случае корреляционные функции в (103) зависят

\* Приведем доказательство первого равенства:

$$\begin{aligned} \vec{A}\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle &= \vec{A}\vec{\rho}^{-1/2}\|I\rangle\rangle = \sigma_A \vec{\rho}^{-1/2} \vec{A}^\dagger \|I\rangle\rangle = \sigma_A \vec{\rho}^{-1/2} \vec{A}^\dagger \vec{\rho}^{-1/2} \vec{\rho}^{1/2}\|I\rangle\rangle = \\ &= \sigma_A e^{\mathcal{L}/2T} \vec{A}^\dagger \|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Мы учли, что  $\vec{A}$  коммутирует с  $\vec{\rho}^{-1/2}$ , и то, что в равновесном случае оператор, обратный к  $\rho^{1/2}$ , равен  $\rho^{-1/2}$  (см. (96)).

\*\* Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{A}(t)\vec{B}(t')\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle &= \sigma_{AB} \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{B}^\dagger(t')\vec{A}^\dagger(t)\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle = \\ &= \sigma_{AB} \sigma_A^* \sigma_B \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{B}(t'-i/2T)\vec{A}(t+i/2T)\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle = \\ &= \sigma_{AB} \sigma_A^* \sigma_B \langle\langle\sqrt{\rho(T)}\|\vec{B}(t')\vec{A}(t+i/T)\|\sqrt{\rho(T)}\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Если  $AB$  — фермионоподобный оператор, то матричные элементы равны нулю. В противном случае  $\sigma_{AB} \sigma_A^* \sigma_B = 1$ , что и доказывает соотношение (103).

только от разности  $t - t'$ , т. е.  $\langle\langle A(t)B(t') \rangle\rangle = \langle\langle A(t - t')B(0) \rangle\rangle$ . Поэтому в дальнейшем примем  $t' = 0$ .

Соответствие между методом супероператоров и ТПД было впервые отмечено в работе Шмутца [36]. Согласно исходной формулировке [33, 34] ТПД основывается на наблюдении, что статистическое среднее оператора  $A$  можно представить в виде матричного элемента  $\langle 0(T)|A|0(T) \rangle$ , где  $|0(T)\rangle$  — вектор в расширенном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H} \otimes \tilde{\mathfrak{H}}$ , которое определяется как тензорное произведение исходного гильбертова пространства  $\mathfrak{H}$  рассматриваемой квантовой системы и гильбертова пространства  $\tilde{\mathfrak{H}}$  фиктивной системы, идентичной исходной. Все величины, относящиеся к фиктивной системе, помечаются знаком тильды. Идентичность двух квантовых систем, исходной физической и фиктивной, подразумевает, что они обладают одинаковым спектром. Иными словами, если физическая система описывается гамильтонианом  $H$  и  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ , то фиктивная система характеризуется гамильтонианом  $\tilde{H}$ , таким, что  $\tilde{H}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle$ . Базисом в  $\mathfrak{H} \otimes \tilde{\mathfrak{H}}$  является тензорное произведение  $|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \equiv |m\tilde{n}\rangle$ . Представив  $|0(T)\rangle$  в виде разложения

$$|0(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(T)}} \sum_n e^{-E_n/2T} |n\tilde{n}\rangle, \quad (104)$$

получим

$$\langle 0(T)|A|0(T) \rangle = \frac{1}{Z(T)} \sum_n e^{-E_n/T} \langle n|A|n \rangle = \langle\langle A \rangle\rangle \quad (105)$$

с учетом того, что  $\langle \tilde{m}|\tilde{n} \rangle = \delta_{mn}$ , а физический оператор  $A$  действует только на векторы в пространстве  $\mathfrak{H}$ . Наличие тензорного произведения  $|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$  в определении вектора  $|0(T)\rangle$  позволяет выбирать диагональные матричные при вычислении  $\langle 0(T)|A|0(T) \rangle$ .

В оригинальной работе Такахаши и Умэзавы [33] вектор  $|0(T)\rangle$  получил название теплового вакуума, а оператор  $\mathcal{H} = H - \tilde{H}$  назван тепловым гамильтонианом. Отметим, что по построению тепловой вакуум является собственным состоянием теплового гамильтониана с нулевым собственным значением:

$$\mathcal{H}|0(T)\rangle = 0. \quad (106)$$

В ТПД соответствие между операторами в исходном и фиктивном гильбертовом пространствах задается с помощью операции тильды:

$$(AB)^\sim = \tilde{A}\tilde{B}, \quad (aA + bB)^\sim = a^*\tilde{A} + b^*\tilde{B}, \quad (\tilde{A})^\sim = \rho_A A, \quad (107)$$

где  $a, b$  —  $c$ -числа, а  $\rho_A = +1(-1)$  для бозоноподобного (фермионоподобного) оператора. В дополнение к перечисленным правилам в ТПД фигурирует так называемое условие теплового состояния, которое опре-

деляет структуру теплового вакуума при температуре  $T$  (ср. с (101)):

$$A|0(T)\rangle = (-1)^{(F+1)F/2} e^{\mathcal{H}/2T} \widetilde{A}^\dagger |0(T)\rangle, \quad (108)$$

где  $F$  — оператор числа фермионов [34, уравнение (4.2.31)]. В ТПД из условия теплового состояния следует соотношение Кубо–Мартина–Швингера для корреляционных функций.

В работах [33, 34] появление фиктивной тильда-системы рассматривалось как следствие взаимодействия изучаемой физической системы с термостатом. Наличие термостата приводит к существованию в системе некоторого числа возбужденных квантов. Поэтому поглощение энергии может происходить двумя способами: либо за счет возбуждения дополнительных квантов, либо за счет уничтожения дырок, существующих благодаря термостату. Второй процесс описывается как уничтожение тильда-кванта с отрицательной энергией. Иными словами, частицы (дырки) тильда-системы интерпретировались как дырки (частицы) физической системы.

В работе Шмутца [36] показано, что удвоение степеней свободы естественным образом возникает при переходе от описания динамики системы в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  к описанию динамики в пространстве Лиувилля. Соответствие между супероператорными обозначениями Шмутца и обозначениями, используемыми в ТПД, следующее:  $\widetilde{A} \leftrightarrow A$  и  $\widetilde{A} \leftrightarrow \widetilde{A}$  и  $\|mn\rangle \leftrightarrow |m\widetilde{n}\rangle$ . Напомним, однако, что Шмутц при определении правых фермионных супероператоров рождения и уничтожения принял  $c = +1$  в (48). При таком определении вектор  $\|\sqrt{\rho(T)}\rangle$  удовлетворяет условию теплового состояния в виде (108).

Альтернативная интерпретация ТПД была предложена в работе Ошима [37], который установил эквивалентность аксиоматического подхода в теории поля, связанного с использованием  $C^*$ -алгебры, и ТПД. В частности, им была показана связь между операцией тильды и операцией модулярной инволюции  $J$ ,  $JAJ = \widetilde{A}$ . Однако для этого ему потребовалось переопределить фермионные операторы рождения и уничтожения, связанные с фиктивной системой, согласно правилу  $\widetilde{a}_j \rightarrow i\widetilde{a}_j$  и  $\widetilde{a}_j^\dagger \rightarrow -i\widetilde{a}_j^\dagger$ . Отметим, что данное переопределение полностью совпадает с переопределением правых фермионных супероператоров Шмутца, которое было ранее получено нами (см. (49)). Как было показано в работе [37], в результате такого переопределения соотношение  $(\widetilde{A})^\sim = A$  выполняется как для бозоноподобных, так и для ферминоподобных операторов, а условие теплового состояния принимает более простой вид (ср. с (108)):

$$A|0(T)\rangle = \sigma_A e^{\mathcal{H}/2T} \widetilde{A}^\dagger |0(T)\rangle, \quad (109)$$

где  $\sigma_A = +1(-i)$  для бозоноподобного (ферминоподобного) оператора. Как видно, при определении тильдованных фермионных операторов, согласно работе Ошима, правило двойного тильда-сопряжения и условие

теплового состояния принимают в точности такой же вид, какой был получен нами с помощью формализма супероператоров (см. (79) и (101)).

Несмотря на удобство определения тильдованных операторов согласно Ошиму, долгое время приложение ТПД к изучению свойств нагретых ядер ограничивалось исходным вариантом теории (см., например, [82–84]). Преимущество использования переопределенных тильдованных фермионных операторов было впервые продемонстрировано в нашей работе [35]. Было показано, что с их помощью удается получить правильный асимптотический предел для фононных амплитуд при устремлении силы остаточного взаимодействия к нулю. В дальнейшем в наших работах [42–46] переопределение тильдованных (т. е. правых) фермионных операторов получило обоснование в рамках метода супероператоров и продемонстрировало свою эффективность при изучении свойств неравновесных открытых квантовых систем.

В целях удобства и с учетом того факта, что первая работа по термодинамической динамике [33] была опубликована раньше работы Шмутца [36], в дальнейшем будем использовать обозначения и терминологию ТПД. Для того чтобы избежать недоразумений, приведем «словарь» соответствий между двумя вариантами обозначений:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\leftrightarrow A, \\ \vec{\tilde{A}} &\leftrightarrow \tilde{A}, \\ \|\sqrt{\rho(T)}\rangle_{\mathcal{L}} &\leftrightarrow |0(T)\rangle, \\ &\leftrightarrow \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (110)$$

Иными словами, вместо словосочетания «левый (правый) супероператор» будем использовать словосочетание «физический (тильдованный) оператор», вместо «равновесное состояние» — «тепловой вакуум», а вместо «супероператор Лиувилля» — «тепловой гамильтониан». При этом все свойства равновесного состояния  $\|\sqrt{\rho(T)}\rangle$ , перечисленные в начале этого пункта, становятся свойствами теплового вакуума  $|0(T)\rangle$ . Кроме того, справедливыми остаются и правила тильда-сопряжения (79).

Еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем ТПД как один из вариантов реализации метода супероператоров. Изначально ТПД не основывалась на формализме супероператоров, а введение дополнительного гильбертова пространства, связанного с фиктивной системой, носило характер искусственного приема с целью обеспечить выполнение условия (105). Связь между ТПД и методом супероператоров была установлена Шмутцем, который показал, что ТПД соответствует выбору  $c = +1$  при определении правых фермионных супероператоров (48). Выбор  $c = i$  в качестве фазового множителя получил обоснование в наших работах [42–46]. Оказалось, что простое изменение фазового множителя приводит к целому ряду полезных соотношений (см., например, (63) и (90)), которых не существует в ТПД и использование которых позволяет записать условие теплового состояния в более простом виде (ср. (108)

и (109)), а также позволяет применить метод уравнений движения при исследовании спектральных характеристик нагретых систем.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И СИЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

Применим вышеизложенный формализм к вычислению спектральных характеристик нагретых ядер. Будем считать, что функция распределения  $p_i(T)$  в (3) соответствует большому каноническому ансамблю. Для высоковозбужденных ядерных компаунд-состояний переход от микроканонического распределения к большому каноническому основан на методе перевалов при вычислении интегралов, характеризующих статистические средние величины [85, т. 1, с. 275] (см. также [73, 86, 87]). Для нагретых ядер в веществе звезды аргументом в пользу использования функции распределения большого канонического ансамбля является наличие теплового резервуара (фотонный газ) и резервуара частиц, в роли которого выступает окружающий ядра нуклонный газ.

Пусть  $H$  — ядерный гамильтониан, а  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(Z, N)$  — его собственные значения, которые зависят от числа нуклонов в ядре. Полная энергия ядра  $E_i = \mathcal{E}_i + M_p Z + M_n N$  включает в себя массу свободных нуклонов. Определим энергию перехода из состояния  $i$  в состояние  $f$  как  $\Delta E_{if} = E_f - E_i$ . Для зарядово-нейтральных переходов, когда число нуклонов каждого вида не меняется, эта энергия равна

$$\Delta E_{if} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i. \quad (111)$$

В зарядово-обменных переходах  $n \rightarrow p$  или  $p \rightarrow n$  число нуклонов каждого вида меняется на единицу, следовательно,

$$\Delta E_{if} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i \pm \Delta M_{np}. \quad (112)$$

Здесь  $\Delta M_{np} = M_n - M_p = 1,29$  МэВ — разница масс нейтрона и протона, а верхний (нижний) знак соответствует переходу  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ). Энергия перехода с возбужденных ядерных состояний может быть как положительной, так и отрицательной. Условимся в дальнейшем обозначать переходы с положительной энергией как  $\uparrow$ -переходы (переходы вверх), а переходы с отрицательной энергией как  $\downarrow$ -переходы (переходы вниз).

Для статистического ансамбля ядер, находящихся в тепловом равновесии с резервуаром энергии и частиц при температуре  $T$ , вероятность обнаружить ядро  ${}^Z_N A$  в  $i$ -м возбужденном состоянии задается функцией распределения большого канонического ансамбля

$$p(\mathcal{E}_i, Z, N) = \exp \left\{ -\frac{\mathcal{E}_i - \mu_n N - \mu_p Z}{T} \right\} / Z(T), \quad (113)$$

где  $Z(T)$  — статистическая сумма, а  $\mu_{n,p}$  — химические потенциалы нейтронов и протонов. Для произвольных операторов  $A$  и  $B$  определим спектральную плотность соответствующей корреляционной функции

$$S_{AB}(E, T) = \sum_{Z, N} \sum_{i, f} p(\mathcal{E}_i, Z, N) \langle f | B | i \rangle \langle f | A | i \rangle^* \delta(E - \Delta E_{if}). \quad (114)$$

Для зарядово-нейтральных операторов матричные элементы рассчитываются между состояниями с одинаковым числом нуклонов каждого типа. В случае же зарядово-обменных операторов число нуклонов каждого типа в начальном и конечном состояниях отличается на единицу\*. При  $A = B$  выражение (114) переходит в определение силовой функции

$$S_A(E, T) = \sum_{Z, N} \sum_{i, f} p(\mathcal{E}_i, Z, N) B_{if}(A) \delta(E - \Delta E_{if}), \quad (115)$$

где  $B_{if}(A) = |\langle f | A | i \rangle|^2$  — вероятность (сила) перехода  $i \rightarrow f$ . При  $T \neq 0$  за счет  $\downarrow$ -переходов с термически возбужденных состояний спектральная плотность и силовая функция имеют полюса (сингулярности) в отрицательной области энергий, т. е. при  $E < 0$ . Тепловые эффекты приводят также к появлению низкоэнергетических полюсов, связанных с переходами между близко расположенными возбужденными состояниями ядра.

Используя интегральное представление дельта-функции  $\delta(\varepsilon) = (1/2\pi) \int e^{i\varepsilon t} dt$ , выразим спектральную плотность (114) через корреляционную функцию. Для зарядово-нейтральных операторов получим

$$S_{AB}(E, T) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{iEt} \langle\langle A^\dagger(t) B(0) \rangle\rangle. \quad (116)$$

В случае же зарядово-обменных операторов связь между спектральной плотностью и корреляционной функцией в большом каноническом ансамбле принимает вид

$$S_{AB}(E, T) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(E \mp \Delta_{np})t} \langle\langle A^\dagger(t) B(0) \rangle\rangle, \quad (117)$$

где верхний (нижний) знак соответствует переходам  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ). Величина  $\Delta_{np} = \Delta\mu_{np} + \Delta M_{np}$  ( $\Delta\mu_{np} = \mu_n - \mu_p$ ) в экспоненте возникает как следствие применения большого канонического ансамбля и изменения числа протонов и нейтронов в зарядово-обменных переходах. Отме-

\* Будем считать, что протон имеет проекцию изоспина  $-1/2$ , а нейтрон  $+1/2$ . Тогда зарядово-обменные операторы переходов  $n \rightarrow p$  содержат понижающий изоспин оператор  $t_-$  ( $t_- |n\rangle = |p\rangle$ ), а операторы переходов  $p \rightarrow n$  содержат повышающий изоспин оператор  $t_+$  ( $t_+ |p\rangle = |n\rangle$ ). Также отметим, что если  $A$  соответствует переходу  $n \rightarrow p$ , то  $A^\dagger$  является оператором перехода  $p \rightarrow n$ , и наоборот.

тим, что при использовании функции распределения большого канонического ансамбля гейзенберговское представление операторов содержит химические потенциалы, т. е.

$$A(t) = e^{i(H - \mu_n N - \mu_p Z)t} A e^{-i(H - \mu_n N - \mu_p Z)t}, \quad (118)$$

где  $N$  ( $Z$ ) — оператор числа нейтронов (протонов).

Из соотношения КМШ (103) для корреляционных функций следует, что спектральные плотности удовлетворяют свойству

$$S_{B^\dagger A^\dagger}(-E, T) = e^{-E/T} S_{AB}(E, T) \quad (119)$$

для зарядово-нейтральных операторов и

$$S_{B^\dagger A^\dagger}(-E, T) = e^{-(E \mp \Delta_{np})/T} S_{AB}(E, T) \quad (120)$$

для зарядово-обменных операторов. Как и ранее, верхний (нижний) знак соответствует случаю, когда  $S_{AB}(E, T)$  является спектральной плотностью операторов переходов  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ), следовательно,  $S_{B^\dagger A^\dagger}(E, T)$  является спектральной плотностью операторов «обратных» переходов  $n \rightarrow p$  ( $p \rightarrow n$ ) (см. сноску на с. 1036). Соотношения (119) и (120) будем в дальнейшем называть принципом детального баланса для спектральных плотностей. Подчеркнем, что последнее соотношение, связывающее спектральные плотности  $n \rightarrow p$  и  $p \rightarrow n$  зарядово-обменных операторов, выполняется только в большом каноническом ансамбле. В отличие от него соотношение (119) справедливо и в каноническом ансамбле.

Воспользуемся (97) и запишем спектральные плотности (116), (117) в виде фурье-образа от среднего по тепловому вакууму:

$$S_{AB}(E, T) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{iEt} \langle 0(T) | A^\dagger(t) B(0) | 0(T) \rangle \quad (121)$$

для зарядово-нейтральных операторов и

$$S_{AB}(E, T) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(E \mp \Delta_{np})t} \langle 0(T) | A^\dagger(t) B(0) | 0(T) \rangle \quad (122)$$

для зарядово-обменных операторов. Напомним, что в исходных супероператорных обозначениях  $A$  и  $B$  являются левыми супероператорами, а тепловой вакуум является вектором в пространстве Лиувилля (см. (110)).

Получим энергетическое представление для спектральных плотностей (121) и (122), исходя из того, что оператором трансляции во времени в расширенном гильбертовом пространстве (т. е. пространстве Лиувилля) является тепловой гамильтониан  $\mathcal{H}$  (см. (70))\* . Так как  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$ , то

\* Так как вычисления проводятся в большом каноническом ансамбле, то тепловой гамильтониан содержит химические потенциалы:

$$\mathcal{H} = (H - \mu_p Z - \mu_n N) - (\tilde{H} - \mu_p \tilde{Z} - \mu_n \tilde{N}). \quad (123)$$

все собственные значения теплового гамильтониана вещественны. Кроме того, каждому собственному состоянию теплового гамильтониана  $\mathcal{H}$  с положительной энергией

$$\mathcal{H}|\mathcal{O}_k\rangle = \mathcal{E}_k|\mathcal{O}_k\rangle \quad (124)$$

соответствует тильда-сопряженное собственное состояние с отрицательной энергией

$$\mathcal{H}|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle = -\mathcal{E}_k|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle. \quad (125)$$

Действительно, так как  $\tilde{\mathcal{H}} = -\mathcal{H}$  (см. (80)), то с учетом (88) и (89) для произвольного вектора  $|mn\rangle$  имеем

$$\begin{aligned} \langle mn|\mathcal{H}|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle &= \langle \widetilde{mn}|\tilde{\mathcal{H}}|\mathcal{O}_k\rangle^* = -\langle \widetilde{mn}|\mathcal{H}|\mathcal{O}_k\rangle^* = \\ &= -\mathcal{E}_k\langle \widetilde{mn}|\mathcal{O}_k\rangle^* = -\mathcal{E}_k\langle mn|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle, \end{aligned} \quad (126)$$

что и доказывает (125). В дальнейшем собственные состояния теплового гамильтониана с положительной (отрицательной) энергией будем называть нетильдованными (тильдванными) состояниями.

Свойство полноты собственных состояний теплового гамильтониана позволяет записать спектральную плотность зарядово-нейтральных операторов в виде следующего разложения:

$$\begin{aligned} S_{AB}(E, T) &= \sum_k \left\{ \langle \mathcal{O}_k|B|0(T)\rangle \langle \mathcal{O}_k|A|0(T)\rangle^* \delta(E - \mathcal{E}_k) + \right. \\ &\quad \left. + \langle \tilde{\mathcal{O}}_k|B|0(T)\rangle \langle \tilde{\mathcal{O}}_k|A|0(T)\rangle^* \delta(E + \mathcal{E}_k) \right\}. \end{aligned} \quad (127)$$

Аналогичное разложение для зарядово-обменных операторов имеет вид

$$\begin{aligned} S_{AB}(E, T) &= \sum_k \left\{ \langle \mathcal{O}_k|B|0(T)\rangle \langle \mathcal{O}_k|A|0(T)\rangle^* \delta(E - \mathcal{E}_k \mp \Delta_{np}) + \right. \\ &\quad \left. + \langle \tilde{\mathcal{O}}_k|B|0(T)\rangle \langle \tilde{\mathcal{O}}_k|A|0(T)\rangle^* \delta(E + \mathcal{E}_k \mp \Delta_{np}) \right\}, \end{aligned} \quad (128)$$

где, как и ранее, верхний (нижний) знак соответствует переходам  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ). Особо отметим тот факт, что полюсы зарядово-обменных спектральных плотностей сдвинуты относительно собственных значений теплового гамильтониана на величину  $\Delta_{np}$ .

Формально выражения (127), (128) имеют такой же вид, как спектральные плотности при нулевой температуре: они содержат однократное суммирование по собственным состояниям (теплового) гамильтониана, а роль основного состояния играет тепловой вакуум. Положение полюсов спектральной плотности определяется собственными значениями теплового гамильтониана, а ее интенсивность зависит от амплитуды переходов из теплового вакуума на собственные состояния теплового гамильтониана. Отличие от случая  $T = 0$  состоит в том, что спектр теплового гамильтониана содержит как из положительных, так и отри-

цательных собственных значений и в принципе зависит от температуры. От температуры зависят и амплитуды переходов.

При действии обеих частей равенства (109) на собственные функции теплового гамильтониана и с учетом того, что  $\langle \mathcal{O}_k | \widetilde{A}^\dagger | 0(T) \rangle = \langle \widetilde{\mathcal{O}}_k | A^\dagger | 0(T) \rangle^*$  (см. (88)), получим формулировку условия теплового состояния

$$\langle \widetilde{\mathcal{O}}_k | A | 0(T) \rangle = \sigma_A e^{-\mathcal{E}_k/2T} \langle \mathcal{O}_k | A^\dagger | 0(T) \rangle^*, \quad (129)$$

из которой следует выполнение принципа детального баланса для спектральных плотностей в энергетическом представлении (127) и (128). Как и должно быть, при  $T = 0$  амплитуды переходов на тильдованные состояния равны нулю. Поэтому в холодных ядрах спектральные плотности зарядово-нейтральных операторов обращаются в нуль при  $E < 0$ . Для  $T = 0$  спектральная плотность операторов переходов  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ) обращается в нуль при  $E < \Delta_{np}$  ( $E < -\Delta_{np}$ ), т. е. величина  $\Delta_{np}$  ( $-\Delta_{np}$ ) играет роль эффективного порога для зарядово-обменных реакций на основном состоянии.

Пользуясь (127), (128), запишем энергетическое представление силовых функций (115) в следующем виде:

$$S_A(E, T) = \sum_k \left\{ B_k(A) \delta(E - \mathcal{E}_k) + \widetilde{B}_k(A) \delta(E + \mathcal{E}_k) \right\} \quad (130)$$

для зарядово-нейтрального оператора и

$$S_A(E, T) = \sum_k \left\{ B_k(A) \delta(E - \mathcal{E}_k \mp \Delta_{np}) + \widetilde{B}_k(A) \delta(E + \mathcal{E}_k \mp \Delta_{np}) \right\} \quad (131)$$

для зарядово-обменного оператора. Величины

$$\begin{aligned} B_k(A) &= |\langle \mathcal{O}_k | A | 0(T) \rangle|^2, \\ \widetilde{B}_k(A) &= |\langle \widetilde{\mathcal{O}}_k | A | 0(T) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (132)$$

обозначают силу (вероятность) перехода с теплового вакуума на собственные состояния теплового гамильтониана. Полюсы  $E_k$ ,  $\widetilde{E}_k$  силовых функций будем называть энергией перехода.

В зарядово-нейтральных процессах энергия перехода совпадает с энергией состояния

$$E_k = \mathcal{E}_k, \quad \widetilde{E}_k = -\mathcal{E}_k. \quad (133)$$

Поэтому возбуждению нагретого ядра в зарядово-нейтральном процессе соответствует  $\uparrow$ -переход на нетильдованное состояние теплового гамильтониана, а девозбуждению —  $\downarrow$ -переход на тильдованное состояние. Согласно (129) вероятности возбуждения и девозбуждения связаны принципом детального баланса

$$\widetilde{B}_k(A) = e^{-E_k/T} B_k(A^\dagger). \quad (134)$$

Для зарядово-обменных процессов энергия перехода отличается от энергии состояния на величину эффективного порога

$$E_k^{(\pm)} = \mathcal{E}_k \pm \Delta_{np}, \quad \tilde{E}_k^{(\pm)} = -\mathcal{E}_k \pm \Delta_{np}, \quad (135)$$

где знак  $+$  ( $-$ ) соответствует переходу  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ). Поэтому часть нетильдованных (тильдованных) состояний может оказаться при отрицательной (положительной) энергии перехода. При этом каждому переходу  $p \rightarrow n$  соответствует обратный переход  $n \rightarrow p$  на тильда-сопряженное состояние. Энергии таких переходов различаются знаком  $\tilde{E}_k^{(\pm)} = -E_k^{(\mp)}$ , а вероятности связаны принципом детального баланса

$$\tilde{B}_k(A) = e^{-(E_k^{(\pm)} \mp \Delta_{np})/T} B_k(A^\dagger). \quad (136)$$

Еще раз напомним, что соотношение (136) между вероятностями возбуждения и девозбуждения нагретого ядра в зарядово-обменных переходах справедливо только в большом каноническом ансамбле. В каноническом ансамбле аналогичная связь имеет более сложный вид и включает отношение статистических сумм родительского и дочернего ядер\* [88, формула (8)].

Итак, мы показали, что в рамках формализма супероператоров задача расчета спектральных плотностей и силовых функций в нагретом ядре сводится к нахождению собственных состояний (т. е. диагонализации) теплового гамильтониана. Как и при  $T = 0$ , данная задача для большинства систем с взаимодействием может быть решена только приближенно. Достоинством формализма является то, что для нахождения собственных состояний теплового гамильтониана мы можем применять методы, используемые при нулевой температуре: приближение независимых квазичастиц, приближение случайных фаз и т. д. В то же время, как будет показано в следующем разделе, процедура диагонализации теплового гамильтониана имеет свои особенности, связанные с требованием выполнения условия теплового состояния (129).

В завершение этого пункта приведем известные соотношения для спектральных плотностей, которые непосредственно следуют из разложений (127) и (128) с учетом того, что  $[A, \tilde{H}] = 0$ , а именно

$$S_{[A, H]B}(E, T) = ES_{AB}(E, T) \quad (137)$$

для зарядово-нейтральных операторов и

$$S_{[A, H]B}(E, T) = (E \mp \Delta_{np})S_{AB}(E, T) \quad (138)$$

для зарядово-обменных операторов. В последнем равенстве верхний (нижний) знак соответствует переходам  $p \rightarrow n$  ( $n \rightarrow p$ ). Как известно,

---

\* Полученное в [88] выражение для детального баланса переходит в (136), если отношение статистических сумм родительского и дочернего ядер принять равным единице, а разность масс ядер считать равной эффективному порогу.

указанная связь спектральных плотностей, содержащих в качестве аргумента оператор  $A$  и его коммутатор с гамильтонианом, является основой для построения цепочки уравнений для двухвременных температурных функций Грина [89]. Здесь эта связь приводится лишь для того, чтобы показать ее справедливость в рамках метода супероператоров.

#### 4. МЕТОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИ $T \neq 0$

Чтобы подчеркнуть особенности, присущие диагонализации теплового гамильтониана, воспользуемся методом уравнения движения [39–41]. Пусть векторы  $|\mathcal{O}_k\rangle$  в расширенном гильбертовом пространстве (т. е. в пространстве Лиувилля) являются собственными состояниями теплового гамильтониана:

$$\mathcal{H}|\mathcal{O}_k\rangle = \mathcal{E}_k|\mathcal{O}_k\rangle.$$

Определим (супер)операторы  $\mathcal{O}_k^\dagger$  и  $\mathcal{O}_k$  такие, что

$$|\mathcal{O}_k\rangle = \mathcal{O}_k^\dagger|0(T)\rangle$$

и

$$\mathcal{O}_k|0(T)\rangle = 0 \quad \text{для всех } k,$$

где  $|0(T)\rangle$  — тепловой вакуум, т. е.  $\mathcal{H}|0(T)\rangle = 0$ . В частности, можно принять  $\mathcal{O}_k^\dagger = |\mathcal{O}_k\rangle\langle 0(T)|$  и  $\mathcal{O}_k = |0(T)\rangle\langle \mathcal{O}_k|$ . Так как

$$[\mathcal{H}, \mathcal{O}_k^\dagger]|0(T)\rangle = \mathcal{E}_k\mathcal{O}_k^\dagger|0(T)\rangle,$$

то, умножив это равенство слева на произвольный вектор  $\langle 0(T)|\delta\mathcal{O}$ , придем к уравнению для  $\mathcal{O}_k^\dagger$ :

$$\langle 0(T)|[\delta\mathcal{O}, [\mathcal{H}, \mathcal{O}_k^\dagger]]|0(T)\rangle = \mathcal{E}_k\langle 0(T)|[\delta\mathcal{O}, \mathcal{O}_k^\dagger]|0(T)\rangle. \quad (139)$$

Согласно доказанным ранее свойствам (см. с. 1028 и 1038)  $\mathcal{H}|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle = -\mathcal{E}_k|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle$ , где  $|\tilde{\mathcal{O}}_k\rangle = \tilde{\mathcal{O}}_k^\dagger|0(T)\rangle$ . Кроме того,  $\tilde{\mathcal{O}}_k|0(T)\rangle = 0$ .

В том, что  $\tilde{\mathcal{O}}_k^\dagger$  также удовлетворяет уравнению движения (139), легко убедиться, если учесть, что  $\delta\mathcal{O}$  является произвольным оператором. Используя в (139) вместо  $\delta\mathcal{O}$  тильда-сопряженный оператор  $\delta\tilde{\mathcal{O}}$  и применяя операцию комплексного сопряжения к обеим частям равенства, с помощью (88) получим

$$\langle 0(T)|[\delta\mathcal{O}, [\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{O}}_k^\dagger]]|0(T)\rangle = -\mathcal{E}_k\langle 0(T)|[\delta\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}_k^\dagger]|0(T)\rangle. \quad (140)$$

Напомним, что, для того чтобы различать собственные состояния теплового гамильтониана с положительной и отрицательной энергией, последние помечаются знаком тильды (см. (125)).

До сих пор рассмотрение не отличалось от стандартного изложения применения метода уравнения движения к нахождению собственных со-

стояний гамильтониана холодного ядра [39–41]. Отметим, однако, что в случае теплового гамильтониана уравнение движения (139) само по себе не приводит к однозначному определению структуры диагонализующих операторов. Действительно, используя в (139) вместо  $\delta O$  оператор  $\delta\tilde{O}^\dagger$  и применяя свойство (88), получим

$$\langle 0(T) | [\delta O, [\mathcal{H}, \tilde{O}_k]] | 0(T) \rangle = \mathcal{E}_k \langle 0(T) | [\delta Q, \tilde{O}_k] | 0(T) \rangle. \quad (141)$$

Следовательно, решением уравнения движения для данного  $\mathcal{E}_k$  является произвольная линейная комбинация  $Q_k^\dagger = xO_k^\dagger + y\tilde{O}_k$ . Но тепловой вакуум  $|0(T)\rangle$  не может одновременно являться вакуумным состоянием как для операторов  $O_k$ , так и для операторов  $Q_k$ . Поэтому из всего множества решений (139) необходимо выделить те, чье вакуумное состояние удовлетворяет условию теплового состояния при данной температуре. Для этого потребуем выполнение условия теплового состояния в форме (129), из которого следует, что

$$e^{-\mathcal{E}_k/2T} \langle 0(T) | [O_k, A]_{\pm} | 0(T) \rangle = \sigma_A \langle 0(T) | [A, \tilde{O}_k^\dagger]_{\pm} | 0(T) \rangle \quad (142)$$

для произвольного физического оператора  $A$ . Антиккоммутатор  $[\dots]_{\pm}$  соответствует случаю, когда  $O_k$  и  $A$  являются фермионоподобными операторами.

Формально уравнение движения (139) совместно с условием теплового состояния в форме (142) позволяет находить точные собственные состояния теплового гамильтониана. В практических вычислениях, однако, мы ищем решение уравнения движения в виде разложения по ограниченному набору некоторых базисных операторов  $\delta O$ . Но и в этом случае решение (139) требует знания вакуумного состояния операторов  $O_k$ . Этому условию можно удовлетворить, решая уравнение движения с помощью итераций. Но так как наличие двойного коммутатора в левой части (139) понижает чувствительность решения уравнения движения к выбору  $|0(T)\rangle$ , то в качестве теплового вакуума можно использовать его приближение  $|\psi_0(T)\rangle^*$ . Обязательным требованием к  $|\psi_0(T)\rangle$  является его тильда-инвариантность.

Чтобы гарантировать ортогональность собственных функций теплового гамильтониана при приближенном решении уравнения движения, двойной коммутатор в правой части (139) следует заменить на симметричный двойной коммутатор [39–41]. В результате приходим к уравнению движения в следующей форме:

$$\langle \psi_0(T) | [\delta O, \mathcal{H}, O_k^\dagger] | \psi_0(T) \rangle = \mathcal{E}_k \langle \psi_0(T) | [\delta O, O_k^\dagger] | \psi_0(T) \rangle, \quad (143)$$

---

\* Напомним, что именно такая ситуация реализуется при выводе уравнений (ПСФ), когда в качестве основного состояния в уравнении движения вместо фононного вакуума используется хартри-фоковский вакуум [41].

где

$$[A, B, C] = \frac{1}{2} \{ [A, [B, C]] + [[A, B], C] \}. \quad (144)$$

Если  $\mathcal{O}_k^\dagger$  является фермионоподобным оператором, то в (143) вместо коммутаторов используются антикоммутаторы.

Приближенный характер решения уравнения движения приводит к тому, что условию теплового состояния (142) может удовлетворить лишь некоторый класс операторов  $A$ . Обратим внимание на то, что если (142) выполняется для некоторого множества операторов  $A_n$ , то оно справедливо и для их линейной комбинации. Поэтому, для того чтобы спектральные плотности одночастичных операторов, описывающих внешнее воздействие на нагретое ядро, удовлетворяли принципу детального баланса (119), (120), в качестве множества  $A_n$  будем рассматривать одно- и двухфермионные операторы вида  $a^\dagger$ ,  $a$ ,  $a_1^\dagger a_2^\dagger$ ,  $a_1^\dagger a_2$ ,  $a_1 a_2$ . Следует подчеркнуть, что вне зависимости от того, какое вакуумное состояние используется в (143), в условии теплового состояния (142) фигурирует именно вакуум операторов  $\mathcal{O}_k$ .

Прежде чем перейти к рассмотрению различных приближенных способов нахождения собственных состояний теплового гамильтониана, еще раз отметим, что требование соблюдения условия теплового состояния (142) на каждом этапе диагонализации теплового гамильтониана является отличительной особенностью излагаемого подхода, что делает его термодинамически последовательным, так как гарантирует выполнение принципа детального баланса (119), (120) для спектральных плотностей и силовых функций одночастичных операторов.

## 5. МОДЕЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ГАМИЛЬТониАН

Изложенный выше формализм для расчета спектральных плотностей и силовых функций применим к модельному ядерному гамильтониану, который состоит из среднего поля для протонов и нейтронов  $H_{mf}$ , спаривательного взаимодействия  $H_{pair}$  и остаточного нуклон-нуклонного взаимодействия  $H_{res}$ :

$$H = H_{mf} + H_{pair} + H_{res}. \quad (145)$$

Во всех дальнейших теоретических выкладках и численных расчетах будем предполагать сферическую симметрию потенциала среднего поля. В этом случае  $(2j + 1)$ -кратно вырожденных одночастичных уровней среднего поля характеризуются квантовыми числами  $nljm$ , где  $m$  — проекция полного момента  $j$ . Для краткости обозначений индексы  $nl$  будем опускать (т. е.  $j \equiv nlj$ ), а операторы рождения и уничтожения нуклонов будем обозначать как  $a_{jm}^\dagger$  и  $a_{jm}$  соответственно. Используя

эти обозначения, запишем одночастичную часть гамильтониана в виде

$$H_{\text{mf}} = \sum_{\tau=p, n} \sum_{jm}^{\tau} (E_{jm} - \mu_{\tau}) a_{jm}^{\dagger} a_{jm}, \quad (146)$$

где  $\sum^{\tau}$  означает, что суммирование производится либо по протонным ( $\tau = p$ ), либо по нейтронным ( $\tau = n$ ) одночастичным состояниям. Если же нет специальных обозначений, то суммирование по  $j$  означает и суммирование по изотопическому индексу  $\tau$ .

Так как все расчеты проводятся в большом каноническом ансамбле, то включение в гамильтониан слагаемого, содержащего химический потенциал  $\mu_{\tau}$ , позволяет обеспечить сохранение числа частиц в среднем. Одночастичные энергии  $E_{jm}$  соответствуют либо феноменологическому потенциалу (например, потенциалу Вудса–Саксона), либо получаются в результате решения уравнений Хартри–Фока с использованием эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия. Строго говоря, энергии одночастичных уровней зависят от температуры. Однако хартри-фоксовские расчеты, проведенные с использованием взаимодействия Скирма, демонстрируют стабильность среднего поля относительно повышения температуры вплоть до  $T \lesssim 5$  МэВ [90, 91] (см. также [12, с. 166]). Так как температуры, при которых протекают интересующие нас реакции с нагретыми ядрами во время взрыва сверхновых, не превышают данного значения, то в дальнейшем мы предполагаем, что энергии и волновые функции ядерных одночастичных состояний являются такими же, как при нулевой температуре.

В качестве спаривательного взаимодействия мы используем монопольные силы, которые действуют только между тождественными нуклонами

$$H_{\text{pair}} = -\frac{1}{4} \sum_{\tau=n, p} G_{\tau} \sum_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{\tau} a_{j_1 m_1}^{\dagger} a_{j_1 m_1}^{\dagger} a_{j_2 m_2} a_{j_2 m_2}, \quad (147)$$

где черта над квантовыми числами означает операцию обращения времени  $a_{j\bar{m}} = (-1)^{j-m} a_{j-m}$ . Выбор констант  $G_{n,p}$  основан на воспроизведении четно-нечетной разности масс.

В качестве остаточного взаимодействия  $H_{\text{res}}$  мы используем центральное частично-дырочное взаимодействие двух видов: 1) схематическое сепарабельное взаимодействие, которое используется в гамильтониане квазичастично-фононной модели ядра [92]; 2) взаимодействие в форме сил Ландау–Мигдала [93], параметры которого выражаются через параметры сил Скирма [94]. Предложенная в работах [95, 96] процедура сепарабелизации позволяет записать взаимодействие Ландау–Мигдала в виде суммы конечного числа  $N$  сепарабельных слагаемых.

Вкратце изложим процедуру сепарабелизации сил Ландау–Мигдала и попутно введем используемые в дальнейшем обозначения. Следуя

работам [94, 95], запишем силы Ландау–Мигдала в координатном представлении в следующем виде:

$$H_{\text{res}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N_0^{-1} [F_0(r_1) + G_0(r_1)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 + (F'_0(r_1) + G'_0(r_1)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2] \delta(\mathbf{r}_{12}). \quad (148)$$

Здесь  $N_0 = 2k_F m^* / \pi^2 \hbar^2$ , где  $k_F$  — импульс Ферми и  $m^*$  — эффективная масса нуклона. Традиционно остаточные силы в форме Ландау–Мигдала используются при изучении зарядово-нейтральных и зарядово-обменных возбуждений ядра в рамках теории конечных ферми-систем [93, 97–99]. Матричные элементы взаимодействия (148) можно представить в форме  $N$  сепарабельных членов, используя формулу интегрирования Гаусса для  $N$  точек [100, формула (25.4.30)]:

$$\int_0^R f(r) dr \approx \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N w_k f(r_k). \quad (149)$$

Значения абсцисс  $r_k$  и весов  $w_k$  зависят от числа  $N$  точек в формуле Гаусса. В численных расчетах мы везде полагали  $N = 40$ . Хотя формально при вычислении матричных элементов от  $H_{\text{res}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  интегрирование распространяется до  $r = \infty$ , выбор достаточно большого радиуса обрезания  $R = 3R_{\text{nucl}}$  позволяет вычислить радиальный интеграл с хорошей точностью. Такой выбор  $R$  и числа  $N$  гауссовых точек позволяет практически полностью исключить ошибки, связанные с вычислением матричных элементов остаточного взаимодействия. Как показано в работе [95], использование сепарабельной формы остаточного взаимодействия (148) позволяет свести решение уравнений ПСФ к секулярному уравнению размерности  $\sim N$ , что значительно упрощает расчеты в большом конфигурационном пространстве и делает возможным проведение глобальных микроскопических расчетов для большого количества ядер.

В представлении вторичного квантования остаточное взаимодействие (148) после процедуры сепарабелизации записывается в виде суммы мультипольных и спин-мультипольных компонент

$$H_{\text{res}} = H_{\text{ph}}^m + H_{\text{ph}}^s. \quad (150)$$

В свою очередь, каждая из компонент записывается как сумма  $N$  сепарабельных слагаемых:

$$H_{\text{ph}}^m = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[ \chi_0^{(m;k)} + \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2 \chi_1^{(m;k)} \right] \sum_{JM} \mathcal{M}_{JM}^{(k)\dagger} \mathcal{M}_{JM}^{(k)}, \quad (151)$$

$$H_{\text{ph}}^s = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[ \chi_0^{(s;k)} + \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2 \chi_1^{(s;k)} \right] \sum_{JM} \sum_{L=J, J\pm 1} \mathcal{S}_{LJM}^{(k)\dagger} \mathcal{S}_{LJM}^{(k)}. \quad (152)$$

Мы используем следующее определение мультипольных и спин-мультипольных операторов\*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{JM}^{(k)\dagger} &= -\widehat{J}^{-1} \sum_{j_1 j_2} f_{j_1 j_2}^{(J;k)} [a_{j_1}^\dagger a_{j_2}]_{JM} = \mathcal{M}_{JM}^{(k)}, \\ \mathcal{S}_{LJM}^{(k)\dagger} &= -\widehat{J}^{-1} \sum_{j_1 j_2} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} [a_{j_1}^\dagger a_{j_2}]_{JM} = -\mathcal{S}_{LJM}^{(k)}, \end{aligned} \tag{157}$$

где  $f_{j_1 j_2}^{(J;k)}$  и  $f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)}$  — соответствующие приведенные матричные элементы

$$\begin{aligned} f_{j_1 j_2}^{(J;k)} &= i^J u_{j_1}(r_k) u_{j_2}(r_k) \langle j_1 \| Y_J \| j_2 \rangle, \\ f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} &= i^L u_{j_1}(r_k) u_{j_2}(r_k) \langle j_1 \| [Y_L \sigma]_J \| j_2 \rangle, \end{aligned} \tag{158}$$

которые обладают свойствами  $f_{j_1 j_2}^{(J;k)} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} f_{j_2 j_1}^{(J;k)}$  и  $f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} = (-1)^{j_1 + j_2 + J} f_{j_2 j_1}^{(LJ;k)}$ . Величина  $u_j(r_k)$  обозначает радиальную часть волновой функции нуклона  $\varphi_j(r) = u_j(r)/r$  в точке с абсциссой  $r_k$ , используемой в формуле интегрирования Гаусса (149). Изоскалярные  $\chi_0^{(m;k)}$ ,  $\chi_0^{(s;k)}$  и изовекторные  $\chi_1^{(m;k)}$ ,  $\chi_1^{(s;k)}$  константы мультипольного и спин-мультипольного взаимодействий выражаются через параметры сил Ландау–Мигдала (148). Например,  $\chi_0^{(m;k)} = -F_0(r_k) R w_k / (2N_0 r_k^2)$ . Выражения для  $\chi_0^{(s;k)}$ ,  $\chi_1^{(m;k)}$  и  $\chi_1^{(s;k)}$  получаются, соответственно, заменой  $F_0$  на  $F'_0$ ,  $G_0$  и  $G'_0$ .

При  $N = 1$  мультипольное и спин-мультипольное остаточное взаимодействие в форме (151), (152) становится идентичным остаточному

\* Следуя [85, т. 1, с. 86], мы используем следующее определение приведенного матричного элемента  $t_{j_1 j_2}^{(J)} = \langle j_1 \| T_J \| j_2 \rangle$ :

$$\langle j_1 m_1 | T_{JM} | j_2 m_2 \rangle = \widehat{j}_1^{-1} \langle j_2 m_2 JM | j_1 m_1 \rangle t_{j_1 j_2}^{(J)}. \tag{153}$$

Тогда для  $M$ -й компоненты произвольного одночастичного тензорного оператора  $T_J$  можно записать

$$T_{JM} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \langle j_1 m_1 | T_{JM} | j_2 m_2 \rangle a_{j_1 m_1}^\dagger a_{j_2 m_2} = -\widehat{J}^{-1} \sum_{j_1 j_2} t_{j_1 j_2}^{(J)} [a_{j_1}^\dagger a_{j_2}]_{JM}, \tag{154}$$

где  $\widehat{J} = \sqrt{2J+1}$ , а с помощью квадратных скобок  $[...]_{JM}$  обозначается связь двух угловых моментов в суммарный угловой момент  $J$  с проекцией  $M$ :

$$[a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger]_{JM} = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle a_{j_1 m_1}^\dagger a_{j_2 m_2}^\dagger. \tag{155}$$

Запись  $[a_{j_1}^\dagger a_{j_2}]_{JM}$  в (154) и (157) означает

$$[a_{j_1}^\dagger a_{j_2}]_{JM} = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle a_{j_1 m_1}^\dagger \overline{a_{j_2 m_2}}. \tag{156}$$

Введем также используемое в дальнейшем обозначение  $A_{JM} = (-1)^{J-M} A_{J-M}$ .

взаимодействию, которое используется в квазичастично-фононной модели (КФМ) ядра

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ph}}^m &= -\frac{1}{2} \sum_J [\chi_0^{(J)} + \tau_1 \tau_2 \chi_1^{(J)}] \sum_M \mathcal{M}_{JM}^\dagger \mathcal{M}_{JM}, \\
 H_{\text{ph}}^s &= -\frac{1}{2} \sum_J \sum_{L=J, J\pm 1} [\chi_0^{(LJ)} + \tau_1 \tau_2 \chi_1^{(LJ)}] \sum_M \mathcal{S}_{LJM}^\dagger \mathcal{S}_{LJM},
 \end{aligned} \tag{159}$$

а выражения для мультипольных и спин-мультипольных операторов совпадают с (157) с точностью до замены приведенных матричных элементов на

$$\begin{aligned}
 f_{j_1 j_2}^{(J)} &= \langle j_1 \| i^J R_J(r) Y_{JM} \| j_2 \rangle, \\
 f_{j_1 j_2}^{(LJ)} &= \langle j_1 \| i^L R_J(r) [Y_L \sigma]_J \| j_2 \rangle,
 \end{aligned} \tag{160}$$

где  $R(r)$  — радиальная зависимость используемых в КФМ сепарабельных сил.

Полученные далее уравнения для расчета структуры и энергии тепловых фононов используются нами и в расчетах с гамильтонианом КФМ. Существует, однако, принципиальное отличие. В (151), (152) все константы взаимодействия связаны с параметрами сил Ландау–Мигдала, которые, в свою очередь, выражаются через параметры сил Скирма [94]. В КФМ не существует однозначной процедуры выбора радиальной зависимости сепарабельных сил и констант взаимодействия. Традиционно в КФМ используются силы  $R(r) = r^\lambda$ , где  $\lambda$  — ранг сферической гармоники  $Y_{\lambda\mu}$  в определении мультипольных и спин-мультипольных операторов (159), или силы  $R(r) = dV(r)/dr$ , где  $V(r)$  — центральная часть одночастичного потенциала. Значения констант мультипольных  $\chi_{0,1}^{(J)}$  и спин-мультипольных  $\chi_{0,1}^{(LJ)}$  сил зависят от вида  $R(r)$ , и их выбор основывается на экспериментальных данных и качественных оценках [101].

Остаточное взаимодействие (151), (152) содержит скалярное произведение матриц Паули  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , действующих на изотопические волновые функции нуклона. Разложив скалярное произведение  $\tau_1 \tau_2$  как

$$\tau_1 \tau_2 = \tau_0^{(1)} \tau_0^{(2)} + 2(t_+^{(1)} t_-^{(2)} + t_-^{(1)} t_+^{(2)}), \tag{161}$$

где  $\tau_0 |n\rangle = +|n\rangle$ ,  $\tau_0 |p\rangle = -|p\rangle$  и  $t_- |n\rangle = |p\rangle$ ,  $t_+ |p\rangle = |n\rangle$ , разделим остаточное взаимодействие на зарядово-нейтральную

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ch.n}} &= -\frac{1}{2} \sum_{JM} \sum_{\tau, \rho=\pm 1} \sum_k \chi_\rho^{(m;k)} \mathcal{M}_{JM}^{(k)\dagger}(\tau) \mathcal{M}_{JM}^{(k)}(\rho\tau) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{JM} \sum_{L=J, J\pm 1} \sum_{\tau, \rho=\pm 1} \sum_k \chi_\rho^{(s;k)} \mathcal{S}_{LJM}^{(k)\dagger}(\tau) \mathcal{S}_{LJM}^{(k)}(\rho\tau) \tag{162}
 \end{aligned}$$

и зарядово-обменную

$$H_{\text{ch.ex}} = -2 \sum_{JM} \sum_k \chi_1^{(m;k)} \mathcal{M}_{JM}^{(k)\dagger} \mathcal{M}_{JM}^{(k)} - \\ - 2 \sum_{JM} \sum_{L=J, J\pm 1} \sum_k \chi_1^{(s;k)} \mathcal{S}_{LJM}^{(k)\dagger} \mathcal{S}_{LJM}^{(k)} \quad (163)$$

части. В зарядово-нейтральной части (162) введены обозначения  $\chi_\rho^{(m;k)} = \chi_0^{(m;k)} + \rho \chi_1^{(m;k)}$ ,  $\chi_\rho^{(s;k)} = \chi_0^{(s;k)} + \rho \chi_1^{(s;k)}$ ,  $\rho = \pm 1$ , а мультипольные и спин-мультипольные операторы содержат суммирование либо по нейтронным ( $\tau = n$ ), либо по протонным ( $\tau = p$ ) одночастичным состояниям. Замена  $\tau \leftrightarrow -\tau$  означает замену  $n \leftrightarrow p$ . В зарядово-обменной части остаточного взаимодействия (163) одночастичные операторы  $\mathcal{M}^\dagger$ ,  $\mathcal{S}^\dagger$  содержат суммирование по протон-нейтронным состояниям, т. е.  $\sum_{j_1 j_2} \equiv \sum_{j_p j_n}$

в выражениях (157).

Как было показано в предыдущем разделе, для расчета спектральных плотностей и силовых функций нагретого ядра в рамках метода супероператоров необходимо диагонализировать тепловой гамильтониан

$$\mathcal{H} = H - \tilde{H} = \mathcal{H}_{\text{mf}} + \mathcal{H}_{\text{pair}} + \mathcal{H}_{\text{res}}, \quad (164)$$

где  $\tilde{H}$  получается из исходного гамильтониана (145) путем замены операторов рождения и уничтожения  $a_{jm}^\dagger$  и  $a_{jm}$  на тильдованные партнеры  $\tilde{a}_{jm}^\dagger$  и  $\tilde{a}_{jm}$ , т. е. если  $H \equiv H(a^\dagger, a)$ , то  $\tilde{H} \equiv H(\tilde{a}^\dagger, \tilde{a})$ . Тепловой гамильтониан  $\mathcal{H}$  наследует структуру исходного гамильтониана  $H$ . Поэтому для нахождения его собственных состояний можно применять те же методы, которые используются при изучении свойств возбужденных состояний холодных ядер. Такими методами являются приближение (БКШ) для учета парных корреляций, учет остаточного взаимодействия в рамках приближения случайных фаз, бозонные разложения\* и т. д. Существенным отличием, как уже отмечалось, является требование выполнения условия теплового состояния (142). Именно это условие определяет температуру системы и позволяет термодинамически последовательно, т. е. не нарушая принципа детального баланса, рассчитать спектральные плотности и силовые функции. В первых работах по применению методов термодинамики к изучению свойств нагретых ядер этот факт игнорировался, и температура как параметр, характеризующий термодинамические свойства нагретой системы, вводилась в рассмотрение посредством определения и последующей минимизации свободной энергии для системы невзаимодействующих квазичастиц [83, 84]. Вследствие такого подхода тепловой вакуум удовлетворяет условию теплового состояния лишь в приближении БКШ,

\* Метод бозонных разложений применялся для диагонализации теплового гамильтониана модели Липкина в наших работах [102, 103].

но при учете корреляций, вызванных остаточным взаимодействием, т. е. при построении фононного теплового вакуума, условие теплового состояния уже не выполняется. В результате этого нарушается принцип детального баланса для спектральных плотностей (119), (120) и силовых функций (134), (136). Как будет показано в дальнейшем, в рамках метода супероператоров возможно обобщение методов БКШ, ПСФ и т. д. таким образом, чтобы на каждом этапе диагонализации теплового гамильтониана тепловой вакуум удовлетворял условию теплового состояния.

Прежде чем перейти к изложению методов диагонализации теплового гамильтониана, учтем тот факт, что для сферических ядер спектральные плотности сферических тензорных операторов выражаются через приведенные матричные элементы

$$S_{A_J B_J}(E, T) = \sum_{Z, N} \sum_{i, f} p(\mathcal{E}_i, Z, N) \frac{\langle J_f \| B_J \| J_i \rangle \langle J_f \| A_J \| J_i \rangle^*}{2J_i + 1} \delta(E - \Delta E_{if}), \quad (165)$$

а силовая функция имеет вид

$$S_{A_J}(E, T) = \sum_{Z, N} \sum_{i, f} p(\mathcal{E}_i, Z, N) B_{if}(A_J) \delta(E - \Delta E_{if}), \quad (166)$$

где  $B_{if}(A_J) = |\langle J_f \| A_J \| J_i \rangle|^2 / (2J_i + 1)$  — приведенная вероятность (сила) перехода. Собственные состояния теплового гамильтониана  $|JMk\rangle$  также обладают сферической симметрией, т. е. являются вырожденными относительно проекции углового момента. Поэтому в выражениях для спектральных плотностей (127), (128) и силовых функций (130), (131) суммирование по проекции  $M$  можно учесть путем определения приведенного матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{Jk} \| A_J \| 0(T) \rangle &\equiv \hat{J} \langle \mathcal{O}_{JMk} | A_{JM} | 0(T) \rangle, \\ \langle \tilde{\mathcal{O}}_{Jk} \| A_J \| 0(T) \rangle &\equiv \hat{J} \langle \tilde{\mathcal{O}}_{JMk} | A_{JM} | 0(T) \rangle, \end{aligned} \quad (167)$$

где  $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$ . Данное определение согласуется с (153), если приписать теплового вакууму нулевой угловой момент. Определим также приведенную вероятность перехода с теплового вакуума на состояние  $|Jk\rangle$ :

$$\begin{aligned} B_{Jk}(A_J) &= |\langle \mathcal{O}_{Jk} \| A_J \| 0(T) \rangle|^2, \\ \tilde{B}_{Jk}(A_J) &= |\langle \tilde{\mathcal{O}}_{Jk} \| A_J \| 0(T) \rangle|^2. \end{aligned} \quad (168)$$

Очевидно, что при таком определении приведенного матричного элемента все соотношения для амплитуд и вероятностей переходов, полученные в разд. 3 (в частности, принцип детального баланса (134), (136)), остаются справедливыми.

## 6. ТЕПЛОВЫЕ КВАЗИЧАСТИЦЫ

Как и в случае нулевой температуры, диагонализацию теплового гамильтониана (164) начнем с учета парных корреляций. Для этой цели введем операторы рождения  $\beta^\dagger$ ,  $\tilde{\beta}^\dagger$  и уничтожения  $\beta$ ,  $\tilde{\beta}$  тепловых квази-частиц, которые приводят к диагональному виду одночастичную часть теплового гамильтониана:

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \mathcal{H}_{\text{mf}} + \mathcal{H}_{\text{pair}} \approx \sum_{\tau} \sum_{jm} \varepsilon_j(T) (\beta_{jm}^\dagger \beta_{jm} - \tilde{\beta}_{jm}^\dagger \tilde{\beta}_{jm}). \quad (169)$$

Знак приближенного равенства в (169) означает, что в выражении для  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  не указаны слагаемые, описывающие монополярное взаимодействие между тепловыми квазичастицами. Вакуум тепловых квазичастиц  $|\varphi_0(T)\rangle$  при дополнительном условии (142) является тепловым вакуумом в приближении БКШ, а величина  $\pm \varepsilon_j(T)$  соответствует энергии тепловых квазичастиц.

Операторы рождения и уничтожения тепловых квазичастиц связаны с операторами  $a^\dagger$ ,  $a$ ,  $\tilde{a}^\dagger$  и  $\tilde{a}$ , входящими в определение исходного теплового гамильтониана, посредством двух унитарных преобразований. Первое преобразование — это стандартное  $(u, v)$ -преобразование Боголюбова от операторов частиц к операторам квазичастиц ( $u_j^2 + v_j^2 = 1$ ):

$$\begin{aligned} a_{jm}^\dagger &= u_j \alpha_{jm}^\dagger + v_j \alpha_{jm}, \\ a_{jm} &= u_j \alpha_{jm} + v_j \alpha_{jm}^\dagger. \end{aligned} \quad (170)$$

Аналогичное преобразование совершается над операторами рождения и уничтожения тильдованных частиц, тем самым вводятся в рассмотрение тильдованные операторы квазичастиц  $\tilde{\alpha}_{jm}^\dagger$  и  $\tilde{\alpha}_{jm}$ . Второе, так называемое тепловое  $(x, y)$ -преобразование Боголюбова, смешивает нетильдованные и тильдованные операторы:

$$\begin{aligned} \alpha_{jm}^\dagger &= x_j \beta_{jm}^\dagger + iy_j \tilde{\beta}_{jm}, \\ \tilde{\alpha}_{jm}^\dagger &= x_j \tilde{\beta}_{jm}^\dagger - iy_j \beta_{jm}. \end{aligned} \quad (171)$$

Требование

$$x_j^2 + y_j^2 = 1 \quad (172)$$

приводит к сохранению фермионных антикоммутиационных соотношений между операторами рождения и уничтожения тепловых квазичастиц. Отметим, что в отличие от ранних работ по применению термополевой динамики к изучению свойств нагретых ядер (см., например, [82, 83, 104]) мы применяем комплексное тепловое преобразование. Комплексное тепловое преобразование возникает вследствие используемого нами определения тильдованных (т.е. правых) супероператоров рождения (50), благодаря которому условие теплового состояния (101) для фермионопо-

добных операторов содержит фазовый множитель  $\sigma_A = -i$ . В комплексной форме тепловое преобразование (171) впервые было использовано в нашей работе [35].

Так как фермионная квадратичная форма (169) инвариантна относительно преобразования

$$\beta^\dagger \rightarrow x\beta^\dagger + iy\tilde{\beta}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (173)$$

то требование диагональности одночастичной части  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  само по себе не приводит к однозначному определению структуры тепловых квазичастиц. Получим дополнительную связь между коэффициентами теплового преобразования, потребовав выполнения условия теплового состояния в виде (142). Для этого в качестве оператора  $A$  рассмотрим оператор рождения квазичастицы Боголюбова  $\alpha_{jm}^\dagger$ . Из равенства

$$e^{-\varepsilon_j/2T} \langle \varphi_0(T) | [\beta_{jm}, \alpha_{jm}^\dagger]_+ | \varphi_0(T) \rangle = -i \langle \varphi_0(T) | [\alpha_{jm}^\dagger, \tilde{\beta}_{jm}^\dagger]_+ | \varphi_0(T) \rangle \quad (174)$$

следует, что

$$y_j = \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{2T}\right) x_j. \quad (175)$$

Это же соотношение получим при использовании в качестве  $A$  оператора уничтожения  $\alpha_{jm}$ . Таким образом, с учетом нормировки (172) условие теплового состояния однозначно связывает коэффициенты теплового преобразования (171) с энергией тепловых квазичастиц

$$y_j = [1 + e^{\varepsilon_j/T}]^{-1/2}, \quad x_j = (1 - y_j^2)^{1/2}. \quad (176)$$

Вакуум тепловых квазичастиц можно представить в следующем виде [37]:

$$|\varphi_0(T)\rangle = \exp\left[-i \sum_{\tau} \sum_{jm}^{\tau} \vartheta_j(T) (\alpha_{jm}^\dagger \tilde{\alpha}_{jm}^\dagger + \tilde{\alpha}_{jm} \alpha_{jm})\right] |00\rangle, \quad (177)$$

где  $\cos \vartheta_j(T) = x_j^2$ , а  $|00\rangle$  — вакуум квазичастиц Боголюбова  $\alpha_{jm}$  и  $\tilde{\alpha}_{jm}$ . Согласно определению после формулы (89) вектор  $|\varphi_0(T)\rangle$  является тильда-инвариантным.

Чтобы определить энергию тепловых квазичастиц, а также найти коэффициенты  $(u, v)$ -преобразования (170), применим уравнение движения (143), в котором в качестве теплового вакуума используем вакуум тепловых квазичастиц  $|\varphi_0(T)\rangle$ . С этой целью запишем одночастичную часть теплового гамильтониана БКШ в терминах тепловых квазичастиц:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{BCS}} \approx & \sum_{\tau} \sum_{jm}^{\tau} \varepsilon_j (\beta_{jm}^\dagger \beta_{jm} - \text{t. c.}) + \\ & + \sum_{\tau} \sum_{jm}^{\tau} \{(E'_j - \mu_{\tau}) u_j v_j - (u_j^2 - v_j^2) \Delta_{\tau}\} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} (1 - 2y_j^2) (\beta_{jm}^\dagger \beta_{jm}^\dagger + \beta_{jm} \beta_{jm} - \text{t. c.}) + 2ix_j y_j (\beta_{jm}^\dagger \tilde{\beta}_{jm} + \tilde{\beta}_{jm}^\dagger \beta_{jm}) \right\}, \end{aligned} \quad (178)$$

где для сокращения записи символом «t.c.» обозначим слагаемые, тильда-сопряженные к указанным. Энергия тепловых квазичастиц и корреляционная функция, или спаривательная щель  $\Delta_\tau$ , выражаются через коэффициенты преобразований (170) и (171)

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= (E'_j - \mu_\tau)(u_j^2 - v_j^2) + 2u_j v_j \Delta_\tau, \\ \Delta_\tau &= \frac{G_\tau}{2} \sum_j (2j + 1) u_j v_j (1 - 2y_j^2),\end{aligned}\quad (179)$$

а величина  $E'_j = E_j - G_\tau(u_j^2 y_j^2 + v_j^2 x_j^2)$  определяет перенормированную одночастичную энергию. С учетом нормировки  $u_j^2 + v_j^2 = 1$  решение уравнения движения (143) при  $\delta\mathcal{O} = a_{jm}^\dagger$ ,  $a_{jm}$  приводит к следующим выражениям для коэффициентов  $(u, v)$ -преобразования:

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{E'_j - \mu_\tau}{\varepsilon_j} \right)^{1/2}, \quad v_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{E'_j - \mu_\tau}{\varepsilon_j} \right)^{1/2}. \quad (180)$$

Если полученные выражения для коэффициентов преобразования Боголюбова подставить в тепловой гамильтониан (178), то он примет диагональный вид (169).

С помощью (179) получим выражение для энергии тепловых квазичастиц

$$\varepsilon_j = \sqrt{(E'_j - \mu_\tau)^2 + \Delta_\tau^2} \quad (181)$$

и уравнение для нахождения спаривательной щели  $\Delta_\tau$ :

$$\frac{G_\tau}{4} \sum_j^\tau \frac{(2j + 1)(1 - 2y_j^2)}{\sqrt{(E'_j - \mu_\tau)^2 + \Delta_\tau^2}} = 1. \quad (182)$$

Найденное уравнение для  $\Delta_\tau$  следует дополнить уравнением для химического потенциала  $\mu_\tau$ , которое следует из условия сохранения числа частиц в среднем:

$$\begin{aligned}N_\tau &= \sum_{jm}^\tau \langle \varphi_0(T) | a_{jm}^\dagger a_{jm} | \varphi_0(T) \rangle = \sum_j^\tau (2j + 1)(v_j^2 x_j^2 + u_j^2 y_j^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j^\tau (2j + 1) \left\{ 1 - \frac{(E'_j - \mu_\tau)(1 - 2y_j^2)}{\sqrt{(E'_j - \mu_\tau)^2 + \Delta_\tau^2}} \right\}.\end{aligned}\quad (183)$$

Полученные уравнения (176), (182), (183) представляют собой хорошо известные уравнения БКШ при ненулевой температуре [105, 106]. В рамках термополевой динамики эти уравнения были получены в работах [83, 84] с использованием метода, сходного с изложенным выше, т.е. с диагонализацией одночастичной части  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$ . Но в отличие от нашего рассмотрения авторы работ [83, 84] не использовали условие

теплового состояния для определения явного вида коэффициентов теплового  $(x, y)$ -преобразования, а находили их путем минимизации большого термодинамического потенциала. Впервые метод диагонализации  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  с использованием условия теплового состояния был предложен в нашей работе [107]. В дальнейшем метод диагонализации  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  на базе тепловых квазичастиц с использованием условия теплового состояния будем называть теплоквазичастичным БКШ (ТКБКШ).

Решение уравнений (176), (182), (183) определяет зависимость спаривательной щели  $\Delta_\tau(T)$  и химического потенциала  $\mu_\tau(T)$  от температуры. Известно, что решение уравнений БКШ демонстрирует исчезновение парных корреляций ( $\Delta_\tau = 0$ ) при температуре, превышающей  $T_{\text{cr}}$ , которая имеет значение порядка  $T_{\text{cr}} \approx 0,5\Delta_\tau(T = 0)$  (см. рис. 1 в [105]). Исчезновение парных корреляций и фазовый переход из сверхтекучего в нормальное состояние является следствием применения большого канонического ансамбля и упрощений, использованных при выводе ТКБКШ-уравнений, т. е. замене исходного теплового гамильтониана на гамильтониан невзаимодействующих квазичастиц. При изучении статистических свойств высоковозбужденных компаунд-состояний изолированных ядер применение большого канонического ансамбля обычно является лишь первым шагом на пути к более последовательным расчетам. Расчеты с использованием проектирования по числу частиц демонстрируют, что в ядрах фазовый переход носит плавный характер, т. е. парные корреляции хотя и ослабевают, но сохраняются при  $T \geq T_{\text{cr}}$  [108, 109]. Отметим, однако, что исследование коллективных ядерных возбуждений в подобных расчетах является трудоемкой задачей. Для упрощения расчетов в работе [110] был предложен метод приближенного проектирования по числу частиц с применением формализма ТПД.

Для нагретых ядер в веществе звезды именно использование приближенных методов при рассмотрении парных корреляций является причиной резкого фазового перехода, так как применение большого канонического ансамбля является оправданным вследствие наличия резервуара нуклонов. Как отмечалось в работе [86, с. 68], приближения, использованные при выводе уравнений БКШ для  $T \neq 0$ , приводят к тому, что при температуре выше критической в системе с наибольшей вероятностью возбуждаются многоквазичастичные состояния, в которых отсутствуют парные корреляции. Для макроскопических сверхпроводников именно наиболее вероятные конфигурации определяют состояние системы. В случае же микроскопических систем, таких как атомные ядра, конфигурации с парными корреляциями, отличные от наиболее вероятных, могут давать значительный вклад в средние характеристики системы, что приводит к отсутствию резкого фазового перехода (см. рис. 28 в [86] и его обсуждение). Но так как выше температуры фазового перехода среднее значение спаривательной щели мало ( $\Delta < 0,1$  МэВ), то сохранившиеся парные корреляции оказывают незначительное влияние на свойства нагретого ядра [86].

После диагонализации одночастичная часть теплового гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$ , задаваемая выражением (169), описывает систему невзаимодействующих тепловых квазичастиц с энергией  $\pm \varepsilon_j(T)$ , зависящей от температуры. Вакуум тепловых квазичастиц определяет равновесное состояние нагретого ядра в ТКБКШ-приближении. Чтобы найти среднее значение любой физической величины (энергии, числа заполнения и т. п.), надо выразить соответствующий оператор через тепловые квазичастицы, а затем рассчитать вакуумное среднее. В частности, для среднего числа квазичастиц Боголюбова в состоянии  $jm$  получим\*

$$\langle \varphi_0(T) | \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm} | \varphi_0(T) \rangle = y_j^2 = [1 + e^{\varepsilon_j/T}]^{-1}, \quad (184)$$

т. е. коэффициенты  $y_j$  теплового преобразования (171) представляют собой тепловые числа заполнения для квазичастичных состояний в статистике Ферми–Дирака. Среднее же число нуклонов в состоянии  $jm$  равно

$$n_j = \langle \varphi_0(T) | a_{jm}^\dagger a_{jm} | \varphi_0(T) \rangle = u_j^2 y_j^2 + v_j^2 x_j^2. \quad (185)$$

Величина в правой части этого соотношения определяет размытие протонной или нейтронной поверхности Ферми в ядре, которое обусловлено как парными корреляциями, так и тепловыми эффектами.

Возбужденные неравновесные состояния, которые возникают в нагретой системе под влиянием внешнего возмущения, в ТКБКШ-приближении описываются как теплоквазичастичные возбуждения над тепловым вакуумом. Состояния с одной возбужденной тепловой квазичастицей имеют вид\*\*

$$|\beta_{jm}\rangle \equiv \beta_{jm}^\dagger |\varphi_0(T)\rangle, \quad |\tilde{\beta}_{jm}\rangle \equiv \tilde{\beta}_{jm}^\dagger |\varphi_0(T)\rangle. \quad (186)$$

Чтобы выяснить физический смысл теплоквазичастичных возбуждений, рассмотрим следующие соотношения:

$$|\langle \beta_{jm} | \alpha_{jm}^\dagger | \varphi_0(T) \rangle|^2 = x_j^2, \quad |\langle \tilde{\beta}_{jm} | \alpha_{\overline{jm}}^\dagger | \varphi_0(T) \rangle|^2 = y_j^2. \quad (187)$$

Таким образом, в результате добавления одной квазичастицы Боголюбова к тепловому вакууму с вероятностью  $x_j^2$  рождается тепловая квазичастица с положительной энергией, а в результате уничтожения боголюбовской квазичастицы с вероятностью  $y_j^2$  рождается тепловая квазичастица с отрицательной энергией. Множители  $y_j^2$  и  $x_j^2$  возникают вследствие принципа Паули: множитель  $y_j^2$  соответствует вероятности

\* При отсутствии парных корреляций мы рассматриваем частицы и дырки как квазичастицы.

\*\* Во втором соотношении учитывается тот факт, что именно  $\tilde{\beta}_{jm}^\dagger$  при вращении системы координат преобразуется как тензорный оператор ранга  $j$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно выразить оператор рождения нуклона через тепловые квазичастицы  $a_{jm}^\dagger = u_j \beta_{jm}^\dagger + v_j \tilde{\beta}_{\overline{jm}}^\dagger - i y_j (v_j \tilde{\beta}_{\overline{jm}}^\dagger - u_j \tilde{\beta}_{jm}^\dagger)$ .

процесса, в котором квазичастица Боголюбова уничтожается из состояния, содержащего  $y_j^2$  квазичастиц, а множитель  $x_j^2 = 1 - y_j^2$  соответствует вероятности процесса, в котором квазичастица добавляется в состояние, уже содержащее  $y_j^2$  квазичастиц.

Рассмотрим теперь собственные функции теплового гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$ , состоящие из двух тепловых квазичастиц, связанных в суммарный угловой момент  $J$  с проекцией  $M$ . Как будет показано в следующем разделе, такие состояния возбуждаются в нагретой системе под влиянием внешнего возмущения, вызванного одночастичным мультипольным оператором. Для фиксированных квантовых чисел  $j_1$  и  $j_2$  возможны следующие четыре типа двухтеплоквазичастичных состояний:

$$|\beta_{j_1} \beta_{j_2}; JM\rangle \equiv [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} |\varphi_0(T)\rangle, \quad \omega = \varepsilon_{j_1} + \varepsilon_{j_2} \equiv \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}, \quad (188a)$$

$$|\tilde{\beta}_{j_1} \tilde{\beta}_{j_2}; JM\rangle \equiv [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} |\varphi_0(T)\rangle, \quad \omega = -\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}, \quad (188б)$$

$$|\beta_{j_1} \tilde{\beta}_{j_2}; JM\rangle \equiv [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} |\varphi_0(T)\rangle, \quad \omega = \varepsilon_{j_1} - \varepsilon_{j_2} \equiv \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}, \quad (188в)$$

$$|\tilde{\beta}_{j_1} \beta_{j_2}; JM\rangle \equiv [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} |\varphi_0(T)\rangle, \quad \omega = -\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}. \quad (188г)$$

Справа указана энергия состояния относительно теплового вакуума. В дальнейшем будем различать зарядово-нейтральные и зарядово-обменные двухтеплоквазичастичные состояния. В первом случае состояния  $j_1$  и  $j_2$  обладают одной и той же проекцией изоспина, т. е.  $\tau_{j_1} = \tau_{j_2}$ , во втором случае у состояний  $j_1$  и  $j_2$  — противоположные проекции изоспина, т. е.  $\tau_{j_1} = -\tau_{j_2}$ . Отметим, что при наличии парных корреляций зарядово-обменные двухтеплоквазичастичные состояния представляют собой суперпозицию возбуждений в ядрах  ${}_{N+1}^{Z-1}A$  и  ${}_{N-1}^{Z+1}A$ .

Анализ структуры состояний (188) показывает, что каждому двухтеплоквазичастичному состоянию соответствует тильда-сопряженное состояние с противоположной по знаку энергией. Как следует из представленного выше соответствия между тепловыми и боголюбовскими квазичастицами, возбуждение двух нетильдованных тепловых квазичастиц описывает процесс, в котором к теплому вакууму добавляются две квазичастицы Боголюбова, а рождение двух тильдованных тепловых квазичастиц соответствует обратному процессу уничтожения двух термически возбужденных боголюбовских квазичастиц. Добавление одной нетильдованной и одной тильдованной тепловой квазичастицы соответствует рассеянию квазичастицы Боголюбова из одного состояния в другое. Отсюда, в частности, следует, что если в зарядово-обменном двухтеплоквазичастичном состоянии доминирует компонента, связанная с ядром  ${}_{N+1}^{Z-1}A$ , то в тильда-сопряженном состоянии доминирует компонента, связанная с ядром  ${}_{N-1}^{Z+1}A$ .

Приведем также выражения для  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  в терминах операторов рождения и уничтожения двухтеплоквазичастичных состояний. Для этого рас-

считаем коммутаторы  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  с двухтепловквазичастичными операторами:

$$[\mathcal{H}_{\text{BCS}}, [\beta_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}] = \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} [\beta_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}, \quad (189)$$

$$[\mathcal{H}_{\text{BCS}}, [\beta_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}] = \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} [\beta_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} \quad (190)$$

и т. д. На основе этих соотношений  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  можно представить в диагональном виде относительно операторов рождения и уничтожения пары тепловых квазичастиц:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{BCS}} &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{JM} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} \left\{ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} [\beta_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} [\beta_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger + \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} [\beta_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} [\beta_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger \right\} + \\ &\quad + \sum_{JM} \sum_{j_p j_n} \left\{ \varepsilon_{j_p j_n}^{(+)} [\beta_{j_p}^\dagger, \beta_{j_n}^\dagger]_{JM} [\beta_{j_p}^\dagger, \beta_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{j_p j_n}^{(-)} [\beta_{j_p}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM} [\beta_{j_p}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger \right\} - (\text{t. c.}). \quad (191) \end{aligned}$$

Напомним, что (t. c.) обозначает слагаемые, тильда-сопряженные всем приведенным.

### 7. ПРИВЕДЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ПЕРЕХОДОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕЗАВИСИМЫХ ТЕПЛОВЫХ КВАЗИЧАСТИЦ

Получим выражения для приведенной вероятности (силы) переходов с теплового вакуума на двухтепловквазичастичные состояния (188) для одночастичного тензорного оператора  $\mathcal{T}_{JM}$ :

$$\mathcal{T}_{JM} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \langle j_1 m_1 | \mathcal{T}_{JM} | j_2 m_2 \rangle a_{j_1 m_1}^\dagger a_{j_2 m_2} = -\hat{J}^{-1} \sum_{j_1 j_2} t_{j_1 j_2}^{(J)} [a_{j_1}^\dagger a_{j_2}]_{JM}, \quad (192)$$

где  $t_{j_1 j_2}^{(J)}$  — приведенный матричный элемент (153). В случае зарядово-нейтрального оператора суммирование происходит по состояниям с одинаковым изотопическим индексом ( $\tau_{j_1} = \tau_{j_2}$ ), а в случае зарядово-обменного оператора — по состояниям с противоположным изотопическим индексом ( $\tau_{j_1} = -\tau_{j_2}$ ). Используя преобразования (170) и (171), выразим  $\mathcal{T}_{JM}$  через операторы тепловых квазичастиц:

$$\mathcal{T}_{JM} = \hat{J}^{-1} \sum_{j_1 j_2} t_{j_1 j_2}^{(J)} \left\{ A_{JM}(j_1 j_2) + A_{JM}^*(j_1 j_2) + B_{JM}(j_1 j_2) + B_{JM}^*(j_1 j_2) \right\}. \quad (193)$$

Здесь введены следующие обозначения для линейных комбинаций двух-теплоквазичастичных операторов:

$$\begin{aligned}
 A_{JM}(j_1 j_2) &= u_{j_1} v_{j_2} x_{j_1} x_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} + v_{j_1} u_{j_2} y_{j_1} y_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} + \\
 &\quad + i u_{j_1} u_{j_2} x_{j_1} y_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} - i v_{j_1} v_{j_2} y_{j_1} x_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}, \\
 A_{JM}^*(j_1 j_2) &= v_{j_1} u_{j_2} x_{j_1} x_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger + u_{j_1} v_{j_2} y_{j_1} y_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger + \\
 &\quad + i v_{j_1} v_{j_2} x_{j_1} y_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger - i u_{j_1} u_{j_2} y_{j_1} x_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger, \\
 B_{JM}(j_1 j_2) &= -u_{j_1} u_{j_2} x_{j_1} x_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} + v_{j_1} v_{j_2} y_{j_1} y_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} + \\
 &\quad + i u_{j_1} v_{j_2} x_{j_1} y_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} + i v_{j_1} u_{j_2} y_{j_1} x_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}, \\
 B_{JM}^*(j_1 j_2) &= v_{j_1} v_{j_2} x_{j_1} x_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} - u_{j_2} u_{j_1} y_{j_1} y_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} + \\
 &\quad + i v_{j_1} u_{j_2} x_{j_1} y_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} + i u_{j_1} v_{j_2} y_{j_1} x_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}.
 \end{aligned} \tag{194}$$

Операторы  $A_{JM}$  и  $A_{JM}^*$  описывают переходы между состояниями, у которых число тепловых квазичастиц отличается на два, а операторы  $B_{JM}$  и  $B_{JM}^*$  описывают переходы между состояниями с одинаковым числом тепловых квазичастиц. Так как в ТКБКШ-приближении равновесное состояние системы (тепловой вакуум) не содержит тепловых квазичастиц, то переходы с теплового вакуума под действием  $\mathcal{T}_{JM}$  возможны только на двухтеплоквазичастичные состояния (188). Приведенная вероятность (сила) перехода на такие состояния выражается через приведенный матричный элемент (168) оператора перехода. Например, для силы зарядово-нейтрального перехода на состояние  $|\beta_{j_1} \beta_{j_2}; J\rangle$  получим выражение

$$B_{j_1 j_2}(\mathcal{T}_J) \equiv |\langle \beta_{j_1} \beta_{j_2}; J | \mathcal{T}_J | 0(T) \rangle|^2 = |t_{j_1 j_2}^{(J)} u_{j_1} v_{j_2} + \bar{t}_{j_2 j_1}^{(J)} v_{j_1} u_{j_2}|^2 x_{j_1}^2 x_{j_2}^2, \tag{195}$$

где  $\bar{t}_{j_2 j_1}^{(J)} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} t_{j_2 j_1}^{(J)}$ . Покажем, что приведенные вероятности переходов на тильда-сопряженные двухтеплоквазичастичные состояния удовлетворяют принципу детального баланса. Для этого выразим произведение двух функций распределения Ферми–Дирака через функцию распределения Бозе–Эйнштейна:

$$y_{j_1}^2 y_{j_2}^2 = (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) Y^2(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}), \tag{196}$$

$$y_{j_1}^2 x_{j_2}^2 = (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) Y^2(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}), \tag{197}$$

где  $Y(\omega) = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1/2}$  и полагается, что  $\varepsilon_{j_1} > \varepsilon_{j_2}$ . Воспользуемся этими равенствами и запишем приведенные вероятности зарядово-нейтральных переходов на состояния (188) в следующем виде:

$$B_{j_1 j_2}(\mathcal{T}_J) = |t_{j_1 j_2}^{(J)} u_{j_1} v_{j_2} + \bar{t}_{j_2 j_1}^{(J)} v_{j_1} u_{j_2}|^2 (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) X^2(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}), \tag{198a}$$

$$B_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2}(\mathcal{T}_J) = |t_{j_1 j_2}^{(J)} v_{j_1} u_{j_2} + \bar{t}_{j_2 j_1}^{(J)} u_{j_1} v_{j_2}|^2 (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) Y^2(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}), \quad (198б)$$

$$B_{j_1 \tilde{j}_2}(\mathcal{T}_J) = |t_{j_1 j_2}^{(J)} u_{j_1} u_{j_2} - \bar{t}_{j_2 j_1}^{(J)} v_{j_1} v_{j_2}|^2 (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) X^2(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}), \quad (198в)$$

$$B_{\tilde{j}_1 j_2}(\mathcal{T}_J) = |t_{j_1 j_2}^{(J)} v_{j_1} v_{j_2} - \bar{t}_{j_2 j_1}^{(J)} u_{j_1} u_{j_2}|^2 (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) Y^2(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}), \quad (198г)$$

где  $X^2(\omega) = 1 + Y^2(\omega)$ . Отсюда следует, что силы переходов на двух-тепловквазичастичные состояния, тильда-сопряженные друг к другу и, следовательно, имеющие противоположные по знаку энергии, связаны соотношениями

$$B_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2}(\mathcal{T}_J^\dagger) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}}{T}\right) B_{j_1 j_2}(\mathcal{T}_J), \quad (199)$$

$$B_{j_1 j_2}(\mathcal{T}_J^\dagger) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}}{T}\right) B_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2}(\mathcal{T}_J),$$

что и доказывает выполнение принципа детального баланса для зарядово-нейтральных переходов. Как и должно быть, при  $T = 0$  сила перехода на состояния, содержащие тильдованную тепловую квазичастицу, равна нулю.

Получим также выражения для приведенной вероятности зарядово-обменных переходов с теплового вакуума на двухтепловквазичастичные состояния (188). Примем для конкретности  $j_1 = j_p$  и  $j_2 = j_n$ . Тогда для оператора  $\mathcal{T}_J^{(-)}$  перехода  $n \rightarrow p$  получим

$$B_{j_p j_n}(\mathcal{T}_J^{(-)}) = |t_{j_p j_n}^{(J)} u_{j_p} v_{j_n}|^2 (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) X^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)}), \quad (200а)$$

$$B_{j_p \tilde{j}_n}(\mathcal{T}_J^{(-)}) = |t_{j_p j_n}^{(J)} v_{j_p} u_{j_n}|^2 (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) Y^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)}), \quad (200б)$$

$$B_{j_p \tilde{j}_n}(\mathcal{T}_J^{(-)}) = |t_{j_p j_n}^{(J)} u_{j_p} u_{j_n}|^2 \begin{cases} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) X^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} > \varepsilon_{j_n}, \\ (y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) Y^2(\varepsilon_{j_n j_p}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} < \varepsilon_{j_n}, \end{cases} \quad (200в)$$

$$B_{\tilde{j}_p j_n}(\mathcal{T}_J^{(-)}) = |t_{j_p j_n}^{(J)} v_{j_p} v_{j_n}|^2 \begin{cases} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) Y^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} > \varepsilon_{j_n}, \\ (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) X^2(\varepsilon_{j_n j_p}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} < \varepsilon_{j_n}. \end{cases} \quad (200г)$$

Приведенные вероятности оператора  $\mathcal{T}_J^{(+)}$  «обратного» перехода  $p \rightarrow n$  равны

$$B_{j_p j_n}(\mathcal{T}_J^{(+)}) = |\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} u_{j_n} v_{j_p}|^2 (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) X^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)}), \quad (201а)$$

$$B_{j_p \tilde{j}_n}(\mathcal{T}_J^{(+)}) = |\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} v_{j_n} u_{j_p}|^2 (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) Y^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)}), \quad (201б)$$

$$B_{\tilde{j}_p j_n}(\mathcal{T}_J^{(+)}) = |\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} v_{j_n} v_{j_p}|^2 \begin{cases} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) X^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} > \varepsilon_{j_n}, \\ (y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) Y^2(\varepsilon_{j_n j_p}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} < \varepsilon_{j_n}, \end{cases} \quad (201в)$$

$$B_{j_p j_n}^{\sim}(\mathcal{T}_J^{(+)}) = |\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} u_{j_p} u_{j_n}|^2 \begin{cases} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) Y^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} > \varepsilon_{j_n}, \\ (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) X^2(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)}), & \varepsilon_{j_p} < \varepsilon_{j_n}, \end{cases} \quad (201г)$$

где  $\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} = (-1)^{j_p - j_n + J} t_{j_n j_p}^{(J)}$ . Для операторов  $\mathcal{T}_J^{(-)}$  и  $\mathcal{T}_J^{(+)}$ , таких, что  $\mathcal{T}_J^{(-)} = [\mathcal{T}_J^{(+)}]^\dagger$ , приведенные вероятности (200) и (201) связаны принципом детального баланса:

$$B_{j_1 j_2}^{\sim}(\mathcal{T}_J^{(\pm)}) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}}{T}\right) B_{j_1 j_2}(\mathcal{T}_J^{(\mp)}), \quad (202)$$

$$B_{j_1 j_2}^{\sim}(\mathcal{T}_J^{(\pm)}) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}}{T}\right) B_{j_1 j_2}^{\sim}(\mathcal{T}_J^{(\mp)}).$$

Отметим некоторые особенности полученных выражений для силы переходов. Если одночастичный переход между уровнями  $j_1$  и  $j_2$  разрешен правилами отбора (т. е.  $t_{j_1 j_2}^{(J)} \neq 0$ ), то при  $T \neq 0$  и наличии парных корреляций возможны переходы на все четыре двухтеплоквазичастичных состояния (188). Под возможностью перехода подразумевается отличная от нуля приведенная вероятность. При  $T > T_{cr}$  отличны от нуля только две из четырех приведенных вероятностей. Для частично-дырочных состояний\* это  $B_{j_1 j_2}$  и  $B_{j_1 j_2}^{\sim}$ , а для состояний типа дырка-дырка или частица-частица —  $B_{j_1 j_2}^{\sim}$  и  $B_{j_1 j_2}$ . Кроме того, при отсутствии парных корреляций переходы с теплового вакуума на тильда-сопряженные друг к другу двухтеплоквазичастичные зарядово-обменные состояния осуществляются за счет операторов противоположной изоспиновой направленности. Иными словами, если переход на данное двухтеплоквазичастичное состояние осуществляется под действием оператора  $\tau \rightarrow -\tau$ , то переход на тильда-сопряженное двухтеплоквазичастичное состояние возможен только под действием оператора  $-\tau \rightarrow \tau$ .

Полученные выражения (198), (200), (201) для силы переходов на двухтеплоквазичастичные состояния можно интерпретировать таким образом, что система содержит  $Y^2(\omega)$  термически возбужденных фононов с энергией  $\omega$ . Поэтому амплитуда процесса, в котором из системы удаляется фонон, пропорциональна  $Y^2(\omega)$ , а амплитуда обратного процесса, в котором в систему добавляется фонон, пропорциональна  $1 + Y^2(\omega)$ \*\*. Таким образом, несмотря на то, что исходная система является фермионной, при рассмотрении возбужденных состояний под действием одночастичного оператора возникают бозонные (т. е. фононные) числа заполнения  $Y^2(\omega)$ , которые связывают силу перехода на состояния с положительной энергией (фонон добавляется) с силой перехода на состояния

\* В дальнейшем будем называть дырочными (частичными) те состояния, которые находятся ниже (выше) поверхности Ферми.

\*\* Для бозонных операторов  $b^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$  и  $b |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ .

с отрицательной энергией (фонон удаляется). В этом смысле нагретая система фермионов проявляет свойства нагретой фононной системы. При этом бозонные и фермионные функции распределения имеют одну и ту же температуру.

Можно показать, что для гамов-теллеровского  $GT_{\pm} = \sum_i \sigma^i t_{\pm}^i$  и фермиевского  $F_{\pm} = \sum_i t_{\pm}^i$  операторов полные силы переходов  $n \rightarrow p$  и  $p \rightarrow n$ , рассчитанные в ТКБКШ, удовлетворяют модельно-независимому правилу сумм, которое часто называют правилом сумм Икеды [111]:

$$S_- - S_+ = \begin{cases} 3(N - Z) & \text{для } GT_{\pm}, \\ N - Z & \text{для } F_{\pm}. \end{cases} \quad (203)$$

Действительно, для оператора Гамова–Теллера имеем

$$\begin{aligned} S_- - S_+ &= \sum_{j_p j_n} [B_{j_p j_n}(GT_-) + B_{\tilde{j}_p \tilde{j}_n}(GT_-) + B_{\tilde{j}_p j_n}(GT_-) + B_{j_p \tilde{j}_n}(GT_-)] - \\ &- \sum_{j_p j_n} [B_{j_p j_n}(GT_+) + B_{\tilde{j}_p \tilde{j}_n}(GT_+) + B_{\tilde{j}_p j_n}(GT_+) + B_{j_p \tilde{j}_n}(GT_+)] = \\ &= \sum_{j_p j_n} |t_{j_p j_n}|^2 [(1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2)(u_{j_p}^2 v_{j_n}^2 - v_{j_p}^2 u_{j_n}^2) + \\ &\quad + (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2)(u_{j_p}^2 u_{j_n}^2 - v_{j_p}^2 v_{j_n}^2)] = \\ &= \sum_{j_p j_n} |t_{j_p j_n}|^2 [(u_{j_n}^2 y_{j_n}^2 + v_{j_n}^2 x_{j_n}^2) - (u_{j_p}^2 y_{j_p}^2 + v_{j_p}^2 x_{j_p}^2)] = 3(N - Z). \end{aligned} \quad (204)$$

В последнем равенстве учтено, что

$$\sum_{j_p(n)} |\langle j_p \| \sigma t_- \| j_n \rangle|^2 = 3(2j_n(p) + 1), \quad (205)$$

и принято во внимание сохранение числа частиц в ТКБКШ (см. уравнение (183)). Для оператора Ферми доказательство выполнения правила сумм выглядит аналогично, с той лишь разницей, что

$$\sum_{j_p(n)} |\langle j_p \| t_- \| j_n \rangle|^2 = 2j_n(p) + 1. \quad (206)$$

Энергия и приведенная вероятность перехода на двухтепловквaziчастичные состояния (188) определяют силовую функцию  $S_{T_J}(E, T)$  оператора  $T_J$  в приближении независимых тепловых квазичастиц. Напомним, что для зарядово-нейтрального оператора энергия перехода совпадает с энергией двухтепловквaziчастичного состояния (см. уравнение (133)), а в случае зарядово-обменного оператора они отличаются на величину эффективного порога  $\pm \Delta_{np}$  (см. уравнение (135)).

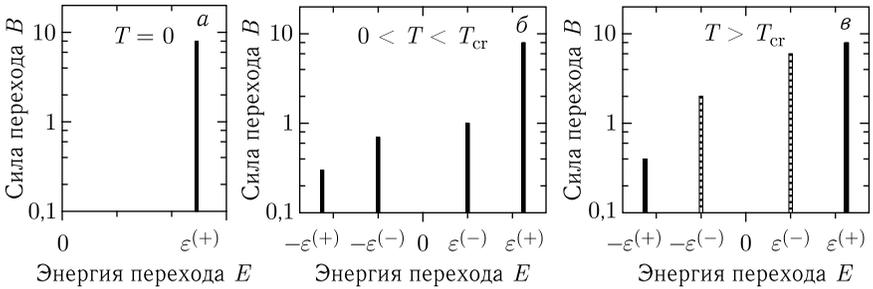


Рис. 1. Температурная эволюция силовой функции зарядово-нейтральных переходов на двухтеплоквазичастичные состояния (188) с фиксированными  $j_1$  и  $j_2$  в системе с парными корреляциями при  $T = 0$ . Сила ( $B$ ) и энергия ( $E$ ) перехода указаны в произвольных единицах. На рис. в сплошные пики соответствуют частично-дырочным переходам, а заштрихованные — переходам между дырочными или частичными состояниями. Для энергии переходов используются обозначения  $\varepsilon(\pm) = \varepsilon_{j_1} \pm \varepsilon_{j_2}$ . Остальные пояснения даны в тексте

Рассмотрим качественно температурную эволюцию силовой функции. На рис. 1 для трех значений температуры схематично показано распределение силы зарядово-нейтральных переходов на состояния (188) с фиксированными  $j_1$  и  $j_2$ . Предполагается, что в основном состоянии системы ( $T = 0$ ) есть парные корреляции. При  $T = 0$  силовая функция (130) содержит только один пик, соответствующий  $\uparrow$ -переходу с энергией  $E = \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}$  (см. рис. 1, а). Величина пика равна приведенной вероятности (198а) возбуждения двух квазичастиц Боголюбова с энергиями  $\varepsilon_{j_1}$  и  $\varepsilon_{j_2}$ . Отметим, что если оба состояния ( $j_1$  и  $j_2$ ) являются дырочными ( $pp$ -переход) или частичными ( $hh$ -переход), то при  $T = 0$  соответствующий одночастичный переход разблокирован благодаря наличию парных корреляций. Повышение температуры делает возможным переходы между состояниями с возбужденными квазичастицами. В результате, как показано на рис. 1, б, при  $0 < T < T_{cr}$  силовая функция оказывается фрагментированной на четыре пика, симметрично расположенных относительно нулевой энергии. Пик при энергии  $E = -\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}$  соответствует процессу уничтожения двух возбужденных квазичастиц Боголюбова (вероятность этого процесса задается выражением (198б)), а низкоэнергетические пики при энергиях  $E = \pm \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}$  определяют вероятности перехода возбужденной квазичастицы из одного состояния в другое (вероятности (198в) и (198г)). При этом каждому  $\uparrow$ -переходу с положительной энергией соответствует обратный  $\downarrow$ -переход с отрицательной энергией на тильда-сопряженное состояние. Вероятности  $\uparrow$ - и  $\downarrow$ -переходов связаны принципом детального баланса (199). Повышение температуры приводит к ослаблению парных корреляций, и при  $T > T_{cr}$  в силовой функции остаются только два из четырех пиков (см. рис. 1, в). Если состояния  $j_1$  и  $j_2$  соответствуют частично-дырочному переходу,

то в силовой функции сохраняются пики с энергией  $\pm \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}$ , если оба состояния ( $j_1$  и  $j_2$ ) являются дырочными или частичными, — то пики с энергией  $\pm \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}$ . Следовательно, в системе со спариванием рост температуры приводит к тому, что энергия  $pp$ - и  $hh$ -переходов понижается от значения  $\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)}$  до значений  $\pm \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)}$ . Если же в основном состоянии системы нет парных корреляций, то именно температура приводит к разблокировке  $pp$ - и  $hh$ -переходов.

Легко убедиться, что рост температуры оказывает аналогичное влияние и на силовую функцию зарядово-обменных переходов. В частности, фрагментация силовой функции максимальна при  $0 < T < T_{cr}$ , а рост температуры приводит к понижению энергии  $pp$ - и  $hh$ -переходов. Последний эффект играет важное значение при расчете скоростей захвата электронов нагретыми нейтронно-избыточными ядрами. В то же время между силовыми функциями зарядово-нейтральных и зарядово-обменных переходов есть два отличия. Первое отличие связано с тем, что энергия зарядово-обменного перехода и энергия соответствующего двух-тепловквазичастичного состояния отличаются на величину эффективного порога  $\pm \Delta_{np}$  \* (135). Благодаря эффективному порогу в нейтронно-избыточных ядрах, у которых  $\mu_n > \mu_p$ , силовая функция переходов  $p \rightarrow n$  сдвигается в область больших энергий, а силовая функция переходов  $n \rightarrow p$  — в сторону меньших энергий. Именно такой случай показан на рис. 2, где схематично представлено распределение силы переходов  $n \rightarrow p$  и  $p \rightarrow n$  в нейтронно-избыточном ядре при  $0 < T < T_{cr}$ . Из-за сдвига на  $\Delta_{np}$  пики силовых функций расположены несимметрично относительно нулевой энергии. Но при этом если в силовой функции перехода  $p \rightarrow n$  есть пик с энергией  $E$ , то в силовой функции перехода  $n \rightarrow p$  будет пик с энергией  $-E$ , соответствующий переходу на тильда-сопряженное состояние. Второе же отличие связано с тем, что при  $T > T_{cr}$  силовая функция зарядово-обменного перехода содержит не два пика, а один (см. обсуждение после уравнений (202)).

Из вышесказанного можно сделать следующие выводы о влиянии температуры на силовую функцию в ТКБКШ-приближении: 1) рост температуры ведет к фрагментации силовой функции одночастичных переходов, что связано с разблокировкой переходов с возбужденных квазичастичных состояний (степень фрагментации зависит от температуры, и она максимальна при  $0 < T < T_{cr}$ ); 2) при  $T \neq 0$  происходит разблокировка низкоэнергетических переходов и  $\downarrow$ -переходов, т. е. переходов с отрицательной энергией (за счет таких переходов для нагретого ядра исчезает понятие порога реакции); 3) тепловое размытие поверхности Ферми, так же как и парные корреляции, приводит к разблокировке  $pp$ -

\* Напомним, что в отличие от зарядово-нейтральных переходов между возбуждением зарядово-обменных нетильдованных (тильдованных) состояний и  $\uparrow(\downarrow)$ -переходами нет однозначного соответствия.

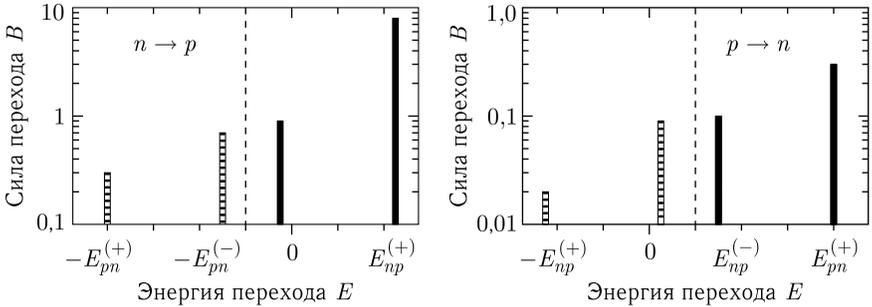


Рис. 2. Температурная эволюция силовой функции зарядово-обменных переходов на двухтепловквазичастичные состояния (188) с фиксированными  $j_p$  и  $j_n$  в системе с парными корреляциями при  $T = 0$ . Сила ( $B$ ) и энергия ( $E$ ) перехода указаны в произвольных единицах. Сплошные пики соответствуют переходам на двухтепловквазичастичные состояния с положительной энергией, а заштрихованные — на тильда-сопряженные состояния с отрицательной энергией. Штриховые линии показывают положение эффективного порога  $-\Delta_{np}$  ( $\Delta_{np}$ ) переходов  $n \rightarrow p$  ( $p \rightarrow n$ ). Введены следующие обозначения для энергий переходов:  $E_{pn}^{(\pm)} = \varepsilon_{pn}^{(\pm)} + \Delta_{np}$ ,  $E_{np}^{(\pm)} = \varepsilon_{np}^{(\pm)} - \Delta_{np}$ , где  $\Delta_{np} = \Delta\mu_{np} + \Delta M_{np} > 0$

и  $hh$ -переходов, но энергии переходов отличаются (при температурной разблокировке эта энергия определяется разностью энергий квазичастиц, а при разблокировке за счет парных корреляций — их суммой).

## 8. ЗАРЯДОВО-НЕЙТРАЛЬНЫЕ ФОНЫ В НАГРЕТЫХ ЯДРАХ

Согласно (191) в приближении ТКБКШ элементарными модами возбуждения нагретой системы являются двухтепловквазичастичные состояния (188). На следующем этапе приближенной диагонализации теплового гамильтониана учитывается взаимодействие между этими состояниями, которое обусловлено остаточным частично-дырочным взаимодействием. Рассмотрим сначала взаимодействие между зарядово-нейтральными состояниями. Мультипольные и спин-мультипольные операторы (157), входящие в определения остаточного взаимодействия  $H_{ch,n}$  (162), которые записаны в терминах тепловых квазичастиц, имеют такой же вид, как оператор одночастичных переходов (193). Свойства приведенных матричных элементов  $f_{j_1 j_2}^{(J;k)} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} f_{j_2 j_1}^{(J;k)}$  и  $f_{j_1 j_2}^{(L;J;k)} = (-1)^{j_1 + j_2 + J} f_{j_2 j_1}^{(L;J;k)}$  позволяют переписать выражения (157) в компактном виде:

$$M_{JM}^{(k)\dagger}(\tau) = \widehat{J}^{-1} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left\{ A_{JM}^{(+)\dagger}(j_1 j_2) + A_{JM}^{(+)}(j_1 j_2) + B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2) \right\}, \quad (207)$$

$$S_{LJM}^{(k)\dagger}(\tau) = \widehat{J}^{-1} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(L;J;k)} \left\{ A_{JM}^{(-)\dagger}(j_1 j_2) - A_{JM}^{(-)}(j_1 j_2) + B_{JM}^{(-)}(j_1 j_2) \right\},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{JM}^{(\pm)\dagger}(j_1 j_2) &= \frac{1}{2} u_{j_1 j_2}^{(\pm)} \left( x_{j_1} x_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} \pm y_{j_1} y_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} \right) + \\
 &\quad + i v_{j_1 j_2}^{(\mp)} x_{j_1} y_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}, \\
 A_{JM}^{(\pm)}(j_1 j_2) &= (-1)^{J-M} \left[ A_{J-M}^{(\pm)\dagger}(j_1 j_2) \right]^\dagger, \\
 B_{JM}^{(\pm)}(j_1 j_2) &= -v_{j_1 j_2}^{(\mp)} \left( x_{j_1} x_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} \pm y_{j_1} y_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} \right) + \\
 &\quad + i u_{j_1 j_2}^{(\pm)} \left( x_{j_1} y_{j_2} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} \pm y_{j_1} x_{j_2} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} \right)
 \end{aligned} \tag{208}$$

и использованы следующие обозначения для комбинаций коэффициентов преобразования Боголюбова:  $u_{j_1 j_2}^{(\pm)} = u_{j_1} v_{j_2} \pm v_{j_1} u_{j_2}$ ,  $v_{j_1 j_2}^{(\pm)} = u_{j_1} u_{j_2} \pm v_{j_1} v_{j_2}$ . Следовательно,  $\mathcal{H}_{\text{ch.n}}$  (162) содержит слагаемые, выражаемые через произведения операторов рождения и уничтожения пары тепловых квазичастиц:  $[\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} [\beta_{j_3}^\dagger \beta_{j_4}^\dagger]_{JM}$ ,  $[\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} [\tilde{\beta}_{j_3}^\dagger \tilde{\beta}_{j_4}^\dagger]_{JM}$ ,  $[\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} [\beta_{j_3}^\dagger \tilde{\beta}_{j_4}^\dagger]_{JM}$  и т. д. Такие слагаемые описывают взаимодействие между двухтеплоквазичастичными состояниями.

Для учета взаимодействия между двухтеплоквазичастичными состояниями воспользуемся обобщением квазичастичного приближения случайных фаз (КПСФ) [41, 112] при  $T \neq 0$ , т. е. диагонализуем (приближенно) тепловой гамильтониан

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{BCS}} + \mathcal{H}_{\text{ch.n}} \tag{209}$$

в терминах операторов тепловых фононов

$$\begin{aligned}
 Q_{JM_i}^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} \left( \psi_{j_1 j_2}^{J_i} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} + \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} + 2i\eta_{j_1 j_2}^{J_i} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi_{j_1 j_2}^{J_i} [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger - \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger + 2i\xi_{j_1 j_2}^{J_i} [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger \right). \tag{210}
 \end{aligned}$$

Операторы фононов  $\tilde{Q}_{JM_i}^\dagger$ ,  $Q_{JM_i}^\dagger$ ,  $\tilde{Q}_{JM_i}$  получаются из (210) путем применения операций эрмитово- и тильда-сопряжения. Фононы нормальной четности ( $\pi = (-1)^J$ ) генерируются мультипольной и спин-мультипольной с  $L = J$  компонентами остаточного взаимодействия, а фононы аномальной четности ( $\pi = (-1)^{J+1}$ ) — спин-мультипольным взаимодействием с  $L = J \pm 1$ .

Метод приближенной диагонализации теплового гамильтониана в терминах операторов рождения и уничтожения тепловых фононов (210) будем называть теплоквазичастичным приближением случайных фаз, подчеркивая тем самым, что фононные операторы состоят из операторов рождения и уничтожения тепловых квазичастиц. Вакуум тепловых фононов  $|\psi_0(T)\rangle$  является тепловым вакуумом в ТКПСФ при условии, что он удовлетворяет условию теплового состояния (142).

Для нахождения структуры (т. е. фоновых амплитуд  $\psi$ ,  $\varphi$  и т. д.) и энергии тепловых фононов, как и при выводе уравнений КПСФ для холодного ядра, будем использовать квазибозонное приближение, т. е. считать, что операторы рождения и уничтожения пары тепловых квазичастиц подчиняются бозонным коммутационным соотношениям\*:

$$\begin{aligned} [ [\beta_{j_1}^\dagger \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger, [\beta_{j_3}^\dagger \beta_{j_4}^\dagger]_{J'M'} ] &\approx \delta_{JJ'} \delta_{MM'} (\delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4} + (-1)^{j_1 - j_2 + J} \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3}), \\ [ [\beta_{j_1}^\dagger \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}^\dagger, [\beta_{j_3}^\dagger \tilde{\beta}_{j_4}^\dagger]_{J'M'} ] &\approx \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4}, \end{aligned} \quad (211)$$

а все остальные коммутаторы равны нулю. В квазибозонном приближении сумма  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  (191) и той части  $\mathcal{H}_{\text{ch.n.}}$ , которая описывает взаимодействие двухтеплоквазичастичных состояний, представляет собой квадратичную эрмитову форму относительно операторов рождения и уничтожения бозонов. Данная квадратичная форма может быть приведена к диагональному виду

$$\mathcal{H} \approx \sum_{JM_i} \omega_{J_i} (Q_{JM_i}^\dagger Q_{JM_i} - \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger \tilde{Q}_{JM_i}) \quad (212)$$

путем линейного преобразования (210). Чтобы преобразование было каноническим, т. е. обеспечивало бозонные коммутационные соотношения между операторами фононов, фоновые амплитуды должны удовлетворять ряду условий. В частности, из условия  $[Q_{JM_i}, Q_{JM_i'}^\dagger] = \delta_{ii'}$  следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} \left\{ (\psi_{j_1 j_2}^{J_i} \psi_{j_1 j_2}^{J_i'} - \varphi_{j_1 j_2}^{J_i} \varphi_{j_1 j_2}^{J_i'}) + (\tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i'} - \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i'}) + \right. \\ \left. + (\eta_{j_1 j_2}^{\lambda_i} \eta_{j_1 j_2}^{J_i'} - \xi_{j_1 j_2}^{J_i} \xi_{j_1 j_2}^{J_i'}) + (\tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i'} - \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i'}) \right\} = \delta_{ii'}, \end{aligned} \quad (213)$$

где использованы обозначения  $\tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} \eta_{j_2 j_1}^{J_i}$  и  $\tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} \xi_{j_2 j_1}^{J_i}$  \*\*. Рассмотрев другие коммутаторы ( $[Q_{JM_i}, \tilde{Q}_{JM_i'}^\dagger] = 0$  и т. д.), получим ряд дополнительных соотношений между амплитудами (см. соотношения (325)–(327) в прил. Б). Из полученных соотношений между амплитудами следуют нормировка и ортогональность однофононных состояний:

$$\langle Q_{JM_i} | Q_{JM_i'} \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{ii'}, \quad \langle Q_{JM_i} | \tilde{Q}_{JM_i'} \rangle = 0. \quad (214)$$

\* Как и при  $T = 0$ , справедливость квазибозонного приближения связана с требованием малости числа тепловых квазичастиц в вакууме тепловых фононов. Данное требование является основным предположением в ТКПСФ.

\*\* Другие амплитуды при перестановке индексов  $j_1$  и  $j_2$  умножаются на  $(-1)^{j_1 - j_2 + J}$  (т. е.  $\psi_{j_2 j_1}^{J_i} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} \psi_{j_1 j_2}^{J_i}$  и т. д.).

Кроме того, с их помощью можно показать, что преобразования, обратные к (210), имеют вид

$$\begin{aligned}
 [\beta_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} &= \sum_i \left( \psi_{j_1 j_2}^{J_i} Q_{JM_i}^\dagger + \varphi_{j_1 j_2}^{J_i} Q_{JM_i} + \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger + \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{Q}_{JM_i} \right), \\
 [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} &= \widetilde{[\beta_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM}}, \\
 [\beta_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM} &= -i \sum_i \left( \eta_{j_1 j_2}^{J_i} Q_{JM_i}^\dagger + \xi_{j_1 j_2}^{J_i} Q_{JM_i} + \tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger + \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{Q}_{JM_i} \right), \\
 [\tilde{\beta}_{j_1}^\dagger, \beta_{j_2}^\dagger]_{JM} &= -\widetilde{[\beta_{j_1}^\dagger, \tilde{\beta}_{j_2}^\dagger]_{JM}}.
 \end{aligned} \tag{215}$$

Данные соотношения позволяют выразить произвольный одночастичный оператор через операторы тепловых фононов.

До сих пор рассмотрение не отличалось от стандартного изложения КПСФ. Отличительной особенностью метода ТКПСФ является то, что диагонализированный гамильтониан (212) инвариантен относительно унитарного преобразования, смешивающего тильдованные и нетильдованные фононы

$$Q_{JM_i}^\dagger \rightarrow X_i Q_{JM_i}^\dagger + Y_i \tilde{Q}_{JM_i}, \quad \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger \rightarrow X_i \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger + Y_i Q_{JM_i}, \tag{216}$$

где  $X_i^2 - Y_i^2 = 1$ . Иными словами, процедура диагонализации определяет структуру тепловых фононов и фононного вакуума лишь с точностью до унитарного преобразования (216). Напомним, что с такой же ситуацией мы столкнулись при определении структуры тепловых квазичастиц.

Получим дополнительные условия на фононные амплитуды, потребовав, чтобы вакуум тепловых фононов  $|\psi_0(T)\rangle$  обладал свойством теплового состояния (142). В качестве оператора  $A$  в условии (142) сначала рассмотрим двухквазичастичный оператор  $A = [\alpha_{j_1}^\dagger, \alpha_{j_2}^\dagger]_{JM}$ ,  $j_{1,2} \in \tau$ . Выразим этот оператор через тепловые квазичастицы, а затем, воспользовавшись обратными преобразованиями (215), — через операторы тепловых фононов. Удержим в получившемся выражении только однофононные слагаемые

$$\begin{aligned}
 A = \sum_i \left\{ (x_{j_1} x_{j_2} \psi_{j_1 j_2}^{J_i} + y_{j_1} y_{j_2} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i}) Q_{JM_i}^\dagger + \right. \\
 + (x_{j_1} x_{j_2} \varphi_{j_1 j_2}^{J_i} + y_{j_1} y_{j_2} \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i}) Q_{JM_i} + (x_{j_1} x_{j_2} \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} + y_{j_1} y_{j_2} \varphi_{j_1 j_2}^{J_i}) \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger + \\
 \left. + (x_{j_1} x_{j_2} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} + y_{j_1} y_{j_2} \psi_{j_1 j_2}^{J_i}) \tilde{Q}_{JM_i} \right\}. \tag{217}
 \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в условие теплового состояния (142) приводит к следующим соотношениям между тильдованными ( $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ) и

нетильдованными ( $\psi$ ,  $\varphi$ ) амплитудами:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i} = \frac{x_{j_1} x_{j_2} e^{-\omega_{J_i}/2T} - y_{j_1} y_{j_2}}{x_{j_1} x_{j_2} - y_{j_1} y_{j_2} e^{-\omega_{J_i}/2T}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i}. \quad (218)$$

Эти же соотношения можно получить, если в качестве  $A$  рассмотреть оператор  $[\alpha_{\mathcal{J}_1} \alpha_{\mathcal{J}_2}]_{JM}$ . Если же в качестве  $A$  использовать  $[\alpha_{j_1}^\dagger \alpha_{j_2}]_{JM}$  или  $[\alpha_{\mathcal{J}_1} \alpha_{j_2}^\dagger]_{JM}$ , то получим соотношения между фоновыми амплитудами  $\eta$ ,  $\xi$  и  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\xi}$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i} = \frac{x_{j_1} y_{j_2} e^{-\omega_{J_i}/2T} - y_{j_1} x_{j_2}}{x_{j_1} y_{j_2} - y_{j_1} x_{j_2} e^{-\omega_{J_i}/2T}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i}. \quad (219)$$

Полученные соотношения между тильдованными и нетильдованными фоновыми амплитудами однозначно фиксируют структуру тепловых фононов таким образом, что их вакуум является тепловым вакуумом в ТКПСФ.

Зафиксируем «истинную» структуру тепловых фононов при выводе ТКПСФ-уравнений с помощью эффективных амплитуд  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $H$  и  $\Xi$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i} &= [X_{J_i} x_{j_1} x_{j_2} - Y_{J_i} y_{j_1} y_{j_2}]^{-1} \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i} = \\ &= [Y_{J_i} x_{j_1} x_{j_2} - X_{J_i} y_{j_1} y_{j_2}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i}, \\ \begin{pmatrix} H \\ \Xi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i} &= [X_{J_i} x_{j_1} y_{j_2} - Y_{J_i} y_{j_1} x_{j_2}]^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i} = \\ &= [Y_{J_i} x_{j_1} y_{j_2} - X_{J_i} y_{j_1} x_{j_2}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i}, \end{aligned} \quad (220)$$

где зависящие от температуры функции  $X_{J_i}$  и  $Y_{J_i}$  связаны с функцией распределения Бозе-Эйнштейна

$$Y_{J_i} = (e^{\omega_{J_i}/T} - 1)^{-1/2}, \quad X_{J_i} = (1 + Y_{J_i}^2)^{1/2}. \quad (221)$$

Таким образом, требование выполнения условия теплового состояния (142) для вакуума тепловых фононов приводит к тому, что фоновые амплитуды зависят как от фермионных, так и от бозонных чисел заполнения. При этом прямые и тильда-сопряженные обратные фоновые амплитуды (т.е.  $\psi$  и  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$  и  $\varphi$ ,  $\eta$  и  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$  и  $\xi$ ) выражаются через одну и ту же эффективную амплитуду ( $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $H$ ,  $\Xi$ ).

Легко показать, что эффективные амплитуды удовлетворяют следующим соотношениям при перестановке индексов  $j_1$  и  $j_2$ :

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_{j_2 j_1}^{J_i} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{J_i}, \quad H_{j_2 j_1}^{J_i} = (-1)^{j_1 + j_2 + J} \Xi_{j_1 j_2}^{J_i}. \quad (222)$$

Кроме того, для них условие ортонормировки (213) принимает вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} \left\{ (\Psi_{j_1 j_2}^{Ji} \Psi_{j_1 j_2}^{Ji'} - \Phi_{j_1 j_2}^{Ji} \Phi_{j_1 j_2}^{Ji'}) (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + \right. \\ \left. + (\mathbb{H}_{j_1 j_2}^{Ji} \mathbb{H}_{j_1 j_2}^{Ji'} - \Xi_{j_1 j_2}^{Ji} \Xi_{j_1 j_2}^{Ji'}) (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) \right\} = \delta_{ii'}. \quad (223)$$

Данное соотношение совпадает с условием нормировки амплитуд фононных операторов, которое выполняется в рамках метода температурного ПСФ [113] и при использовании температурных функций Грина [114]. Следует, однако, иметь в виду, что в работах [113, 114] в определение фонона входят квазичастицы Боголюбова, а не тепловые квазичастицы. Сопоставление выражения (223) с условием нормировки в перечисленных работах показывает, что  $\Psi_{j_1 j_2}^{Ji}$  соответствует прямой фононной амплитуде,  $\Phi_{j_1 j_2}^{Ji}$  — обратной, а  $\mathbb{H}_{j_1 j_2}^{Ji}$  и  $\Xi_{j_1 j_2}^{Ji}$  — так называемые амплитуды рассеяния, которые возникают благодаря тепловому размытию поверхности Ферми в ядре.

Чтобы диагонализировать тепловой гамильтониан в базисе тепловых фононов, т.е. привести его к виду (212), воспользуемся уравнением движения (143), в котором в качестве  $\delta O$  рассмотрим операторы рождения и уничтожения пары тепловых квазичастиц, а роль вакуумного состояния играет тепловой вакуум ТКБКШ-приближения  $|\varphi_0(T)\rangle$ . При вычислении коммутаторов предполагаем справедливость квазибозонного приближения (211). В результате приходим к системе линейных однородных ТКПСФ-уравнений для эффективных амплитуд (220). Для тепловых фононов нормальной четности уравнения ТКПСФ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} G_{j_1 j_2}^{Ji} - \widehat{J}^{-2} u_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_{k=1}^N f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(m;k)} D_{Ji}^{(k)}(\rho\tau) \right) &= \omega_{Ji} W_{j_1 j_2}^{Ji}, \\ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} W_{j_1 j_2}^{Ji} - \widehat{J}^{-2} u_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_{k=1}^N f_{j_1 j_2}^{(JJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{JJi}^{(k)}(\rho\tau) \right) &= \omega_{Ji} G_{j_1 j_2}^{Ji}, \\ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} T_{j_1 j_2}^{Ji} - \widehat{J}^{-2} v_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_{k=1}^N f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(m;k)} D_{Ji}^{(k)}(\rho\tau) \right) &= \omega_{Ji} S_{j_1 j_2}^{Ji}, \\ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} S_{j_1 j_2}^{Ji} - \widehat{J}^{-2} v_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_{k=1}^N f_{j_1 j_2}^{(JJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{JJi}^{(k)}(\rho\tau) \right) &= \omega_{Ji} T_{j_1 j_2}^{Ji}. \end{aligned} \quad (224)$$

В случае же фононов аномальной четности система ТКПСФ-уравнений записывается как [115]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} G_{j_1 j_2}^{Ji} &= \omega_{Ji} W_{j_1 j_2}^{Ji}, \\ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} W_{j_1 j_2}^{Ji} - \widehat{J}^{-2} u_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_{k=1}^N \sum_{L=J\pm 1} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{LJi}^{(k)}(\rho\tau) \right) &= \omega_{Ji} G_{j_1 j_2}^{Ji}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} T_{j_1 j_2}^{J_i} = \omega_{J_i} S_{j_1 j_2}^{J_i}, \tag{225}$$

$$\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} S_{j_1 j_2}^{J_i} - \hat{J}^{-2} v_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_{k=1}^N \sum_{L=J \pm 1} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{L J_i}^{(k)}(\rho \tau) \right) = \omega_{J_i} T_{j_1 j_2}^{J_i}.$$

В приведенных уравнениях использованы следующие обозначения для линейных комбинаций эффективных амплитуд:

$$D_{J_i}^{(k)}(\tau) = \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left\{ u_{j_1 j_2}^{(+)} (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) G_{j_1 j_2}^{J_i} + v_{j_1 j_2}^{(-)} (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) T_{j_1 j_2}^{J_i} \right\}, \tag{226}$$

$$D_{L J_i}^{(k)}(\tau) = \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} \left\{ u_{j_1 j_2}^{(-)} (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) W_{j_1 j_2}^{J_i} + v_{j_1 j_2}^{(+)} (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) S_{j_1 j_2}^{J_i} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} G_{j_1 j_2}^{J_i} &= \Psi_{j_1 j_2}^{J_i} + \Phi_{j_1 j_2}^{J_i}, & W_{j_1 j_2}^{J_i} &= \Psi_{j_1 j_2}^{J_i} - \Phi_{j_1 j_2}^{J_i}, \\ T_{j_1 j_2}^{J_i} &= H_{j_1 j_2}^{J_i} + \Xi_{j_1 j_2}^{J_i}, & S_{j_1 j_2}^{J_i} &= H_{j_1 j_2}^{J_i} - \Xi_{j_1 j_2}^{J_i}. \end{aligned} \tag{227}$$

Полученные системы ТКПСФ-уравнений представляют собой задачу на собственные значения, матрица которой имеет размерность в 2 раза больше, чем число двухтепловквaziчастичных состояний. Как показано в прил. Б, использование сепарабельизованного остаточного взаимодействия позволяет свести задачу на собственные значения к системе  $4N$ -линейных однородных уравнений для функций  $D_{J_i}^{(k)}(\tau)$  и  $D_{L J_i}^{(k)}(\tau)$ ,  $\tau = n, p$  (уравнения (330), (334)). Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к секулярному уравнению для зависящей от температуры энергии  $\omega_{J_i}$  тепловых фононов (см. уравнения (332), (335)). Находя для каждого  $\omega_{J_i}$  функции  $D_{J_i}^{(k)}(\tau)$ ,  $D_{L J_i}^{(k)}(\tau)$  (с произвольной нормировкой) и подставляя их в (224), (225), определим ненормированные эффективные амплитуды (220). Нормировка эффективных амплитуд осуществляется при условии (223).

Получим выражения для амплитуды перехода с теплового вакуума на однофононные состояния. Для этого с помощью (193) и обратных преобразований (215) выразим одночастичный тензорный оператор  $\mathcal{T}_{JM}$  через операторы тепловых фононов:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{JM} &= \hat{J}^{-1} \sum_i X_{J_i} \left\{ [\Gamma_{J_i}^{(+)}(\mathcal{T}_J) + \Gamma_{J_i}^{(-)}(\mathcal{T}_J)] (Q_{JM_i}^{\dagger} + e^{-\omega_{J_i}/2T} \tilde{Q}_{JM_i}) + \right. \\ &\quad \left. + [\Gamma_{J_i}^{(+)}(\mathcal{T}_J) - \Gamma_{J_i}^{(-)}(\mathcal{T}_J)] (Q_{\overline{JM}_i} + e^{-\omega_{J_i}/2T} \tilde{Q}_{\overline{JM}_i}^{\dagger}) \right\} + \\ &\quad + \hat{J}^{-1} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} t_{j_1 j_2}^{(J)} \left\{ B_{JM}(j_1 j_2) + B_{JM}^*(j_1 j_2) \right\}, \end{aligned} \tag{228}$$

где \*

$$\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J) = \frac{1}{2} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} t_{j_1 j_2}^{(J)} \left\{ (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) u_{j_1 j_2}^{(+)} G_{j_1 j_2}^{Ji} + (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) v_{j_1 j_2}^{(-)} T_{j_1 j_2}^{Ji} \right\}, \quad (229)$$

$$\Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J) = \frac{1}{2} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} t_{j_1 j_2}^{(J)} \left\{ (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) u_{j_1 j_2}^{(-)} W_{j_1 j_2}^{Ji} + (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) v_{j_1 j_2}^{(+)} S_{j_1 j_2}^{Ji} \right\}.$$

Зависящие от температуры функции  $\Gamma_{Ji}^{(\pm)}(\mathcal{T}_J)$  определяют амплитуду перехода на однофононные состояния:

$$\langle Q_{Ji} \| \mathcal{T}_J \| \psi_0(T) \rangle = X_{Ji} [\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J) + \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J)], \quad (230)$$

$$\langle \tilde{Q}_{Ji} \| \mathcal{T}_J \| \psi_0(T) \rangle = Y_{Ji} [\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J) - \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J)].$$

Получим выражения для приведенных вероятностей переходов

$$B_{Ji}(\mathcal{T}_J) = |\langle Q_{Ji} \| \mathcal{T}_J \| \psi_0(T) \rangle|^2 = X_{Ji}^2 |\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J) + \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J)|^2, \quad (231)$$

$$\tilde{B}_{Ji}(\mathcal{T}_J) = |\langle \tilde{Q}_{Ji} \| \mathcal{T}_J \| \psi_0(T) \rangle|^2 = Y_{Ji}^2 |\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J) - \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J)|^2.$$

Если  $\mathcal{T}_{JM}^{\dagger} = \pm(-1)^{J-M} \mathcal{T}_{J-M}$  (см. сноску ниже), то вероятности переходов на тильда-сопряженные однофононные состояния связаны как

$$\tilde{B}_{Ji}(\mathcal{T}_J) = e^{-\omega_{Ji}/T} B_{Ji}(\mathcal{T}_J). \quad (232)$$

Полученные выражения для амплитуды и силы переходов на однофононные состояния вместе с энергией переходов

$$E_{Ji} = \omega_{Ji}, \quad \tilde{E}_{Ji} = -\omega_{Ji} \quad (233)$$

определяют зарядово-нейтральные спектральные плотности (127) и силовые функции (130) в ТКПСФ. Благодаря тому, что тепловой вакуум ТКПСФ удовлетворяет условию теплового состояния (142), для спектральных плотностей и силовых функций справедлив принцип детального баланса (119).

Так же как операторы тепловых и боголюбовских квазичастиц связаны тепловым преобразованием (171), операторы тепловых фононов можно представить как результат следующего теплового преобразования:

$$Q_{JM_i}^{\dagger} = X_{Ji} q_{JM_i}^{\dagger} - Y_{Ji} \tilde{q}_{JM_i}, \quad \tilde{Q}_{JM_i}^{\dagger} = X_{Ji} \tilde{q}_{JM_i}^{\dagger} - Y_{Ji} q_{JM_i}, \quad (234)$$

\* Воспользовавшись соотношениями (222), легко показать, что если  $\mathcal{T}_{JM}^{\dagger} = (-1)^{J-M} \mathcal{T}_{J-M}$  (а значит,  $t_{j_2 j_1}^{(J)} = (-1)^{j_1 - j_2 + J} t_{j_1 j_2}^{(J)}$ ), то  $\Gamma_i^{(-)}(T_J) = 0$ . И, напротив, если  $\mathcal{T}_{JM}^{\dagger} = -(-1)^{J-M} \mathcal{T}_{J-M}$  (а значит,  $t_{j_2 j_1}^{(J)} = (-1)^{j_1 + j_2 + J} t_{j_1 j_2}^{(J)}$ ), то  $\Gamma_i^{(+)}(T_J) = 0$ .

где операторы  $q$ -фононов соответствуют значениям  $X_{Ji} = 1$ ,  $Y_{Ji} = 0$  в определении амплитуд (220). При этом однофононная часть теплового гамильтониана является диагональной в терминах как  $q$ -фононов, так и тепловых фононов:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{TQRP}} &= \sum_{JM_i} \omega_{Ji} (Q_{JM_i}^\dagger Q_{JM_i} - \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger \tilde{Q}_{JM_i}) = \\ &= \sum_{JM_i} \omega_{Ji} (q_{JM_i}^\dagger q_{JM_i} - \tilde{q}_{JM_i}^\dagger \tilde{q}_{JM_i}). \end{aligned} \quad (235)$$

Связь между вакуумом  $q$ -фононов  $|\psi_0\rangle$  и тепловым вакуумом  $|\psi_0(T)\rangle$  имеет вид, аналогичный (177) [37]. Воспользовавшись стандартной процедурой [41], тепловой вакуум ТКПСФ можно выразить через тепловой вакуум ТКБКШ-приближения и доказать его тильда-инвариантность.

В работах [84, 104, 116, 117] именно  $q$ -фононы рассматривались в качестве тепловых, а их вакуум играл роль теплового вакуума. При таком подходе в теории не возникает бозонных чисел заполнения. Кроме того, оказывается равной нулю вероятность перехода на тильдованные состояния с отрицательной энергией

$$\begin{aligned} b_{Ji}(\mathcal{T}_J) &= |\langle q_{Ji} | \mathcal{T}_J | \psi_0 \rangle|^2 = |\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J) + \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J)|^2, \\ \tilde{b}_{Ji}(\mathcal{T}_J) &= |\langle \tilde{q}_{Ji} | \mathcal{T}_J | \psi_0 \rangle|^2 = 0, \end{aligned} \quad (236)$$

что приводит к нарушению принципа детального баланса, так как делает невозможными экзоэнергетические процессы, связанные с девозбуждением нагретого ядра. Это обстоятельство не учитывалось в работах [84, 104, 116, 117].

Тот факт, что в системе  $q$ -фононов, как и для ядра в основном состоянии, возможен только процесс возбуждения, позволяет рассматривать  $q$ -фононы как «холодные» фононы, а тепловое преобразование (234) — как процесс их нагревания, т.е. переход к новым фононным операторам, вакуумное состояние которых является тепловым вакуумом. После нагревания тепловой вакуум содержит термически возбужденные  $q$ -фононы:

$$\langle \psi_0(T) | q_{JM_i}^\dagger q_{JM_i} | \psi_0(T) \rangle = Y_{Ji}^2. \quad (237)$$

Поэтому в соответствии с выражениями (231) вероятность процесса девозбуждения, в котором из системы удаляется  $q$ -фонон, пропорциональна  $Y_{Ji}^2$ , а вероятность обратного процесса возбуждения, в котором в систему добавляется  $q$ -фонон, пропорциональна  $X_{Ji}^2 = 1 + Y_{Ji}^2$ .

В работе [35] на примере гамильтониана КФМ с мультипольным остаточным взаимодействием мы исследовали, как влияет выбор теплового преобразования (171) (действительное или комплексное) на уравнения ТКПСФ. Было обнаружено, что, хотя вид секулярного уравнения для энергии фононов не зависит от выбора теплового преобразования, в структуре тепловых фононов возникают различия. В частности, было по-

казано, что, для того чтобы в пределе  $H_{\text{res}} = 0$  тепловой фонon соответствовал возбуждению двухтеллоквазичастичного состояния, а тепловой вакуум ТКПСФ переходил в тепловой вакуум ТКБКШ-приближения, необходимо использовать именно комплексное преобразование.

## 9. ФРАГМЕНТАЦИЯ ЗАРЯДОВО-НЕЙТРАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ФОНОНОВ

В холодном ядре ( $T = 0$ ) приближение случайных фаз успешно применяется как при изучении основных свойств гигантских резонансов (положение, вероятности возбуждения), так и при изучении свойств коллективных низколежащих ядерных состояний. В то же время известно, что предположение о невзаимодействующих коллективных модах — фонанах — не позволяет описать всего разнообразия свойств ядерных возбуждений. В частности, в простом однофононном приближении не удается воспроизвести вероятности переходов между низколежащими вибрационными состояниями, ширины гигантских резонансов, сечения фотопоглощения и т. д. В микроскопических ядерных моделях частичное или полное решение перечисленных проблем достигается путем усложнения волновой функции возбужденных состояний за счет включения в ее структуру все более сложных компонент. Взаимодействие между простыми и сложными компонентами волновой функции происходит за счет той части остаточного взаимодействия, которой пренебрегают в ПСФ при расчете структуры однофононных состояний. Одной из подобных моделей является квазичастично-фононная модель ядра, которая основана на связи элементарных ядерных мод возбуждения — квазичастиц Боголюбова и ПСФ фононов [92, 101, 118, 119]. С помощью КФМ удастся описать те свойства ядерных возбуждений, которые связаны малоквазичастичными компонентами волновых функций. В четно-четных ядрах это одно- и двухфононные конфигурации, а в нечетных — одноквазичастичные конфигурации и конфигурации типа «квазичастица + фонon». Взаимодействие этих простых конфигураций с более сложными приводит к их фрагментации по большому числу состояний. Одно из проявлений фрагментации — появление больших ширин у гигантских резонансов и глубоких дырочных состояний [120, 121].

Рассмотренные выше обобщения методов БКШ и КПСФ на нагретые ядра с помощью метода супероператоров, а также тот факт, что структура теплового гамильтониана наследует структуру исходного физического гамильтониана ядра, позволяют произвести выход за рамки однофононного приближения при  $T \neq 0$  путем традиционного для КФМ способа, т. е. за счет усложнения волновой функции возбужденных состояний за счет включения в нее двухфононных компонент. Первая работа в этом направлении была опубликована в 1994 г. [104]. В дальнейшем теоретические результаты этой работы использовались для расчета зависимости ширины гигантского дипольного резонанса от температуры

ядра [117, 122]. Однако в этих работах структура тепловых фононов находилась согласно [84, 116], т. е. предполагалось, что  $q$ -фононы являются тепловыми фононами, а их вакуум является тепловым вакуумом. Как было показано в предыдущем разделе, при таком предположении вакуум ТКПСФ не удовлетворяет условию теплового состояния (109). В результате этого принцип детального баланса нарушается как на однофононном уровне, так и при учете связи фононов. Чтобы учесть правильную структуру теплового вакуума при выходе за рамки однофононного приближения, в работах [35, 107, 123] результаты [104] были пересмотрены в сторону усложнения пробной волновой функции. Как будет показано далее, такое усложнение совершенно необходимо, если мы хотим удовлетворить условию теплового состояния.

Известно, что использование в КФМ сепарабельного остаточного взаимодействия позволяет обойти проблему роста конфигурационного пространства по мере усложнения структуры волновой функции [92, 118, 119]. Сепарабелизация сил Ландау–Мигдала позволяет применить ту же самую схему расчетов при выходе за рамки ПСФ, что является перспективным направлением с точки зрения самосогласованности и возможности проведения глобальных расчетов для большого количества ядер. Однако здесь с целью наглядности и упрощения вывода результатов ограничимся гамильтонианом КФМ, в котором учтем только мультипольное остаточное взаимодействие в зарядово-нейтральном канале. Обобщение полученных результатов на случай сепарабельных сил более сложного вида не представляет принципиальной сложности.

Если учесть только мультипольное взаимодействие и принять  $N = 1$ , секулярное уравнение (332) для определения энергии  $\omega_{Ji}$  однофононных состояний нормальной четности сводится к условию детерминанта второго порядка

$$[\mathcal{X}_{mm;p}^{(J)}(\omega) + \mathcal{X}_{mm;n}^{(J)}(\omega)](\chi_0^{(J)} + \chi_1^{(J)}) - 4\chi_0^{(J)}\chi_1^{(J)}\mathcal{X}_{mm;p}^{(J)}(\omega)\mathcal{X}_{mm;n}^{(J)}(\omega) = 1, \quad (238)$$

где функции  $\mathcal{X}_{mm;\tau}^{(J)}(\omega)$  определены в (331). Отметим, что для сепарабельных остаточных сил подобное уравнение было впервые получено Игнатьюком с помощью температурных функций Грина [124], а также в ряде более поздних работ, основанных на применении температурного ПСФ (см., например, [125–127]). В работе [84] уравнение (238) получено как частный случай более общего уравнения, учитывающего наряду с частично-дырочным и частично-частичное мультипольное остаточное взаимодействие. В нашей работе [35] уравнение (238) впервые получено с использованием комплексного теплового преобразования (171). Там же приведены выражения для фононных амплитуд  $\psi$ ,  $\varphi$  и т. д., из которых следуют выражения для эффективных амплитуд

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{Ji} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_\tau^{Ji}}} \frac{f_{j_1 j_2}^{(J)} u_{j_1 j_2}^{(+)}}{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} \mp \omega_{Ji}}, \quad \begin{pmatrix} \text{H} \\ \Xi \end{pmatrix}_{j_1 j_2}^{Ji} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_\tau^{Ji}}} \frac{f_{j_1 j_2}^{(J)} v_{j_1 j_2}^{(-)}}{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} \mp \omega_{Ji}}. \quad (239)$$

Зависимость эффективных амплитуд от температуры содержится в зависящих от  $T$  энергиях тепловых квазичастиц и фононов, а также в нормировочных коэффициентах  $N_r^{Ji}$ , аналитический вид которых приведен в работе [35, формула (55)]. Следует также отметить, что полученные выражения для эффективных амплитуд совпадают с выражениями для фононных амплитуд из работы [114], где они были получены с помощью температурных функций Грина.

После того как часть теплового гамильтониана КФМ, квадратичная по операторам рождения и уничтожения двухквазичастичных состояний, была приведена к диагональному виду, тепловой гамильтониан можно записать в следующем виде\*:

$$\mathcal{H} \approx \sum_{JM_i} \omega_{Ji} (Q_{JM_i}^\dagger Q_{JM_i} - \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger \tilde{Q}_{JM_i}) + \mathcal{H}_{\text{qph}}. \quad (240)$$

Явный вид слагаемого  $\mathcal{H}_{\text{qph}}$ , которое описывает взаимодействие тепловых квазичастиц и фононов, можно получить, записав мультипольный оператор  $\mathcal{M}_{JM}^\dagger(\tau)$  через операторы фононов:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{JM}^\dagger(\tau) &= \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathcal{J}}^{-1} \sum_i D_{Ji}(\tau) \left\{ X_{Ji} (Q_{JM_i}^\dagger + Q_{\overline{JM_i}}) + Y_{Ji} (\tilde{Q}_{\overline{JM_i}}^\dagger + \tilde{Q}_{JM_i}) \right\} + \\ &\quad + \hat{\mathcal{J}}^{-1} \sum_{j_1 j_2}^\tau f_{j_1 j_2}^{(J)} B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2). \end{aligned} \quad (241)$$

Подстановка этого выражения в тепловой гамильтониан приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{qph}} &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{JM_i} \sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^\tau \frac{f_{j_1 j_2}^{(J)}}{\sqrt{N_r^{Ji}}} \left[ \left\{ X_{Ji} (Q_{JM_i}^\dagger + Q_{JM_i}) + Y_{Ji} (\tilde{Q}_{JM_i}^\dagger + \tilde{Q}_{\overline{JM_i}}) \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2) + (\text{h. c.}) - (\text{t. c.}) \right], \end{aligned} \quad (242)$$

где для сокращения записи слагаемые, эрмитово- и тильда-сопряженные к указанному, обозначены соответственно как (h. c.) и (t. c.), а выражение для двухтепложвазичастичного оператора  $B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2)$  приведено в (208). Как и в случае холодного ядра, слагаемое  $\mathcal{H}_{\text{qph}}$  смешивает состояния с разным числом фононов, благодаря чему происходит фрагментация (уширение) силы переходов на однофононные состояния.

\* Приблизительный знак равенства в (240) означает, что в тепловом гамильтониане КФМ мы пренебрегаем частью, содержащей произведения операторов рождения и уничтожения тепловых квазичастиц вида  $\beta^\dagger \beta \beta^\dagger \beta$ . Как и при  $T = 0$ , слагаемые такого вида представляют собой операторы четвертого порядка по фононным операторам, в то время как  $\mathcal{H}_{\text{qph}} \sim Q^\dagger Q^\dagger Q$  является ведущей поправкой к тепловому гамильтониану невзаимодействующих фононов.

Строго говоря, тепловой гамильтониан  $\mathcal{H}$ , записанный в терминах тепловых квазичастиц и фононов, содержит слагаемые типа  $B^\dagger B$ , которые описывают неучтенное в ТКПСФ взаимодействие тепловых квазичастиц. Этими слагаемыми, как и в стандартном КФМ при нулевой температуре [92, 118], будем пренебрегать. Кроме того, при учете связи тепловых квазичастиц и тепловых фононов будем пренебрегать принципом Паули, т. е. будем считать операторы тепловых фононов «истинными» бозонами. Помимо этого будем использовать еще одно приближение, а именно будем считать, что

$$[B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2), \tilde{q}_{J'M'}^\dagger] = [B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2), \tilde{q}_{J'M'}] = 0. \quad (243)$$

Чтобы пояснить смысл этого приближения, запишем  $\mathcal{H}_{\text{qph}}$  через  $q$ -фононы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{qph}} = & -\frac{1}{2} \sum_{JM} \sum_{\tau} \times \\ & \times \sum_{j_1 j_2}^{\tau} \frac{f_{j_1 j_2}^{(J)}}{\sqrt{\mathcal{N}_{\tau}^{J_i}}} \left[ (q_{JM}^\dagger + q_{JM}) B_{JM}^{(+)}(j_1 j_2) + (\text{h. c.}) - (\text{t. c.}) \right]. \quad (244) \end{aligned}$$

При сравнении этого выражения с выражением (242) видно, что приближение (243) выключает взаимодействие «холодных» фононов  $q^\dagger$ ,  $q$  и  $\tilde{q}^\dagger$ ,  $\tilde{q}$ . Взаимодействие тильдованных и нетильдованных фононных возбуждений происходит только после «нагрева» (234).

Чтобы удовлетворить условию теплового состояния (142) при учете связи одно- и двухфононных конфигураций, будем искать собственные функции теплового гамильтониана (240) в следующем виде:

$$\begin{aligned} |Q_{JM\nu}\rangle = & Q_{JM\nu}^\dagger |\Psi_0(T)\rangle = \\ = & \left[ \sum_i \left\{ R_i(J\nu) Q_{JM_i}^\dagger + \tilde{R}_i(J\nu) \tilde{Q}_{JM_i}^\dagger - N_i(J\nu) Q_{JM_i} - \tilde{N}_i(J\nu) \tilde{Q}_{JM_i} \right\} + \right. \\ & + \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 \\ \lambda_2 i_2}} \left\{ P_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu) [Q_{\lambda_1 i_1}^\dagger Q_{\lambda_2 i_2}^\dagger]_{JM} + \tilde{P}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu) [\tilde{Q}_{\lambda_1 i_1}^\dagger \tilde{Q}_{\lambda_2 i_2}^\dagger]_{JM} + \right. \\ & + 2S_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu) [Q_{\lambda_1 i_1}^\dagger \tilde{Q}_{\lambda_2 i_2}^\dagger]_{JM} - T_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu) [Q_{\lambda_1 i_1} Q_{\lambda_2 i_2}]_{JM} - \\ & \left. \left. - \tilde{T}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu) [\tilde{Q}_{\lambda_1 i_1} \tilde{Q}_{\lambda_2 i_2}]_{JM} - 2Z_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu) [Q_{\lambda_1 i_1} \tilde{Q}_{\lambda_2 i_2}]_{JM} \right\} \right] |\Psi_0(T)\rangle, \quad (245) \end{aligned}$$

где, как и ранее, квадратные скобки обозначают связку двух угловых моментов:

$$[Q_{\lambda_1 i_1}^\dagger Q_{\lambda_2 i_2}^\dagger]_{JM} = \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 | JM \rangle Q_{\lambda_1 \mu_1 i_1}^\dagger Q_{\lambda_2 \mu_2 i_2}^\dagger,$$

$$[Q_{\lambda_1 i_1}^\dagger \tilde{Q}_{\lambda_2 i_2}^\dagger]_{JM} = \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 | JM \rangle Q_{\lambda_1 \mu_1 i_1}^\dagger Q_{\lambda_2 \mu_2 i_2}^\dagger$$

и т. д. Волновая функция (245) должна быть нормирована. Поэтому одно- и двухфононные амплитуды в разложении (245) удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{JM\nu} | \mathcal{Q}_{JM\nu} \rangle &= \sum_i \left\{ [R_i(J\nu)]^2 + [\tilde{R}_i(J\nu)]^2 - [N_i(J\nu)]^2 - [\tilde{N}_i(J\nu)]^2 \right\} + \\ &+ 2 \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 \\ \lambda_2 i_2}} \left\{ [P_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu)]^2 + [\tilde{P}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu)]^2 + 2[S_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu)]^2 - \right. \\ &\left. - [T_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu)]^2 - [\tilde{T}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu)]^2 - 2[Z_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(J\nu)]^2 \right\} = 1. \quad (246) \end{aligned}$$

Как и ранее, будем считать, что нетильдованное состояние (245) соответствует положительной энергии  $E_{J\nu}$ . Тогда тильда-сопряженное состояние  $|\tilde{\mathcal{Q}}_{JM\nu}\rangle = \tilde{\mathcal{Q}}_{JM\nu}^\dagger |\Psi_0(T)\rangle$  соответствует отрицательной энергии  $-E_{J\nu}$ . Новый тепловой вакуум определим как вакуум относительно операторов уничтожения:

$$\mathcal{Q}_{JM\nu} |\Psi_0(T)\rangle = \tilde{\mathcal{Q}}_{JM\nu} |\Psi_0(T)\rangle = 0. \quad (247)$$

Подчеркнем, что присутствие в (245) операторов уничтожения тепловых фононов свидетельствует о переопределении теплового вакуума при включении связи одно- и двухфононных конфигураций. Напомним, что в стандартном КФМ с учетом фрагментации однофононных состояний волновая функция основного состояния не переопределяется, а остается тождественной фононному вакууму КПСФ. Аналогичное предположение использовалось и в работах [35, 104, 107, 117] при рассмотрении фрагментации тепловых однофононных состояний. Также отметим, что в отличие от [104] волновая функция (245) содержит смешанные компоненты типа  $Q^\dagger \tilde{Q}^\dagger$ . Наличие таких компонент приводит к дополнительным полюсам спектральных плотностей и силовых функций\*.

Получим дополнительные условия на структуру оператора  $\mathcal{Q}_{JM\nu}^\dagger$ , потребовав, чтобы новый вакуум удовлетворял условию (142). Для этого в качестве  $A$ , как и при рассмотрении структуры теплового вакуума ТКПСФ, используем двухквaziчастичные операторы  $[\alpha_{j_1}^\dagger, \alpha_{j_2}^\dagger]_{JM}$ ,  $[\alpha_{j_1}^\dagger, \alpha_{j_2}^\dagger]_{JM}$  и их эрмитово-сопряженные. Выражая двухквaziчастичные операторы через операторы тепловых фононов, легко показать, что ам-

\* В ТКПСФ (см. выражение (210)) аналогами таких смешанных компонент в структуре теплового фона являются двухтепловквaziчастичные состояния вида  $\beta^\dagger \tilde{\beta}^\dagger$ , которые описывают рассеяние термически возбужденных квазичастиц Боголюбова. По аналогии слагаемые вида  $Q^\dagger \tilde{Q}^\dagger$  соответствуют рассеянию термически возбужденных  $q$ -фононов.

плитуды при однофононных слагаемых в (245) должны удовлетворять условию

$$\begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{R} \end{pmatrix}_i (J\nu) = \frac{X_{Ji} e^{-E_{J\nu}/2T} - Y_{Ji}}{X_{Ji} - Y_{Ji} e^{-E_{J\nu}/2T}} \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix}_i (J\nu), \quad (248)$$

где  $E_{J\nu}$  — собственное значение теплового гамильтониана (240), соответствующее волновой функции (245). Таким образом, получен важный результат относительно структуры волновой функции (245): если мы требуем выполнения условия теплового состояния для вакуума операторов  $Q_{JM\nu}$ , то в волновой функции (245) должны присутствовать как прямые однофононные слагаемые, т. е. слагаемые, состоящие из оператора рождения фонона, так и обратные тильда-сопряженные слагаемые, состоящие из оператора уничтожения фонона. В связи с этим логичным является включение в волновую функцию (245) и обратных двухфононных слагаемых.

По аналогии с методом ТКПСФ, чтобы зафиксировать правильную структуру волновой функции (245), определим эффективные амплитуды

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{N} \end{pmatrix}_i (J\nu) &= [X_{J\nu} X_{Ji} - Y_{J\nu} Y_{Ji}]^{-1} \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix}_i (J\nu) = \\ &= [Y_{J\nu} X_{Ji} - X_{J\nu} Y_{Ji}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{R} \end{pmatrix}_i (J\nu), \end{aligned} \quad (249)$$

где  $X_{J\nu}^2 - Y_{J\nu}^2 = 1$  и  $X_{J\nu}/Y_{J\nu} = e^{-E_{J\nu}/2T}$ . С помощью равенства

$$\begin{aligned} [R_i(J\nu)]^2 + [\tilde{R}_i(J\nu)]^2 - [N_i(J\nu)]^2 - [\tilde{N}_i(J\nu)]^2 = \\ = [\mathbb{R}_i(J\nu)]^2 - [\mathbb{N}_i(J\nu)]^2 \end{aligned} \quad (250)$$

условие нормировки (246) записывается через эффективные амплитуды.

Для нахождения собственных состояний теплового гамильтониана (240) и их энергий мы вновь воспользуемся уравнением движения (139) в виде

$$\langle \psi_0(T) | [\delta O, \mathcal{H}, Q_{JM\nu}^\dagger] | \psi_0(T) \rangle = E_{J\nu} \langle \psi_0(T) | [\delta O, Q_{JM\nu}^\dagger] | \psi_0(T) \rangle, \quad (251)$$

где  $|\psi_0(T)\rangle$  — фононный вакуум ТКПСФ, а в качестве  $\delta O$  рассматриваются операторы, входящие в определение правой части (245), т. е.  $\delta O = Q_{JM}, Q_{JM}^\dagger, [Q_{\lambda_1 i_1}, Q_{\lambda_2 i_2}]_{JM}$  и т. д. В результате приходим к системе линейных уравнений относительно одно- и двухфононных амплитуд в разложении (245) [123]. Размерность полученной системы уравнений можно значительно сократить путем исключения из нее двухфононных амплитуд. После этого, воспользовавшись (249), получим систему линейных однородных уравнений относительно эффективных амплитуд  $\mathbb{R}_i$  и  $\mathbb{N}_i$  [123]:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}^{(1)}(E) & \mathbb{M}^{(2)}(E) \\ \mathbb{M}^{(2)}(-E) & \mathbb{M}^{(1)}(-E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{N} \end{pmatrix} = 0. \quad (252)$$

Выражение для матричных элементов  $\mathbb{M}_{ii'}^{(1,2)}$  следующее:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{ii'}^{(1)}(E) &= \delta_{ii'}(\omega_{Ji} - E) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 \\ \lambda_2 i_2}} \left\{ \left( \frac{\mathbb{U}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{U}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} + \omega_{\lambda_2 i_2} - E} + \frac{\mathbb{V}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{V}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} + \omega_{\lambda_2 i_2} + E} \right) (1 + Y_{\lambda_1 i_1}^2 + Y_{\lambda_2 i_2}^2) + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\mathbb{W}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{W}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} - \omega_{\lambda_2 i_2} - E} + \frac{\mathbb{G}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{G}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} - \omega_{\lambda_2 i_2} + E} \right) (Y_{\lambda_2 i_2}^2 - Y_{\lambda_1 i_1}^2) \right\}, \quad (253) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{ii'}^{(2)}(E) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 \\ \lambda_2 i_2}} \left\{ \left( \frac{\mathbb{U}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{V}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} + \omega_{\lambda_2 i_2} - E} + \frac{\mathbb{V}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{U}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} + \omega_{\lambda_2 i_2} + E} \right) (1 + Y_{\lambda_1 i_1}^2 + Y_{\lambda_2 i_2}^2) + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\mathbb{W}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{G}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} - \omega_{\lambda_2 i_2} - E} + \frac{\mathbb{G}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji) \mathbb{W}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji')}{\omega_{\lambda_1 i_1} - \omega_{\lambda_2 i_2} + E} \right) (Y_{\lambda_2 i_2}^2 - Y_{\lambda_1 i_1}^2) \right\}. \quad (254) \end{aligned}$$

Величины  $\mathbb{U}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji)$ ,  $\mathbb{V}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji)$ ,  $\mathbb{W}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji)$  и  $\mathbb{G}_{\lambda_2 i_2}^{\lambda_1 i_1}(Ji)$  связаны с матричными элементами оператора  $\mathcal{H}_{\text{qph}}$  между одно- и двухфононными состояниями и выражаются через эффективные ТКПСФ-амплитуды (220) и фермионные тепловые числа заполнения [123]. Отметим зависимость матричных элементов  $\mathbb{M}_{ii'}^{(1,2)}$  не только от фермионных, но и от фононных тепловых чисел заполнения. В этом смысле полученные уравнения перекликаются с результатами работы [26], в которой бозонные числа заполнения возникают благодаря специальным свойствам температурных функций Грина.

Условие существования нетривиального решения системы (252) приводит к секулярному уравнению  $\det \|\mathbb{M}\| = 0$  для собственных значений  $E_{J\nu}$  теплового гамильтониана (240). Решая для каждого положительного собственного значения  $E_{J\nu}$  систему (252), находим ненормированные эффективные амплитуды  $\mathbb{R}_i(J\nu)$  и  $\mathbb{N}_i(J\nu)$ . Нормировка осуществляется при условиях (246), (250). Тем самым мы полностью определяем структуру оператора  $\mathcal{Q}_{JM\nu}^\dagger$ . Структура оператора  $\tilde{\mathcal{Q}}_{JM\nu}^\dagger$ , соответствующего отрицательному собственному значению  $-E_{J\nu}$ , находится с помощью операции тильда-сопряжения, т.е. замены нетильдованных фононов в выражении (245) на тильдованные и наоборот.

После того, как определена структура собственных состояний теплового гамильтониана (240), вычислим приведенные вероятности перехода

для одночастичного мультипольного оператора  $\mathcal{T}_{JM}$ :

$$B_{J\nu}(\mathcal{T}_J) = |\langle \mathcal{Q}_{J\nu} \| \mathcal{T}_J \| \Psi_0(T) \rangle|^2 = X_{J\nu}^2 \left| \sum_i \Gamma_{Ji} [\mathbb{R}_i(J\nu) + \mathbb{N}_i(J\nu)] \right|^2, \quad (255)$$

$$\tilde{B}_{J\nu}(\mathcal{T}_J) = |\langle \tilde{\mathcal{Q}}_{J\nu} \| \mathcal{T}_J \| \Psi_0(T) \rangle|^2 = Y_{J\nu}^2 \left| \sum_i \Gamma_{Ji} [\mathbb{R}_i(J\nu) + \mathbb{N}_i(J\nu)] \right|^2.$$

Полученные в нашей работе [123] выражения для приведенных вероятностей удовлетворяют принципу детального баланса (134). Таким образом, потребовав для теплового вакуума выполнения условия теплового состояния на каждом этапе диагонализации теплового гамильтониана, нам удалось построить термодинамически последовательный способ описания фрагментации однофононных состояний в нагретых ядрах. В работах [104, 117] условие теплового состояния выполнялось лишь в приближении ТКБКШ, но уже на уровне ТКПСФ принцип детального баланса нарушался, так как силовая функция не имела слагаемых, описывающих  $\downarrow$ -переходы. В дальнейших работах [35, 107] более последовательное построение теплового вакуума и тепловых фононов обеспечило выполнение принципа детального баланса в ТКПСФ. Однако с учетом взаимодействия одно- и двухфононных конфигураций в качестве теплового вакуума был использован вакуум ТКПСФ, в результате чего принцип детального баланса выполнялся лишь в среднем, т.е. после усреднения силовой функции по некоторому энергетическому интервалу.

Итак, на примере квазичастично-фононной модели ядра мы показали, что термодинамически последовательное рассмотрение связи одно- и двухфононных конфигураций в нагретом ядре требует согласованного переопределения теплового вакуума. Согласно полученным уравнениям, матричные элементы взаимодействия фононов нагретого ядра зависят как от квазичастичных (фермионных), так и от фононных (бозонных) тепловых чисел заполнения. Представленную здесь процедуру легко обобщить на случай спин-изоспиновых возбуждений нагретого ядра (магнитных дипольных, гамов-теллеровских и т.п.), что актуально с точки зрения астрофизических приложений.

## 10. ЗАРЯДОВО-ОБМЕННЫЕ ФОНОНЫ В НАГРЕТЫХ ЯДРАХ

Применим метод ТКПСФ к нахождению собственных состояний зарядово-обменной части теплового гамильтониана. Для этого приближенно диагонализуем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{BCS}} + \mathcal{H}_{\text{ch.ex}} \quad (256)$$

в терминах фононных операторов. Для холодных ядер зарядово-обменные фононы рассматривались в работах [97, 128–130]. В приближении независимых тепловых квазичастиц зарядово-обменные моды теплового

гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}$  (191) описываются как протон-нейтронные пары тепловых квазичастиц. Взаимодействие между элементарными модами возбуждения возникает благодаря зарядово-обменной части теплового гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{ch.ex}}$  (163). Мультипольные  $\mathcal{M}_{JM}^{(k)\dagger}$  и спин-мультипольные  $\mathcal{S}_{LJM}^{(k)\dagger}$  операторы (157), входящие в определение остаточного взаимодействия  $H_{\text{ch.ex}}$  и записанные в терминах тепловых квазичастиц, имеют такой же вид, как и оператор одночастичных переходов (193)\*.

Совершим линейное преобразование от операторов рождения и уничтожения протон-нейтронных двухтепложвазичастичных состояний к операторам рождения и уничтожения зарядово-обменных тепловых фононов:

$$\begin{aligned} \Omega_{JM_i}^\dagger = \sum_{j_p j_n} \left( \binom{J_i}{j_p j_n} [\beta_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM} + \tilde{\psi}_{j_p j_n}^{J_i} [\tilde{\beta}_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM} + i\eta_{j_p j_n}^{J_i} [\beta_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM} + \right. \\ \left. i\tilde{\eta}_{j_p j_n}^{J_i} [\tilde{\beta}_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM} - \varphi_{j_p j_n}^{J_i} [\beta_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger - \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{J_i} [\tilde{\beta}_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger + \right. \\ \left. + i\xi_{j_p j_n}^{J_i} [\beta_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger + i\tilde{\xi}_{j_p j_n}^{J_i} [\tilde{\beta}_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (257)$$

Как и в случае зарядово-нейтральных фононов, операторы  $\tilde{\Omega}_{JM_i}^\dagger$ ,  $\Omega_{JM_i}$  и  $\tilde{\Omega}_{JM_i}$  получаются из (257) путем применения операции эрмитово- и тильда-сопряжения. Мультипольная и спин-мультипольная с  $L = J$  компоненты остаточного взаимодействия  $\mathcal{H}_{\text{ch.ex}}$  генерируют зарядово-обменные фононы нормальной четности ( $\pi = (-1)^J$ ), а спин-мультипольное взаимодействие с  $L = J \pm 1$  генерирует фононы аномальной четности ( $\pi = (-1)^{J+1}$ ).

Потребовав выполнения бозонных правил коммутации для тепловых зарядово-обменных фононов и полагая справедливым квазибозонное приближение для операторов рождения и уничтожения протон-нейтронных пар тепловых квазичастиц, получаем соотношения ортонормировки для фононных амплитуд  $\psi$ ,  $\varphi$  и т. д., входящих в определение теплового фонона (см. уравнения (336)–(339) в прил. В). С помощью этих соотношений нетрудно показать, что преобразования, обратные к (257), имеют вид

$$\begin{aligned} [\beta_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM} = \\ = \sum_i \left( \psi_{j_p j_n}^{J_i} \Omega_{JM_i}^\dagger + \varphi_{j_p j_n}^{J_i} \Omega_{JM_i} + \tilde{\psi}_{j_p j_n}^{J_i} \tilde{\Omega}_{JM_i}^\dagger + \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{J_i} \tilde{\Omega}_{JM_i} \right), \end{aligned} \quad (258)$$

$$[\tilde{\beta}_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM} = [\beta_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM}^\sim, \quad (259)$$

\* Чтобы из (193) получить выражения для  $\mathcal{M}_{JM}^{(k)\dagger}$  и  $\mathcal{S}_{LJM}^{(k)\dagger}$ , достаточно произвести замены  $j_{1,2} \rightarrow j_{p,n}$  и  $t_{j_1 j_2}^{(J)} \rightarrow f_{j_p j_n}^{(J;k)}$ ,  $f_{j_p j_n}^{(LJ;k)}$ .

$$[\beta_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{JM} = -i \sum_i \left( \eta_{j_p j_n}^{Ji} \Omega_{JM i}^\dagger + \xi_{j_p j_n}^{Ji} \Omega_{JM i} + \tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\Omega}_{JM i}^\dagger + \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\Omega}_{JM i} \right), \quad (260)$$

$$[\tilde{\beta}_{j_p}^\dagger \beta_{j_n}^\dagger]_{JM} = -[\beta_{j_p}^\dagger \tilde{\beta}_{j_n}^\dagger]_{J-M}. \quad (261)$$

Потребуем далее, чтобы тепловой гамильтониан (256) был диагонален в терминах фононных операторов

$$\mathcal{H} \approx \sum_{JM i} \omega_{Ji} (\Omega_{JM i}^\dagger \Omega_{JM i} - \tilde{\Omega}_{JM i}^\dagger \tilde{\Omega}_{JM i}), \quad (262)$$

а фононный вакуум являлся тепловым вакуумом в ТКПСФ. Для этого операторы фононов должны удовлетворять уравнению движения (143), а фононный вакуум удовлетворять условию теплового состояния (142). В качестве оператора  $A$  в условии (142) рассмотрим протон-нейтронные двухквaziчастичные операторы

$$[\alpha_{j_p}^\dagger \alpha_{j_n}^\dagger]_{JM}, [\alpha_{\bar{j}_p}^\dagger \alpha_{\bar{j}_n}^\dagger]_{JM}, [\alpha_{j_p}^\dagger \alpha_{\bar{j}_n}^\dagger]_{JM}, [\alpha_{\bar{j}_p}^\dagger \alpha_{j_n}^\dagger]_{JM}. \quad (263)$$

Выразив эти операторы сначала через операторы рождения и уничтожения тепловых квазичастиц, а затем через зарядово-обменные тепловые фононы, приходим к соотношениям между нетильдованными и тильдованными амплитудами, аналогичным рассмотренным в зарядово-нейтральном случае (218), (219). Введем эффективные амплитуды:

$$\begin{aligned} \Psi_{j_p j_n}^{Ji} &= \frac{\psi_{j_p j_n}^{Ji}}{X_{Ji} x_{j_p} x_{j_n} - Y_{Ji} y_{j_p} y_{j_n}} = \frac{\tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji}}{Y_{Ji} x_{j_p} x_{j_n} - X_{Ji} y_{j_p} y_{j_n}}, \\ \Phi_{j_p j_n}^{Ji} &= \frac{\varphi_{j_p j_n}^{Ji}}{X_{Ji} x_{j_p} x_{j_n} - Y_{Ji} y_{j_p} y_{j_n}} = \frac{\tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji}}{Y_{Ji} x_{j_p} x_{j_n} - X_{Ji} y_{j_p} y_{j_n}}, \\ \mathbf{H}_{j_p j_n}^{Ji} &= \frac{\eta_{j_p j_n}^{Ji}}{X_{Ji} x_{j_p} y_{j_n} - Y_{Ji} y_{j_p} x_{j_n}} = \frac{\tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji}}{Y_{Ji} x_{j_p} y_{j_n} - X_{Ji} y_{j_p} x_{j_n}}, \\ \Xi_{j_p j_n}^{Ji} &= \frac{\xi_{j_p j_n}^{Ji}}{X_{Ji} x_{j_p} y_{j_n} - Y_{Ji} y_{j_p} x_{j_n}} = \frac{\tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji}}{Y_{Ji} x_{j_p} y_{j_n} - X_{Ji} y_{j_p} x_{j_n}}. \end{aligned} \quad (264)$$

Для них условие ортонормировки принимает вид

$$\sum_{j_p j_n} \left\{ (\Psi_{j_p j_n}^{Ji} \Psi_{j_p j_n}^{Ji'} - \Phi_{j_p j_n}^{Ji} \Phi_{j_p j_n}^{Ji'}) (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) + (H_{j_p j_n}^{Ji} H_{j_p j_n}^{Ji'} - \Xi_{j_p j_n}^{Ji} \Xi_{j_p j_n}^{Ji'}) (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) \right\} = \delta_{ii'}. \quad (265)$$

Как и в случае зарядово-нейтральных фононов, требование соблюдения условия теплового состояния для вакуума зарядово-обменных фононов

приводит к тому, что фононные амплитуды зависят как от фермионных, так и от бозонных тепловых чисел.

Уравнение движения (143) приводит к следующей системе однородных линейных уравнений для эффективных амплитуд [131]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{j_p j_n}^{(+)} G_{j_p j_n}^{Ji} - 2\widehat{J}^{-2} u_{j_p j_n}^{(+)} \sum_{k=1}^{2N} d_{j_p j_n}^{(J;k)} \chi_1^{(k)} \mathcal{D}_{Ji}^{(+;k)} &= \omega_{Ji} W_{j_p j_n}^{Ji}, \\
 \varepsilon_{j_p j_n}^{(+)} W_{j_p j_n}^{Ji} - 2\widehat{J}^{-2} u_{j_p j_n}^{(-)} \sum_{k=1}^{2N} d_{j_p j_n}^{(J;k)} \chi_1^{(k)} \mathcal{D}_{Ji}^{(-;k)} &= \omega_{Ji} G_{j_p j_n}^{Ji}, \\
 \varepsilon_{j_p j_n}^{(-)} T_{j_p j_n}^{Ji} - 2\widehat{J}^{-2} v_{j_p j_n}^{(-)} \sum_{k=1}^{2N} d_{j_p j_n}^{(J;k)} \chi_1^{(k)} \mathcal{D}_{Ji}^{(+;k)} &= \omega_{Ji} S_{j_p j_n}^{Ji}, \\
 \varepsilon_{j_p j_n}^{(-)} S_{j_p j_n}^{Ji} - 2\widehat{J}^{-2} v_{j_p j_n}^{(+)} \sum_{k=1}^{2N} d_{j_p j_n}^{(J;k)} \chi_1^{(k)} \mathcal{D}_{Ji}^{(-;k)} &= \omega_{Ji} T_{j_p j_n}^{Ji}.
 \end{aligned} \tag{266}$$

Полученная система уравнений ТКПСФ относится к обоим типам четности (нормальной и аномальной) зарядово-обменных фононов. В целях сокращения записи в ней использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{(k)} &= \chi_1^{(m;k)}, \quad d_{j_p j_n}^{(J;k)} = f_{j_p j_n}^{(J;k)}, \quad \mathcal{D}_{Ji}^{(\pm;k)} = D_{Ji}^{(\pm;k)}, \quad 1 \leq k \leq N, \\
 \chi_1^{(k)} &= \chi_1^{(s;k-N)}, \quad d_{j_p j_n}^{(J;k)} = f_{j_p j_n}^{(JJ;k-N)}, \quad \mathcal{D}_{Ji}^{(\pm;k)} = D_{JJi}^{(\pm;k-N)}, \\
 & \hspace{15em} N+1 \leq k \leq 2N,
 \end{aligned}$$

для фононов нормальной четности и

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{(k)} &= \chi_1^{(s;k)}, \quad d_{j_p j_n}^{(J;k)} = f_{j_p j_n}^{(J-1J;k)}, \quad \mathcal{D}_{Ji}^{(\pm;k)} = D_{J-1Ji}^{(\pm;k)}, \quad 1 \leq k \leq N, \\
 \chi_1^{(n)} &= \chi_1^{(s;k-N)}, \quad d_{j_p j_n}^{(J;k)} = f_{j_p j_n}^{(J+1J;k-N)}, \quad \mathcal{D}_{Ji}^{(\pm;k)} = D_{J+1Ji}^{(\pm;k-N)}, \\
 & \hspace{15em} N+1 \leq k \leq 2N,
 \end{aligned}$$

для фононов аномальной четности. Кроме того, определены следующие линейные комбинации эффективных амплитуд:

$$D_{Ji}^{(+;k)} = \sum_{j_p j_n} f_{j_p j_n}^{(J;k)} \left\{ u_{j_p j_n}^{(+)} (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) G_{j_p j_n}^{Ji} + v_{j_p j_n}^{(-)} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) T_{j_p j_n}^{Ji} \right\}, \tag{267}$$

$$D_{Ji}^{(-;k)} = \sum_{j_p j_n} f_{j_p j_n}^{(J;k)} \left\{ u_{j_p j_n}^{(-)} (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) W_{j_1 j_2}^{Ji} + v_{j_p j_n}^{(+)} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) S_{j_p j_n}^{Ji} \right\},$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{j_p j_n}^{Ji} &= \Psi_{j_p j_n}^{Ji} + \Phi_{j_p j_n}^{Ji}, & W_{j_p j_n}^{Ji} &= \Psi_{j_p j_n}^{Ji} - \Phi_{j_p j_n}^{Ji}, \\
 T_{j_p j_n}^{Ji} &= H_{j_p j_n}^{Ji} + \Xi_{j_p j_n}^{Ji}, & S_{j_p j_n}^{Ji} &= H_{j_p j_n}^{Ji} - \Xi_{j_p j_n}^{Ji}.
 \end{aligned} \tag{268}$$

Выражения для  $D_{LJi}^{(\pm;k)}$  имеют точно такой же вид с точностью до замены  $f_{j_p j_n}^{(J;k)}$  на  $f_{j_p j_n}^{(LJ;k)}$ .

Размерность системы уравнений ТКПСФ (266) для зарядово-обменных тепловых фононов в 2 раза превышает число базисных протон-нейтронных двухтепловквaziчастичных состояний. Сепарабельный вид остаточного взаимодействия позволяет редуцировать эту систему к системе  $4N$ -линейных однородных уравнений для функций  $D_{Ji}^{(\pm;k)}$ ,  $D_{LJi}^{(\pm;k)}$  (см. уравнения (342) в прил. В). Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к секулярному уравнению для энергии тепловых фононов  $\omega_{Ji}$  (345). Находя для каждого  $\omega_{Ji}$  функции  $D_{Ji}^{(\pm;k)}$ ,  $D_{LJi}^{(\pm;k)}$  (с произвольной нормировкой) и подставляя их в (266), определим ненормированные суммы  $G_{j_p j_n}^{Ji}$ ,  $T_{j_p j_n}^{Ji}$  и разности  $W_{j_p j_n}^{Ji}$ ,  $S_{j_p j_n}^{Ji}$  эффективных амплитуд. Нормировка эффективных амплитуд осуществляется при условии (265).

Получим выражения для амплитуд и вероятностей зарядово-обменных переходов с теплового вакуума на однофононное состояние. Чтобы выразить мультипольный оператор  $\mathcal{T}_{JM}^{(-)}$  перехода  $n \rightarrow p$  через тепловые фононы, в выражении (228) достаточно заменить операторы зарядово-нейтральных фононов на операторы зарядово-обменных фононов, а суммирование проводить по протон-нейтронным состояниям. В результате амплитуды переходов  $n \rightarrow p$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \langle \Omega_{Ji} \| \mathcal{T}_J^{(-)} \| 0(T) \rangle &= X_{Ji} [\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(-)}) + \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(-})], \\ \langle \tilde{\Omega}_{Ji} \| \mathcal{T}_J^{(-)} \| 0(T) \rangle &= Y_{Ji} [\Gamma_{Ji}^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(-)}) - \Gamma_{Ji}^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(-})], \end{aligned} \quad (269)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(-)}) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_p j_n} t_{j_p j_n}^{(J)} \left\{ (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) u_{j_p j_n}^{(+)} G_{j_p j_n}^{Ji} + (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) v_{j_p j_n}^{(-)} T_{j_p j_n}^{Ji} \right\}, \end{aligned} \quad (270)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(-)}) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_p j_n} t_{j_p j_n}^{(J)} \left\{ (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) u_{j_p j_n}^{(-)} W_{j_p j_n}^{Ji} + (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) v_{j_p j_n}^{(+)} S_{j_p j_n}^{Ji} \right\}. \end{aligned}$$

Для оператора  $\mathcal{T}_{JM}^{(+)}$  перехода  $p \rightarrow n$  учтем, что

$$\mathcal{T}_{JM}^{(+)} = -\hat{J}^{-1} \sum_{j_p j_n} t_{j_n j_p}^{(J)} [a_{j_n}^\dagger a_{j_p}]_{JM} = -\hat{J}^{-1} \sum_{j_p j_n} \bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} [a_{j_p}^\dagger a_{j_n}^\dagger]_{JM}^\dagger, \quad (271)$$

где  $\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)} = (-1)^{j_n - j_p + J} t_{j_n j_p}^{(J)}$ . Поэтому амплитуды переходов  $p \rightarrow n$  равны

$$\begin{aligned} \langle \Omega_{Ji} \| \mathcal{T}_J^{(+)} \| 0(T) \rangle &= X_{Ji} [\bar{\Gamma}_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(+)}) - \bar{\Gamma}_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(+)})], \\ \langle \tilde{\Omega}_{Ji} \| \mathcal{T}_J^{(+)} \| 0(T) \rangle &= Y_{Ji} [\bar{\Gamma}_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(+)}) + \bar{\Gamma}_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(+)})]. \end{aligned} \quad (272)$$

Функции  $\bar{\Gamma}_i^{(\pm)}(\mathcal{T}_J^{(+)})$  получаются из (270) путем замены приведенного матричного элемента  $t_{j_p j_n}^{(J)}$  на  $\bar{t}_{j_n j_p}^{(J)}$ . Квадраты модуля правой части (269) и (272) равны приведенной вероятности (силе) зарядово-обменных переходов

$$\begin{aligned} B_{Ji}(\mathcal{T}_J^{(-)}) &= X_{Ji}^2 |\Gamma_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(-)}) + \Gamma_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(-)})|^2, \\ \tilde{B}_{Ji}(\mathcal{T}_J^{(-)}) &= Y_{Ji}^2 |\Gamma_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(-)}) - \Gamma_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(-)})|^2 \end{aligned} \quad (273)$$

и

$$\begin{aligned} B_{Ji}(\mathcal{T}_J^{(+)}) &= X_{Ji}^2 |\bar{\Gamma}_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(+)}) - \bar{\Gamma}_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(+)})|^2, \\ \tilde{B}_{Ji}(\mathcal{T}_J^{(+)}) &= Y_{Ji}^2 |\bar{\Gamma}_i^{(+)}(\mathcal{T}_J^{(+)}) + \bar{\Gamma}_i^{(-)}(\mathcal{T}_J^{(+)})|^2. \end{aligned} \quad (274)$$

Если мультипольные зарядово-обменные операторы  $\mathcal{T}_{JM}^{(\pm)}$  таковы, что  $(\mathcal{T}_{JM}^{(+)})^\dagger = \pm \mathcal{T}_{JM}^{(-)}$ , то приведенные вероятности переходов  $n \rightarrow p$  и  $p \rightarrow n$  на тильда-сопряженные состояния связаны принципом детального баланса

$$\tilde{B}_{Ji}(\mathcal{T}_J^{(\pm)}) = e^{-\omega_{Ji}/T} B_{Ji}(\mathcal{T}_J^{(\mp)}). \quad (275)$$

Данное соотношение, в частности, справедливо для фермиевских и гамов-теллеровских переходов.

Приведенные выше выражения для амплитуды и силы переходов на однофононные состояния вместе с энергией перехода определяют зарядово-обменные спектральные плотности (128) и силовые функции (131) в ТКПСФ. Еще раз отметим, что энергия зарядово-обменного перехода не равна энергии фонона, а связана с ним соотношением

$$E_{Ji}^{(\pm)} = \omega_{Ji} \pm \Delta_{np}, \quad \tilde{E}_{Ji}^{(\pm)} = -E_{Ji}^{(\mp)}. \quad (276)$$

Здесь  $E_{Ji}^{(\pm)}$  ( $\tilde{E}_{Ji}^{(\pm)}$ ) — энергия перехода на нетильдованное (тильдованное) однофононное состояние. Благодаря тому, что вакуум зарядово-обменных фононов удовлетворяет условию теплового состояния (142), для спектральных плотностей и силовых функций справедлив принцип детального баланса (120).

Покажем, что полная сила фермиевских и гамов-теллеровских переходов, рассчитанная в ТКПСФ, удовлетворяет правилу сумм Икеды (203). В случае гамов-теллеровских ( $J^\pi = 1^+$ ) переходов имеем

$$\begin{aligned} S_- - S_+ &= \sum_i [B_i(\text{GT}_-) + \tilde{B}_i(\text{GT}_-)] - \sum_i [B_i(\text{GT}_+) + \tilde{B}_i(\text{GT}_+)] = \\ &= \sum_i [B_i(\text{GT}_-) - B_i(\text{GT}_+)] (1 - e^{-\omega_i/T}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \left[ |\Gamma_i^{(+)}(GT_-) + \Gamma_i^{(-)}(GT_-)|^2 - |\Gamma_i^{(+)}(GT_+) + \Gamma_i^{(-)}(GT_+)|^2 \right] = \\
 &= \sum_i \sum_{j_p j_n} t_{j_p j_n} \left[ (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) u_{j_p j_n}^{(-)} W_{j_p j_n}^i - (y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) v_{j_p j_n}^{(+)} S_{j_p j_n}^i \right] \times \\
 &\times \sum_{j_{p'} j_{n'}} t_{j_{p'} j_{n'}} \left[ (1 - y_{j_{p'}}^2 - y_{j_{n'}}^2) u_{j_{p'} j_{n'}}^{(+)} G_{j_{p'} j_{n'}}^i - (y_{j_{p'}}^2 - y_{j_{n'}}^2) v_{j_{p'} j_{n'}}^{(-)} T_{j_{p'} j_{n'}}^i \right] = \\
 &= \sum_{j_p j_n} |t_{j_p j_n}|^2 \left[ (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) u_{j_p j_n}^{(+)} u_{j_p j_n}^{(-)} + (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) v_{j_p j_n}^{(+)} v_{j_p j_n}^{(-)} \right]. \quad (277)
 \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что эффективные амплитуды удовлетворяют условию полноты (341). Так как последняя строка есть не что иное, как выражение для  $S_- - S_+$  в приближении независимых тепловых квазичастиц (204), то тем самым мы доказали выполнение правила сумм Икеды в ТКПСФ. Аналогично доказывается выполнение правила сумм для оператора Ферми.

В заключение этого раздела отметим, что в наших работах [132–134] уравнения ТКПСФ для зарядово-обменных однофононных возбуждений были получены для гамильтониана КФМ. Формально схожие уравнения для сепарабельных остаточных сил были получены в работах [135–137] в рамках теплового ПСФ. Но в этих работах не учитывались процессы девозбуждения нагретого ядра и, как следствие, нарушался принцип детально баланса.

## 11. СЕЧЕНИЯ СЛАБЫХ РЕАКЦИЙ С НАГРЕТЫМИ ЯДРАМИ

В дальнейшем применим развитый статистический подход к расчету спектральных плотностей и силовых функций для описания слабых реакций лептонов с нагретыми ядрами в астрофизических условиях. Стандартным способом описания полулептонных ядерных процессов является метод Доннелли–Валечки [138, 139], который основан на аналогии с рассеянием электронов на ядрах. Использование ток-токовой формы гамильтониана слабого взаимодействия  $H_W$  делает возможным получение общего выражения для матричных элементов  $\langle f | H_W | i \rangle$  между начальным и конечным состояниями для всех полулептонных процессов, а мультипольное разложение нуклонного тока позволяет сформулировать правила отбора по четности и полному моменту ядра. Метод Доннелли–Валечки широко используется при расчете сечений нейтрино-ядерных процессов (см., например, [140–145]), а также при изучении скоростей мюонного захвата [146].

Приведем основные сведения о расчете сечений полулептонных процессов с участием атомных ядер в рамках метода Доннелли–Валечки. Более подробное изложение и детали вывода сечения приведены

в книгах [139, 147] и статьях [138, 148]. В общем будем рассматривать следующую реакцию:



где  $l$  — лептон, налетающий на родительское ядро  ${}^Z_N A$ ;  $l'$  — рассеянный лептон;  ${}^Z_{N'} A$  — дочернее ядро. В зарядово-нейтральных реакциях неупругого рассеяния нейтрино ( $l = l' = \nu$ ) и антинейтрино ( $l = l' = \bar{\nu}$ ) число нуклонов каждого сорта в ядре не меняется, т. е.  $Z' = Z$  и  $N' = N$ . Изменение числа нуклонов в ядре происходит в зарядово-обменных реакциях:  $Z' = Z - 1$  и  $N' = N + 1$  при захвате электрона ( $l = e^-, l' = \nu_e$ ) и антинейтрино ( $l = \bar{\nu}_e, l' = e^+$ );  $Z' = Z + 1$  и  $N' = N - 1$  при захвате нейтрино ( $l = \nu_e, l' = e^-$ ) или позитрона ( $l = e^+, l' = \bar{\nu}_e$ ). Будем считать, что состояния падающего и рассеянного лептонов описываются плоской волной\*. Обозначим энергию и импульс падающего (рассеянного) лептона как  $\varepsilon_l, \mathbf{p}_l$  ( $\varepsilon_{l'}, \mathbf{p}_{l'}$ ). Тогда  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_{l'} - \mathbf{p}_l$  — 3-импульс, переданный лептону при рассеянии на угол  $\theta$ , а  $\omega = \varepsilon_l - \varepsilon_{l'}$  — переданная ядру энергия.

В методе Доннелли–Валечки предполагается, что состояния родительского  $|J_i \pi_i\rangle$  и дочернего  $|J_f \pi_f\rangle$  ядер характеризуются определенными значениями полного момента и четности. Используя мультипольное разложение матричных элементов лептонного слабого тока, дифференциальное сечение реакции (278) можно представить в следующем виде\*\*:

$$\frac{d\sigma_{if}(\varepsilon_l)}{d \cos \theta} = \frac{2(G'_F)^2}{\hbar^4 c^4} S_l \left( \frac{\varepsilon_l}{p_l} \right) p_{l'} \varepsilon_{l'} \left\{ \sum_{J \geq 0} \eta_J^{CL}(if) + \sum_{J \geq 1} \eta_J^T(if) \right\}, \quad (280)$$

где суммирование по  $J$  ограничивается правилами отбора по моменту  $|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f$ . Для удобства введено общее обозначение для константы слабого взаимодействия

$$G'_F = \begin{cases} G_F V_{ud} & (\text{для заряженных токов}), \\ G_F & (\text{для нейтральных токов}), \end{cases} \quad (281)$$

где  $G_F/(\hbar c)^3 \approx 1,166 \cdot 10^{-5}$  ГэВ<sup>-2</sup> [150] — константа Ферми слабого взаимодействия, а  $V_{ud} = 0,9740$  [150] — элемент матрицы Кабиббо–Кабаши–Маскавы, который связан со смешиванием двух компонент заря-

\* Об учете искажения волновой функции заряженного лептона в кулоновском поле ядра см. ниже.

\*\* Как показано в [149], отдачей ядра можно пренебречь при условии, что энергия налетающего лептона и энергия возбуждения ядра намного меньше, чем масса ядра  $M_A$ . Если это условие опустить, то наибольшей поправкой будет коэффициент для плотности конечных состояний (фактор отдачи)

$$f_R = \left[ 1 + \frac{\varepsilon_l p_{l'} - \varepsilon_{l'} p_l \cos \theta}{p_{l'} M_A c^2} \right]^{-1} \approx \left[ 1 + \frac{2\varepsilon_l \sin^2(\theta/2)}{M_A c^2} \right]^{-1}, \quad (279)$$

на который умножается правая часть выражения (280).

женного нуклонного тока — сохраняющей и не сохраняющей странность. Множитель  $S_l = (1/2)$  ( $S_l = 1$ ) для  $l = e^\pm$  ( $l = \nu, \bar{\nu}$ ) в (280) учитывает необходимость усреднения по начальным состояниям спина электрона или позитрона.

Функции  $\eta_J^{CL,T}$  выражаются через приведенные матричные элементы мультипольных операторов нуклонного тока:

$$\eta_J^{CL}(if) = \frac{1}{2J_i + 1} \left\{ v_{LL} |\langle J_f \| \widehat{\mathcal{L}}_J \| J_i \rangle|^2 + v_{CC} |\langle J_f \| \widehat{\mathcal{M}}_J \| J_i \rangle|^2 + v_{CL} 2\text{Re}(\langle J_f \| \widehat{\mathcal{L}}_J \| J_i \rangle \langle J_f \| \widehat{\mathcal{M}}_J \| J_i \rangle^*) \right\}, \quad (282a)$$

$$\eta_J^T(if) = \frac{1}{2J_i + 1} \left\{ v_{TT} (|\langle J_f \| \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{mag}} \| J_i \rangle|^2 + |\langle J_f \| \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{el}} \| J_i \rangle|^2) + v_{TT'} 2\text{Re}(\langle J_f \| \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{mag}} \| J_i \rangle \langle J_f \| \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{el}} \| J_i \rangle^*) \right\}. \quad (282b)$$

Зарядовый мультипольный оператор  $\widehat{\mathcal{M}}_{JM}$  связан с распределением нулевой компоненты слабого нуклонного тока в ядре, в то время как продольный ( $\widehat{\mathcal{L}}_{JM}$ ), поперечный электрический ( $\widehat{\mathcal{T}}_{JM}^{\text{el}}$ ) и поперечный магнитный ( $\widehat{\mathcal{T}}_{JM}^{\text{mag}}$ ) мультипольные операторы связаны с распределением его пространственной компоненты (см. формулы (45.13) в [147]). Кинематические факторы  $v_{LL}$ ,  $v_{CC}$  и т. д. есть результат усреднения по лептонным поляризациям различных комбинаций матричных элементов лептонного тока. Их значения приведены в таблице в удобном для численных расчетов виде. С этой целью для зарядово-обменных реакций использованы обозначения

$$a \equiv \frac{p_e c}{\varepsilon_e} = \sqrt{1 - \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon_e} \right)^2}, \quad b \equiv \frac{\varepsilon_e \varepsilon_\nu a^2}{(q \hbar c)^2}, \quad c \equiv \frac{(m_e c^2)^2}{\varepsilon_e (q \hbar c)}, \quad (283)$$

где  $q$  — величина переданного 3-импульса

$$q \hbar c = \sqrt{E_{if}^2 + 2\varepsilon_e \varepsilon_\nu (1 - a \cos \theta) - (m_e c^2)^2} = \sqrt{(\varepsilon_\nu - p_e c)^2 + 4\varepsilon_\nu p_e c \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (284)$$

а  $E_{if} = \omega$  соответствует энергии перехода ядра из начального ( $i$ ) в конечное ( $f$ ) состояние. Если пренебречь массой электрона ( $\varepsilon_e \gg m_e c^2$ ), то  $a = 1$ ,  $c = 0$ , а зарядово-обменные кинематические факторы совпадают с зарядово-нейтральными. В этом случае

$$q \hbar c = \sqrt{E_{if}^2 + 4\varepsilon_\nu \varepsilon_\nu' \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (285)$$

**Выражения для кинематических факторов, входящих в определение функций  $\eta_J^{CL,T}$ . Во втором столбце с использованием обозначений из работы [139, табл. 2] (см. также [147, табл. 46.2]) указаны соответствующие комбинации матричных элементов лептонного тока. Расшифровка обозначений  $a, b, c$  дана в тексте (см. выражения (283)).  $S = -1(+1)$ , если в реакции участвует нейтрино (антинейтрино),  $q_\mu^2 = q^2 - \omega^2$  — квадрат переданного 4-импульса**

Кинематический фактор	Комбинации матричных элементов	Зарядово-обменные реакции	Зарядово-нейтральные реакции
$v_{TT}$	$\frac{1}{2}(1 \cdot \mathbf{1}^* - l_3 l_3^*)$	$1 - a \cos \theta + b \sin^2 \theta$	$\frac{q_\mu^2}{q^2} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$
$v_{TT'}$	$-\frac{i}{2}(1 \times \mathbf{1}^*)_3$	$S \left[ \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_{l'}}{q \hbar c} (1 - a \cos \theta) - c \right]$	$2S \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ 1 - \frac{\omega^2}{q^2} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]^{1/2}$
$v_{CC}$	$l_0 l_0^*$	$1 + a \cos \theta$	$2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$
$v_{LL}$	$l_3 l_3^*$	$1 + a \cos \theta - 2b \sin^2 \theta$	$\frac{\omega^2}{q^2} 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$
$v_{CL}$	$-l_3 l_0^*$	$\frac{\omega}{q} (1 + \cos \theta) + c$	$\frac{\omega}{q} 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$

Отметим, что интерференционный член между электрической и магнитной составляющими функции  $\eta_J^T$  имеет разный знак для реакций с участием нейтрино и антинейтрино.

Так как нуклонный слабый ток включает в себя векторную и аксиально-векторную части, то каждый мультипольный оператор в (282) состоит из двух компонент противоположной четности:  $\widehat{M}_{JM} = \widehat{M}_{JM} + \widehat{M}_{JM}^5$ ,  $\widehat{L}_{JM} = \widehat{L}_{JM} + \widehat{L}_{JM}^5$ ,  $\widehat{T}_{JM}^{el} = \widehat{T}_{JM}^{el} + \widehat{T}_{JM}^{el5}$  и  $\widehat{T}_{JM}^{mag} = \widehat{T}_{JM}^{mag} + \widehat{T}_{JM}^{mag5}$ . Операторы  $\widehat{M}_{JM}$ ,  $\widehat{L}_{JM}$ ,  $\widehat{T}_{JM}^{el}$  и  $\widehat{T}_{JM}^{mag5}$  имеют четность  $\pi = (-1)^J$ , а операторы  $\widehat{M}_{JM}^5$ ,  $\widehat{L}_{JM}^5$ ,  $\widehat{T}_{JM}^{el5}$  и  $\widehat{T}_{JM}^{mag}$  имеют четность  $\pi = (-1)^{J+1}$ . Следовательно, для данных значений  $J$  и  $\pi = \pi_i \pi_f$  вклад в матричные элементы (282) дает либо векторная, либо аксиально-векторная компонента мультипольного оператора нуклонного тока. Отметим, что в отличие от электромагнитных процессов (фотовозбуждения, рассеяния электронов) в полулептонных процессах за счет аксиальной компоненты нуклонного тока в ядрах возможны  $0^-$ -переходы.

Чтобы получить явный вид мультипольных операторов  $\widehat{L}_{JM}$ ,  $\widehat{L}_{JM}^5$  и т. д., позволяющий проводить вычисления с нерелятивистскими волновыми функциями, но с учетом релятивистских поправок, в работах [139, 147, 151] использовался метод, основанный на разложении по степеням обратной массы нуклона  $M_N^{-1}$  матричного элемента нуклонного

тока для свободных нуклонов. В таком подходе релятивистская, или малая, компонента волновой функции выражается через нерелятивистскую компоненту, а требуемые выражения для мультипольных операторов с учетом релятивистских поправок получаются удержанием слагаемых нулевого и первого порядков. Приведем окончательные выражения для мультипольных операторов слабого нуклонного тока, полученные таким образом [138, 148, 152]:

$$\widehat{M}_{JM} = F_1 M_{JM}(q\mathbf{x}), \quad (286a)$$

$$\widehat{M}_{JM}^5 = -\frac{iq}{M_N} \left\{ F_A \Omega_{JM}(q\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (F_A^{(T)} - \omega F_P) \Sigma''_{JM}(q\mathbf{x}) \right\}, \quad (286б)$$

$$\widehat{L}_{JM} = -\frac{\omega}{q} \widehat{M}_{JM}(q\mathbf{x}), \quad (286в)$$

$$\widehat{L}_{JM}^5 = i \left\{ F_A - \frac{q^2}{2M_N} F_P \right\} \Sigma''_{JM}(q\mathbf{x}), \quad (286г)$$

$$\widehat{T}_{JM}^{\text{el}} = \frac{q}{M_N} \left\{ F_1 \Delta'_{JM}(q\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (F_1 + 2M_N F_2) \Sigma_{JM}(q\mathbf{x}) \right\}, \quad (286д)$$

$$\widehat{T}_{JM}^{\text{el}5} = i F_A \Sigma'_{JM}(q\mathbf{x}), \quad (286е)$$

$$\widehat{T}_{JM}^{\text{mag}} = -\frac{iq}{M_N} \left\{ F_1 \Delta_{JM}(q\mathbf{x}) - \frac{1}{2} (F_1 + 2M_N F_2) \Sigma'_{JM}(q\mathbf{x}) \right\}, \quad (286ж)$$

$$\widehat{T}_{JM}^{\text{mag}5} = F_A \Sigma_{JM}(q\mathbf{x}). \quad (286з)$$

В свою очередь, семь базисных операторов ( $M$ ,  $\Omega$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta'$ ,  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ ) выражаются через сферические функции Бесселя  $j_L(qx)$ , сферические ( $Y_{lm}(\Omega_x)$ ) и векторные сферические ( $\mathcal{Y}_{Jl}^M(\Omega_x)$ ) гармоники. В работах [153–155] приводятся выражения для одночастичных матричных элементов базисных операторов. Подчеркнем, что не только кинематические факторы (см. таблицу), но и матричные элементы мультипольных операторов нуклонного тока являются функциями переданного 3-импульса  $q$ .

Значения формфакторов  $F_X$  ( $X = 1, 2, A, P$ ), входящих в выражения для мультипольных операторов (286), определяются исходя из гипотез о сохраняющемся векторном токе [156, 157] и частично сохраняющемся аксиальном токе [158, 159]. Сохранение векторного тока приводит к тому, что векторные формфакторы заряженного слабого тока совпадают с формфакторами электромагнитного тока, т. е.  $F_{1,2}(0) = F_{1,2}^V(0)$ , где

$$F_1^V(0) = g_V = 1, \quad (287)$$

$$F_2^V(0) = \frac{\mu_p - \mu_n - 1}{2M_N} \quad (288)$$

( $\mu_p = 2,79$  и  $\mu_n = -1,91$  — магнитные моменты протона и нейтрона в магнетонах Бора) [151, 160]. Для векторных формфакторов нейтральных слабых токов теория электрослабого взаимодействия Глэшоу–Вайнберга–Салама дает значения [160, 161]

$$F_1(0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - 4 \sin^2 \theta_W) & \text{(для протонов),} \\ -\frac{1}{2} & \text{(для нейтронов),} \end{cases} \quad (289)$$

$$F_2(0) = \frac{1}{2M_N} \begin{cases} \frac{1}{2}(\mu_p - 1 - \mu_n - 4 \sin^2 \theta_W(\mu_p - 1)) & \text{(для протонов),} \\ -\frac{1}{2}(\mu_p - 1 - \mu_n - 4 \sin^2 \theta_W \mu_n) & \text{(для нейтронов),} \end{cases} \quad (290)$$

где  $\theta_W$  — угол Вайнберга ( $\sin^2 \theta_W = 0,2325$ ). Гипотеза о частичном сохранении аксиального тока устанавливает зависимость аксиального и псевдоскалярного формфакторов от характеристик пиона и параметров пион-нуклонного взаимодействия. В частности, аксиальный формфактор заряженного тока удовлетворяет соотношению Гольдбергера–Треймана [139, 160]

$$F_A(0) = -\frac{f_\pi g_{\pi N}}{\sqrt{2} M_N}, \quad (291)$$

где  $f_\pi$  — константа, определяемая временем жизни заряженных пионов;  $g_{\pi N}$  — константа пион-нуклонного взаимодействия. Подстановка численных значений для  $f_\pi$  и  $g_{\pi N}$  приводит к значению  $F_A(0)$ , хорошо согласующемуся со значением, полученным путем усреднения результатов многочисленных измерений характеристик  $\beta$ -переходов [162]

$$F_A(0) = g_A = -1,269 \pm 0,003. \quad (292)$$

При использовании соотношения (291) совместно с однополюсным приближением для  $F_P(q_\mu^2)$  получено выражение, связывающее аксиальный и псевдоскалярный формфакторы [139, 160]:

$$F_P(q_\mu^2) = \frac{2M_N F_A(q_\mu^2)}{q_\mu^2 + m_\pi^2}, \quad (293)$$

где  $m_\pi = 139,57$  МэВ — масса пиона. Соответствующие формфакторы нейтральных слабых токов имеют вид [160, 161]

$$F_A(0) = \pm \frac{1}{2} F_A(0), \quad F_P(q_\mu^2) = \pm \frac{1}{2} F_P(q_\mu^2), \quad (294)$$

где верхний знак соответствует протонам, а нижний — нейтронам. Следуя работе [138], для учета зависимости формфакторов от переданного 4-импульса  $q_\mu^2$  статические значения формфакторов  $F_{1,2}(0)$

и  $F_A(0)$  умножаются на однонуклонный формфактор  $f_{SN}(q_\mu^2) = [1 + q_\mu^2/(855 \text{ МэВ})^2]^{-2}$ . Для астрофизических расчетов с хорошей точностью  $f_{SN}(q_\mu^2) = 1$ .

При выводе выражения для сечения реакции (280) предполагалось, что волновая функция лептона соответствует плоской волне. Однако для зарядово-обменных процессов, в начальном или конечном состояниях которых присутствует заряженный лептон, необходимо учесть искажение его волновой функции в кулоновском поле ядра. В зависимости от знака заряда лептона происходит либо увеличение, либо уменьшение значения его волновой функции вблизи ядра. Это приводит к росту (для  $e^-$ ) или подавлению (для  $e^+$ ) сечения реакции. Для учета влияния кулоновского поля ядра сечение (280) умножают на функцию Ферми  $F(\pm Z^*, \varepsilon_e)$ . В зависимости от типа реакции  $Z^*$  совпадает либо с зарядом родительского ядра  $Z$ , либо с зарядом дочернего ядра  $Z'$ , знак «+» («-») соответствует случаю, когда заряженный лептон является электроном (позитроном). Точное значение  $F(Z, \varepsilon_e)$  можно вычислить, решая релятивистское уравнение Дирака с кулоновским потенциалом ядра радиусом  $R$  [163]. Однако при небольшой энергии заряженного лептона ( $p_e R/\hbar \ll 1$ ) в качестве приближенного значения функции Ферми обычно используется выражение [62, 140, 163]

$$F(Z, \varepsilon_e) = 2(1 + s) \left( \frac{2p_e R}{\hbar} \right)^{2(s-1)} \left| \frac{\Gamma(s + i\eta)}{\Gamma(2s + 1)} \right|^2 e^{\pi\eta}, \quad (295)$$

где  $s = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ ,  $\eta = \alpha Z \varepsilon_e / (c p_e)$ ,  $\alpha \equiv e^2 / (\hbar c)$  — постоянная тонкой структуры, а  $\Gamma(z)$  — гамма-функция. При больших значениях  $\varepsilon_e$  эффект кулоновского поля ядра можно учесть путем замены импульса и энергии заряженного лептона на эффективные значения (effective momentum approximation [140, 141, 164])

$$\varepsilon_e^{\text{eff}} = \varepsilon_e - V_C^{\text{eff}}, \quad p_e^{\text{eff}} c = \sqrt{(\varepsilon_e^{\text{eff}})^2 - (m_e c^2)^2}, \quad (296)$$

где  $V_C^{\text{eff}}$  — эффективный кулоновский потенциал. Как показано в работе [165], хорошее согласие с точным решением уравнения Дирака достигается, если в качестве  $V_C^{\text{eff}}$  использовать  $V_C^{\text{eff}} = 4V_C(0)/5$ , где  $V_C(0) = \mp 3Ze^2/(2R)$  — электростатический потенциал в центре ядра.

Выражение (280) соответствует дифференциальному сечению эксклюзивной реакции, в которой ядро из состояния  $i$  переходит в состояние  $f$ . Сечение инклюзивной реакции получается суммированием по всем возможным конечным состояниям  $f$ , таким, что  $E_{if} \leq \varepsilon_l - m_\nu c^2$ , и интегрированием по углу рассеяния. В горячей звездной среде происходит тепловое заселение ядерных возбужденных состояний. Определим зависящее от температуры сечение реакции (278) как

результат усреднения по всем термически возбужденным состояниям ядра:

$$\sigma(\varepsilon_l, T) = \sum_{if} p_i(T) \sigma_{if}(\varepsilon_l) = \frac{2(G'_F)^2}{\hbar^4 c^4} S_l \left( \frac{\varepsilon_l}{p_l} \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\varepsilon_l - m_{l'} c^2} dE \varepsilon_{l'} p_{l'} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left\{ \sum_{J \geq 0} \eta_J^{CL}(E, T) + \sum_{J \geq 1} \eta_J^T(E, T) \right\}, \quad (297)$$

где  $\varepsilon_{l'} = \varepsilon_l - E$ , а вся температурная зависимость содержится в зарядовых продольных и поперечных мультипольных функциях

$$\eta_J^{CL,T}(E, T) = \sum_{if} p_i(T) \eta_J^{CL,T}(if) \delta(E - E_{if}). \quad (298)$$

Используя явный вид функций  $\eta_J^{CL,T}(if)$  (282), выразим  $\eta_J^{CL,T}(E, T)$  через спектральные плотности зарядового ( $\widehat{M}_J$ ), продольного ( $\widehat{L}_J$ ), поперечного электрического ( $\widehat{T}_J^{\text{el}}$ ) и поперечного магнитного ( $\widehat{T}_J^{\text{mag}}$ ) мультипольных операторов нуклонного тока

$$\eta_{CL}^J(E, T) = v_{LL} S_{L_J L_J} + v_{CC} S_{M_J M_J} + v_{LC} 2 \text{Re} \{ S_{M_J L_J} \} \quad (299)$$

и

$$\eta_T^J(E, T) = v_{TT} [S_{T_J^{\text{mag}} T_J^{\text{mag}}} + S_{T_J^{\text{el}} T_J^{\text{el}}}] + v_{TT'} 2 \text{Re} \{ S_{T_J^{\text{mag}} T_J^{\text{el}}} \}. \quad (300)$$

Кинематические факторы  $v_{LL}$ ,  $v_{CC}$  и т. д. от температуры не зависят, а спектральные плотности  $S_{A_J B_J}(E, T)$  мультипольных операторов определены согласно (165). Таким образом, в рамках статистического подхода вычисление сечений слабых реакций с нагретыми ядрами сводится к расчету спектральных плотностей для зависящих от переданного импульса  $q$  мультипольных операторов (286) нуклонного тока. Для учета кулоновских поправок сечение (297) умножается на функцию Ферми (295), а отдача ядра учитывается множителем  $f_R$  (279).

Используя зависимость мультипольных операторов нуклонного тока (286) от переданного импульса  $q$ , можно непосредственно из (297) получить выражение для сечения  $\sigma(\varepsilon_l, T)$  при малых значениях  $\varepsilon_l$ . Действительно, так как максимальное значение переданного импульса в реакции (278) равно  $q_{\text{max}} = (2\varepsilon_l - E_{if})/\hbar c$ , то при небольшой энергии начального лептона ( $\varepsilon_l \lesssim 10$  МэВ) становится справедливым условие длинноволнового приближения  $qR \ll 1$ , где  $R \approx 5$  фм для ядер с  $A = 50-80$ . Используя свойство функции Бесселя

$$j_J(qx) \approx \frac{(qx)^J}{(2J+1)!!} \quad \text{при } qx \ll 1 \quad (301)$$

и считая нуклоны в ядре медленными ( $v_{\text{нукл}}/c \ll 1$ ), можно показать [139, 147], что в пределе  $q \rightarrow 0$  вклад в сечение дают только

разрешенные переходы фермиевского ( $J^\pi = 0^+$ ) и гамов-теллеровского ( $J^\pi = 1^+$ ) типов. Для зарядово-обменных реакций соответствующие мультипольные операторы тока принимают вид

$$\widehat{M}_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} g_V \sum_{j=1}^A t_{\pm}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} F_{\pm}, \quad (302)$$

$$\widehat{L}_{1M}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{T}_{1M}^{\text{el5}} = \frac{i}{\sqrt{12\pi}} g_A \sum_{j=1}^A t_{\pm}^{(j)} \sigma_M^{(j)} = \frac{i}{\sqrt{12\pi}} G T_{\pm}. \quad (303)$$

В зарядово-нейтральном канале оператор  $\widehat{M}_{00}$  дает вклад только в упругое рассеяние (анти)нейтрино. Так как  $F_1(0) \approx 0$  для протонов, то в хорошем приближении можно считать, что

$$\widehat{M}_{00} \approx -\frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \widehat{N}, \quad (304)$$

где  $\widehat{N}$  — оператор числа нейтронов в ядре. Поэтому в неупругое рассеяние (анти)нейтрино в длинноволновом приближении вносят вклад только операторы переходов  $J^\pi = 1^+$ , пропорциональные нулевой компоненте гамов-теллеровского оператора:

$$\widehat{L}_{1M}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{T}_{1M}^{\text{el5}} = \frac{i}{\sqrt{12\pi}} g_A \sum_{j=1}^A t_0^{(j)} \sigma_M^{(j)} = \frac{i}{\sqrt{12\pi}} G T_0, \quad (305)$$

где  $t_0 = \tau_3/2$  — оператор проекции изоспина.

Подстановка приведенных выражений для  $\widehat{M}_{00}$ ,  $\widehat{L}_{1M}^5$  и  $\widehat{T}_{1M}^{\text{el5}}$  в (297) и интегрирование по углу рассеяния приводят к следующим выражениям для сечения полулептонных реакций на нагретых ядрах в длинноволновом приближении:

- захват электрона или позитрона

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_e, T) &= \frac{(G_F V_{\text{ud}})^2}{2\pi(\hbar c)^4} \left( \frac{\varepsilon_e}{p_e c} \right) F(\pm Z, \varepsilon_e) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\varepsilon_e} (\varepsilon_e - E)^2 [S_{F_{\pm}}(E, T) + S_{G T_{\pm}}(E, T)] dE; \end{aligned} \quad (306)$$

- захват электронного (анти)нейтрино

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_\nu, T) &= \frac{(G_F V_{\text{ud}})^2}{\pi(\hbar c)^4} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\varepsilon_\nu - m_e c^2} F(\pm Z \pm 1, \varepsilon_e) (\varepsilon_e p_e c) [S_{F_{\pm}}(E, T) + S_{G T_{\pm}}(E, T)] dE, \end{aligned} \quad (307)$$

где  $\varepsilon_e = \varepsilon_\nu - E$ ,  $p_e c = (\varepsilon_e - m_e c^2)^{1/2}$ ;

- неупругое рассеяние (анти)нейтрино

$$\sigma(\varepsilon_\nu, T) = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} \int_{-\infty}^{\varepsilon_\nu} (\varepsilon_\nu - E)^2 S_{GT_0}(E, T) dE. \quad (308)$$

Таким образом, в длинноволновом приближении сечения слабых реакций на нагретом ядре выражаются через зависящие от температуры силовые функции (115) операторов фермиевских и гамов-теллеровских переходов.

Приведенные выше выражения (297), (306)–(308) для зависящего от температуры сечения  $\sigma(\varepsilon_l, T)$  являются точными в том смысле, что при их выводе из (280) не делалось никаких дополнительных предположений о структуре спектральных плотностей и силовых функций. В ТКПСФ спектральные плотности и силовые функции мультипольных операторов выражаются через приведенные матричные элементы между тепловым вакуумом и тепловыми однофононными состояниями (см. уравнения (230), (269), (272)). Подставляя рассчитанные в ТКПСФ спектральные функции в (297) и интегрируя по переданной энергии  $E$ , получим мультипольное разложение полного сечения  $\sigma(\varepsilon_l, T)$  в виде суммы вкладов от отдельных тепловых однофононных состояний:

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_l, T) &= \sum_{Jk} \sigma_{Jk}(\varepsilon_l, T) \\ &= \frac{2(G'_F)^2}{\hbar^4 c^4} S_l \left( \frac{\varepsilon_l}{pl} \right) \sum_{Jk} \varepsilon_l p_{l'} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left\{ \eta_J^{CL}(k, T) + \eta_J^T(k, T) \right\}, \end{aligned} \quad (309a)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_J^{CL}(k, T) &= v_{LL} |\langle Jk | \widehat{\mathcal{L}}_J \| \psi_0(T) \rangle|^2 + v_{CC} |\langle Jk | \widehat{\mathcal{M}}_J \| \psi_0(T) \rangle|^2 + \\ &+ v_{CL} 2\text{Re}(\langle Jk | \widehat{\mathcal{L}}_J \| \psi_0(T) \rangle \langle J_f | \widehat{\mathcal{M}}_J \| \psi_0(T) \rangle^*) \end{aligned} \quad (309б)$$

и

$$\begin{aligned} \eta_J^T(k, T) &= v_{TT} \left( |\langle Jk | \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{mag}} \| \psi_0(T) \rangle|^2 + |\langle Jk | \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{el}} \| \psi_0(T) \rangle|^2 \right) + \\ &+ v_{T'T'} 2\text{Re}(\langle Jk | \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{mag}} \| \psi_0(T) \rangle \langle Jk | \widehat{\mathcal{T}}_J^{\text{el}} \| \psi_0(T) \rangle^*). \end{aligned} \quad (309в)$$

Здесь суммирование распространяется на все однофононные состояния (нетильдованные и тильдованные) с энергией ниже граничной:  $\varepsilon_l - m_{l'} c^2$ . Появление при  $T \neq 0$  однофононных состояний с отрицательной энергией приводит к тому, что  $\sigma(\varepsilon_l, T)$  отлично от нуля при сколько угодно малой энергии налетающего лептона. Так как при нулевой температуре метод ТКПСФ сводится к квазичастичному приближению случайных фаз, то при  $T = 0$  выражение (309) соответствует сечению полулептонной реакции на основном состоянии ядра.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с использованием формализма супероператоров и метода уравнения движения построен термодинамически последовательный способ расчета спектральных плотностей и силовых функций в нагретых ядрах в рамках большого канонического ансамбля. Для этого введено новое определение правых фермионных супероператоров в пространстве Лиувилля. Как следствие этого определения показано, что условие теплового состояния зависит лишь от того, является ли супероператор фермионоподобным или бозоноподобным. Получены соотношения, связывающие матричные элементы и вакуумные средние от тильда-сопряженных супероператоров.

Для модели ядра с сепарабельным взаимодействием Скирма в канале частица–дырка получены уравнения теплоквазичастичного приближения случайных фаз, описывающие зарядово-нейтральные и зарядово-обменные однофононные состояния в нагретых ядрах. Доказано выполнение модельно-независимого правила сумм Икеды в этом приближении. На примере гамильтониана квазичастично-фононной модели ядра предложен выход за рамки приближения случайных фаз в нагретых ядрах путем учета связи одно- и двухфононных конфигураций. Показано, что принцип детального баланса требует переопределения теплового фононного вакуума при учете фрагментации однофононных состояний в нагретых ядрах.

Предложен статистический подход для расчета сечений и скоростей слабых ядерных реакций с нагретыми ядрами в астрофизических условиях, основанный на комбинации формализма супероператоров и метода Доннелли–Валечки, описывающего полуплеутонные ядерные процессы.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ № 075-10-2020-117.

## Приложение А

### НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИЙ $\alpha(m, n)$ И $\beta(m, n)$

Для правых супероператоров, определенных согласно (47), условия  $[\bar{a}_i, \bar{a}_j]_\sigma = 0$ ,  $[\bar{a}_i^\dagger, \bar{a}_j^\dagger]_\sigma = 0$  выполняются вне зависимости от выбора функций  $\alpha(m, n)$  и  $\beta(m, n)$ . Из условия  $[\bar{a}_i, \bar{a}_j^\dagger]_\sigma = 0$  для  $i \neq j$  и соотношений

$$\bar{a}_i \bar{a}_j^\dagger \|mn\rangle\rangle = \alpha(m, n + 1)\beta(m, n) \| |m\rangle \langle n| a_j a_i^\dagger \rangle\rangle, \quad (310)$$

$$\bar{a}_j^\dagger \bar{a}_i \|mn\rangle\rangle = \beta(m, n - 1)\alpha(m, n) \| |m\rangle \langle n| a_i^\dagger a_j \rangle\rangle$$

получим

$$\alpha(m, n)\beta(m, n - 1) = \alpha(m, n + 1)\beta(m, n). \quad (311)$$

С учетом этого соотношения из  $[\bar{a}_j, \bar{a}_j^\dagger]_\sigma = 1$  следует, что

$$\alpha(m, n)\beta(m, n - 1) = 1. \quad (312)$$

Следовательно,  $\bar{a}_i^\dagger \bar{a}_i$  удовлетворяет условию (45), т.е. является супер-оператором числа частиц.

Так как

$$\begin{aligned} \bar{a}_j \bar{a}_i^\dagger \|mn\rangle\rangle &= \alpha(m+1, n) \|a_i^\dagger |m\rangle\langle n| a_j^\dagger\rangle\rangle, \\ \bar{a}_i^\dagger \bar{a}_j \|mn\rangle\rangle &= \alpha(m, n) \|a_i^\dagger |m\rangle\langle n| a_j^\dagger\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (313)$$

то требование  $[\bar{a}_j, \bar{a}_i^\dagger]_\sigma = 0$  приводит к выражению

$$\alpha(m+1, n) = -\sigma\alpha(m, n), \quad (314)$$

откуда следует, что

$$\alpha(m, n) = (-\sigma)^m \alpha(0, n). \quad (315)$$

Это же соотношение следует из  $[\bar{a}_j, \bar{a}_i]_\sigma = 0$ . Действуя аналогично, из условий  $[\bar{a}_j^\dagger, \bar{a}_i^\dagger]_\sigma = 0$  и  $[\bar{a}_j^\dagger, \bar{a}_i]_\sigma = 0$  получим

$$\beta(m+1, n) = -\sigma\beta(m, n) \quad (316)$$

или

$$\beta(m, n) = (-\sigma)^m \beta(0, n). \quad (317)$$

Рассмотрим теперь следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \langle\langle m_1 n_1 \| \bar{a}_i^\dagger \| m_2 n_2 \rangle\rangle &= \beta(m_2, n_2) \delta_{m_1 m_2} \langle n_2 | a_i | n_1 \rangle = \\ &= \beta(m_2, n_2) \delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1, n_2-1} \langle n_2 | a_i | n_1 \rangle \end{aligned} \quad (318)$$

и

$$\begin{aligned} \langle\langle m_2 n_2 \| \bar{a}_i | m_1 n_1 \rangle\rangle &= \alpha(m_1, n_1) \delta_{m_1 m_2} \langle n_1 | a_i^\dagger | n_2 \rangle = \\ &= \alpha(m_1, n_1) \delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1, n_2-1} \langle n_1 | a_i^\dagger | n_2 \rangle = \\ &= \alpha(m_2, n_2 - 1) \delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1, n_2-1} \langle n_1 | a_i^\dagger | n_2 \rangle. \end{aligned} \quad (319)$$

Тогда из условия  $\langle\langle m_1 n_1 \| \bar{a}_i^\dagger \| m_2 n_2 \rangle\rangle = \langle\langle m_2 n_2 \| \bar{a}_i | m_1 n_1 \rangle\rangle^*$  следует, что

$$\beta(m, n) = \alpha^*(m, n-1). \quad (320)$$

Рассмотрим, к чему приводит последнее из условий, перечисленных на с. 1021. Так как

$$\langle\langle mn \| \bar{a}_j^\dagger \| I \rangle\rangle = \beta(m, m) \langle m | a_j | n \rangle \quad (321)$$

и  $\langle\langle mn | a_j \rangle\rangle = \langle m | a_j | n \rangle$ , то условие  $\bar{a}_j^\dagger \| I \rangle\rangle = c \| a_j \rangle\rangle$  означает, что

$$\beta(m, m) = c. \quad (322)$$

Сопоставляя (322) и (317), получим

$$\beta(m, n) = c(-\sigma)^{m+n}. \quad (323)$$

Используя это равенство в правой части (320), получим

$$\alpha(m, n) = c^*(-\sigma)^{m+n+1}, \quad (324)$$

что согласуется с (320). Подставляя полученные выражения для  $\alpha(m, n)$  и  $\beta(m, n)$  в (312), придем к условию  $cc^* = 1$ .

## Приложение Б СЕКУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАРЯДОВО-НЕЙТРАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ФОНОНОВ

Помимо условия (213) амплитуды зарядово-нейтральных тепловых фононов удовлетворяют таким соотношениям:

- из  $[Q_{JM_i}, Q_{JM_{i'}}] = 0$  следует

$$\sum_{j_1 j_2} \left\{ (\psi_{j_1 j_2}^{J_i} \varphi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \varphi_{j_1 j_2}^{J_i} \psi_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + (\tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + \right. \\ \left. + (\eta_{j_1 j_2}^{\lambda_i} \xi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \xi_{j_1 j_2}^{J_i} \eta_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + (\tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) \right\} = 0; \quad (325)$$

- из  $[Q_{JM_i}, \tilde{Q}_{JM_{i'}}^\dagger] = 0$  следует

$$\sum_{j_1 j_2} \left\{ (\psi_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \varphi_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + (\tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} \psi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} \varphi_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + \right. \\ \left. + (\eta_{j_1 j_2}^{\lambda_i} \tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \xi_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + (\tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i} \eta_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i} \xi_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) \right\} = 0; \quad (326)$$

- из  $[Q_{JM_i}, \tilde{Q}_{JM_{i'}}] = 0$  следует

$$\sum_{j_1 j_2} \left\{ (\psi_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \psi_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + (\tilde{\psi}_{j_1 j_2}^{J_i} \varphi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \tilde{\varphi}_{j_1 j_2}^{J_i} \varphi_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + \right. \\ \left. + (\eta_{j_1 j_2}^{\lambda_i} \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \xi_{j_1 j_2}^{J_i} \tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) + (\tilde{\eta}_{j_1 j_2}^{J_i} \xi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \tilde{\xi}_{j_1 j_2}^{J_i} \eta_{j_1 j_2}^{J_{i'}}) \right\} = 0. \quad (327)$$

С помощью эффективных амплитуд (220) четыре условия ортонормировки (213), (325)–(327) можно записать в виде двух соотношений: (223) и

$$\sum_{\tau} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} \left\{ (\Psi_{j_1 j_2}^{J_i} \Phi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \Phi_{j_1 j_2}^{J_i} \Psi_{j_1 j_2}^{J_{i'}})(1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + \right. \\ \left. + (H_{j_1 j_2}^{J_i} \Xi_{j_1 j_2}^{J_{i'}} - \Xi_{j_1 j_2}^{J_i} H_{j_1 j_2}^{J_{i'}})(y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) \right\} = 0. \quad (328)$$

Сепарабельный вид остаточного взаимодействия позволяет свести решение ТКПСФ-уравнений (224), (225) к системе  $4N$ -линейных однородных уравнений. Действительно, для зарядово-нейтральных фононов нормальной четности формальное решение задачи (224) можно представить в следующем виде:

$$G_{j_1 j_2}^{J_i}(\tau) = \frac{\hat{J}^{-2}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} - \omega_{J_i}^2)} \left\{ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} u_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(J; k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(m; k)} D_{J_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) + \right. \\ \left. + \omega_{J_i} u_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(J; k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s; k)} D_{J_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 W_{j_1 j_2}^{J_i}(\tau) &= \frac{\widehat{J}^{-2}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} )^2 - \omega_{J_i}^2} \left\{ \omega_{J_i} u_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(m;k)} D_{J_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} u_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(JJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{JJ_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) \right\}, \\
 T_{j_1 j_2}^{J_i}(\tau) &= \frac{\widehat{J}^{-2}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} )^2 - \omega_{J_i}^2} \left\{ \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} v_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(m;k)} D_{J_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_{J_i} v_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(JJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{JJ_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) \right\}, \\
 S_{j_1 j_2}^{J_i}(\tau) &= \frac{\widehat{J}^{-2}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} )^2 - \omega_{J_i}^2} \left\{ \omega_{J_i} v_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(J;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(m;k)} D_{J_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} v_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_k f_{j_1 j_2}^{(JJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{JJ_i}^{(k)}(\rho\tau) \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{329}$$

Подстановка полученных выражений в (226) приводит к системе  $4N$ -однородных уравнений относительно функций  $D_{J_i}^{(k)}(\tau)$  и  $D_{JJ_i}^{(k)}(\tau)$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $\tau = p, n$ . В матричном виде полученная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_{mm} - 1 & \mathbb{M}_{ms} \\ \mathbb{M}_{sm} & \mathbb{M}_{ss} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}_J \\ \mathbb{D}_{JJ} \end{pmatrix} = 0. \tag{330}$$

Векторы  $\mathbb{D}_J$  и  $\mathbb{D}_{JJ}$  размерности  $2N$  состоят из элементов

$$\mathbb{D}_J^{(k)} = \begin{pmatrix} D_J^{(k)}(p) \\ D_J^{(k)}(n) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_{JJ}^{(k)} = \begin{pmatrix} D_{JJ}^{(k)}(p) \\ D_{JJ}^{(k)}(n) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

а матрицы  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = m, s$ ) представляют собой матрицы  $2N \times 2N$ , составленные из блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{M}_{\alpha\beta}^{kk'} = \begin{pmatrix} \chi_{+1}^{(\beta;k')} \mathcal{X}_{\alpha\beta;p}^{(J;kk')}(\omega) & \chi_{-1}^{(\beta;k')} \mathcal{X}_{\alpha\beta;p}^{(J;kk')}(\omega) \\ \chi_{-1}^{(\beta;k')} \mathcal{X}_{\alpha\beta;n}^{(J;kk')}(\omega) & \chi_{+1}^{(\beta;k')} \mathcal{X}_{\alpha\beta;n}^{(J;kk')}(\omega) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k, k' \leq N.$$

Здесь введены следующие обозначения для функций от  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_{mm;\tau}^{(J;kk')}(\omega) &= \widehat{J}^{-2} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(J;k)} f_{j_1 j_2}^{(J;k')} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} (u_{j_1 j_2}^{(+)} )^2}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} )^2 - \omega^2} (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + \frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} (v_{j_1 j_2}^{(-)} )^2}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} )^2 - \omega^2} (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{ss;\tau}^{(J;kk')}(\omega) &= \widehat{J}^{-2} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(JJ;k)} f_{j_1 j_2}^{(JJ;k')} \times \\ &\times \left\{ \frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} (u_{j_1 j_2}^{(-)})^2}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)})^2 - \omega^2} (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + \frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} (v_{j_1 j_2}^{(+)})^2}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)})^2 - \omega^2} (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) \right\}, \end{aligned} \quad (331)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{ms;\tau}^{(J;kk')}(\omega) &= \widehat{J}^{-2} \omega \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(J;k)} f_{j_1 j_2}^{(JJ;k')} \times \\ &\times \left\{ \frac{u_{j_1 j_2}^{(+)} u_{j_1 j_2}^{(-)}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)})^2 - \omega^2} (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + \frac{v_{j_1 j_2}^{(+)} v_{j_1 j_2}^{(-)}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)})^2 - \omega^2} (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) \right\} \end{aligned}$$

и  $\mathcal{X}_{sm;\tau}^{(J;kk')}(\omega) = \mathcal{X}_{ms;\tau}^{(j;kk')}(\omega)$ . Условие разрешимости системы однородных уравнений (330) приводит к секулярному уравнению для нахождения энергии  $\omega_{J_i}$  тепловых фононов

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{mm} - 1 & \mathbb{M}_{ms} \\ \mathbb{M}_{sm} & \mathbb{M}_{ss} - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (332)$$

Для тепловых фононов аномальной четности формальное решение системы ТКПСФ-уравнений (225) имеет вид

$$W_{j_1 j_2}^{J_i}(\tau) = \frac{\widehat{J}^{-2}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)})^2 - \omega_{J_i}^2} \varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} u_{j_1 j_2}^{(-)} \sum_k \sum_{L=J \pm 1} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{LJ_i}^{(k)}(\rho\tau) \right), \quad (333)$$

$$S_{j_1 j_2}^{J_i}(\tau) = \frac{\widehat{J}^{-2}}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)})^2 - \omega_{J_i}^2} \varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} v_{j_1 j_2}^{(+)} \sum_k \sum_{L=J \pm 1} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} \left( \sum_{\rho=\pm 1} \chi_{\rho}^{(s;k)} D_{LJ_i}^{(k)}(\rho\tau) \right).$$

Как и в случае фононов нормальной четности, подстановка полученных выражений в (226) приводит к системе  $4N$ -однородных уравнений относительно функций  $D_{J \pm 1 J}^{(k)}(\tau)$  ( $1 \leq k \leq N$ ,  $\tau = p, n$ ):

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_{J-1J-1} - 1 & \mathbb{M}_{J-1J+1} \\ \mathbb{M}_{J+1J-1} & \mathbb{M}_{J+1J+1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}_{J-1J} \\ \mathbb{D}_{J+1J} \end{pmatrix} = 0. \quad (334)$$

Здесь  $\mathbb{M}_{LL'}$  — это матрицы  $2N \times 2N$ , составленные из блоков  $2 \times 2$

$$\mathbb{M}_{LL'}^{(kk')} = \begin{pmatrix} \chi_{+1}^{(s;k')} \mathcal{X}_{LL';p}^{(J;kk')}(\omega) & \chi_{-1}^{(s;k)} \mathcal{X}_{LL';p}^{(J;kk')}(\omega) \\ \chi_{-1}^{(s;k')} \mathcal{X}_{LL';n}^{(J;kk')}(\omega) & \chi_{+1}^{(s;k)} \mathcal{X}_{LL';n}^{(J;kk')}(\omega) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k, k' \leq N,$$

с матричными элементами

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{LL';\tau}^{(J;kk')}(\omega) &= \widehat{J}^{-2} \sum_{j_1 j_2}^{\tau} f_{j_1 j_2}^{(LJ;k)} f_{j_1 j_2; k'}^{(L'J;k)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)} (u_{j_1 j_2}^{(-)})^2}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(+)})^2 - \omega^2} (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + \frac{\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)} (v_{j_1 j_2}^{(+)})^2}{(\varepsilon_{j_1 j_2}^{(-)})^2 - \omega^2} (y_{j_2}^2 - y_{j_1}^2) \right\}, \end{aligned}$$

а вектор  $\mathbb{D}_{LJ}$  размерности  $2N$  имеет следующие компоненты:

$$\mathbb{D}_{LJ}^{(k)} = \begin{pmatrix} D_{LJ}^{(k)}(p) \\ D_{LJ}^{(k)}(n) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Энергия теплового фона находится из условия существования нетривиального решения системы (334), т. е. является решением секулярного уравнения

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{J-1, J-1} - 1 & \mathbb{M}_{J-1, J+1} \\ \mathbb{M}_{J+1, J-1} & \mathbb{M}_{J+1, J+1} - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (335)$$

### Приложение В СЕКУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАРЯДОВО-ОБМЕННЫХ ТЕПЛОВЫХ ФОНОНОВ

Требование сохранения бозонных коммутационных соотношений для зарядово-обменных тепловых фононов приводит к четырем условиям ортонормировки для амплитуд:

- из  $[\Omega_{JM_i}, \Omega_{J'M'_i}^\dagger] = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{ii'}$  следует

$$\sum_{j_p j_n} \left\{ (\psi_{j_p j_n}^{Ji} \psi_{j_p j_n}^{Ji'} - \varphi_{j_p j_n}^{Ji} \varphi_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\eta_{j_p j_n}^{\lambda i} \eta_{j_p j_n}^{Ji'} - \xi_{j_p j_n}^{Ji} \xi_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji'}) \right\} = \delta_{ii'}; \quad (336)$$

- из  $[\Omega_{JM_i}, \Omega_{J'M'_i}] = 0$  следует

$$\sum_{j_p j_n} \left\{ (\psi_{j_p j_n}^{Ji} \varphi_{j_p j_n}^{Ji'} - \varphi_{j_p j_n}^{Ji} \psi_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\eta_{j_p j_n}^{\lambda i} \xi_{j_p j_n}^{Ji'} - \xi_{j_p j_n}^{Ji} \eta_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji'}) \right\} = 0; \quad (337)$$

- из  $[\Omega_{JM_i}, \tilde{\Omega}_{J'M'_i}^\dagger] = 0$  следует

$$\sum_{\tau} \sum_{j_p j_n} \left\{ (\psi_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji'} - \varphi_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji} \psi_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji} \varphi_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\eta_{j_p j_n}^{\lambda i} \tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji'} - \xi_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji} \eta_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji} \xi_{j_p j_n}^{Ji'}) \right\} = 0; \quad (338)$$

- из  $[\Omega_{JM_i}, \tilde{\Omega}_{J'M'_i}] = 0$  следует

$$\sum_{\tau} \sum_{j_p j_n} \left\{ (\psi_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji'} - \psi_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\psi}_{j_p j_n}^{Ji} \varphi_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\varphi}_{j_p j_n}^{Ji} \varphi_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\eta_{j_p j_n}^{\lambda i} \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji'} - \xi_{j_p j_n}^{Ji} \tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji'}) + (\tilde{\eta}_{j_p j_n}^{Ji} \xi_{j_p j_n}^{Ji'} - \tilde{\xi}_{j_p j_n}^{Ji} \eta_{j_p j_n}^{Ji'}) \right\} = 0. \quad (339)$$

Для эффективных амплитуд вышеперечисленные условия примут вид двух соотношений: (265) и

$$\sum_{j_p j_n} \left\{ (\Psi_{j_p j_n}^{Ji} \Phi_{j_p j_n}^{Ji'} - \Phi_{j_p j_n}^{Ji} \Psi_{j_p j_n}^{Ji'}) (1 - y_{j_1}^2 - y_{j_2}^2) + (H_{j_p j_n}^{Ji} \Xi_{j_p j_n}^{Ji'} - \Xi_{j_p j_n}^{Ji} H_{j_p j_n}^{Ji'}) (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) \right\} = 0. \quad (340)$$

При доказательстве выполнения правила сумм Икеды в ТКПСФ (277) были использованы свойства полноты эффективных амплитуд:

$$\begin{aligned} \sum_i G_{j_p j_n}^{Ji} W_{j_p' j_n'}^{Ji} &= \frac{\delta_{j_p j_p'} \delta_{j_n j_n'}}{1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2}, \\ \sum_i T_{j_p j_n}^{Ji} S_{j_p' j_n'}^{Ji} &= \frac{\delta_{j_p j_p'} \delta_{j_n j_n'}}{y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2}, \\ \sum_i G_{j_p j_n}^{Ji} S_{j_p' j_n'}^{Ji} &= \sum_i T_{j_p j_n}^{Ji} W_{j_p' j_n'}^{Ji} = 0. \end{aligned} \quad (341)$$

Данные свойства легко получить, записав условия полноты для фононных амплитуд и затем выразив  $\varphi$ ,  $\psi$  и т.д. через эффективные амплитуды.

Как и в случае зарядово-нейтральных фононов, сепарабельный вид остаточного взаимодействия позволяет свести систему ТКПСФ-уравнений (266) к  $4N$ -однородным уравнениям

$$\begin{pmatrix} M_+ - 1 & M_{+-} \\ M_{+-} & M_- - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_+ \\ D_- \end{pmatrix} = 0. \quad (342)$$

Здесь  $M_\sigma$  ( $\sigma = +, -, +-)$  — это матрицы  $2N \times 2N$ , составленные из блоков  $2 \times 2$ :

$$M_\sigma^{kk'} = \begin{pmatrix} \chi_1^{(a;k')} \mathcal{X}_\sigma^{(aa;kk')}(\omega) & \chi_1^{(b;k')} \mathcal{X}_\sigma^{(ab;kk')}(\omega) \\ \chi_1^{(a;k')} \mathcal{X}_\sigma^{(ba;kk')}(\omega) & \chi_1^{(b;k')} \mathcal{X}_\sigma^{(bb;kk')}(\omega) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k, k' \leq N. \quad (343)$$

Для фононов нормальной четности индексы  $a, b$  принимают значения  $a = J, b = JJ$ , а для фононов аномальной четности  $a = (J - 1)J, b = (J + 1)J$ . Кроме того,  $\chi_1^{(J;k)} = \chi_1^{(m;k)}$  и  $\chi_1^{(LJ;k)} = \chi_1^{(s;k)}$ . Функции  $\mathcal{X}_\sigma^{(cd;kk')}(\omega)$  ( $c = a, b, d = a, b$ ) определены как

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\pm^{(cd;kk')}(\omega) &= 2\hat{J}^{-2} \sum_{j_p j_n} f_{j_p j_n}^{(c;k)} f_{j_p j_n}^{(d;k')} \times \\ &\times \left\{ \frac{\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)} (u_{j_p j_n}^{(\pm)})^2}{(\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)} )^2 - \omega^2} (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) + \frac{\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)} (v_{j_p j_n}^{(\mp)})^2}{(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)} )^2 - \omega^2} (y_{j_n}^2 - y_{j_p}^2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}_{+-}^{(cd;kk')}(\omega) = 2\omega \widehat{J}^{-2} \sum_{j_p j_n} f_{j_p j_n}^{(c;k)} f_{j_p j_n}^{(d;k')} \times \\ \times \left\{ \frac{u_{j_p j_n}^{(+)} u_{j_p j_n}^{(-)}}{(\varepsilon_{j_p j_n}^{(+)})^2 - \omega^2} (1 - y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) + \frac{v_{j_p j_n}^{(+)} v_{j_p j_n}^{(-)}}{(\varepsilon_{j_p j_n}^{(-)})^2 - \omega^2} (y_{j_p}^2 - y_{j_n}^2) \right\}. \quad (344)$$

Векторы  $\mathbb{D}^{(\pm)}$  размерности  $2N$  состоят из функций  $D_J^{(\pm;k)}$ ,  $D_{LJ}^{(\pm;k)}$  (267):

$$\mathbb{D}_k^{(\pm)} = \begin{pmatrix} D_a^{(\pm;k)} \\ D_b^{(\pm;k)} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Условие существования нетривиального решения системы (342) приводит к секулярному уравнению для нахождения энергии зарядово-обменных тепловых фононов:

$$\det \begin{pmatrix} M_+ - 1 & M_{+-} \\ M_{+-} & M_- - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (345)$$

Для гамильтониана КФМ секулярное уравнение для определения энергии зарядово-обменных фононов в нагретых ядрах приводится в нашей работе [134].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bethe H. A.* Nuclear Physics B. Nuclear Dynamics, Theoretical // Rev. Mod. Phys. 1937. V. 9, No. 2. P. 69–244.
2. *Frenkel J.* // Phys. Z. Sow. 1936. V. 9. P. 533.
3. *Ландау Л. Д.* К статистической теории ядер // ЖЭТФ. 1937. Т. 7, № 7. С. 819–824.
4. *Weisskopf V.* Statistics and Nuclear Reactions // Phys. Rev. 1937. V. 52, No. 4. P. 295–303.
5. *Ставинский В. С.* Плотность уровней атомных ядер // ЭЧАЯ. 1972. Т. 3, вып. 4. С. 832–893.
6. *Suraud E., Grégoire C., Tamain B.* Birth, Life and Death of Hot Nuclei // Progress Part. Nucl. Phys. 1989. V. 23. P. 357–467.
7. *Morrissey D. J., Benenson W., Friedman W. A.* Measurement of Temperature in Nuclear Reactions // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1994. V. 44, No. 1. P. 27–63.
8. *Kelić A., Natowitz J. B., Schmidt K. H.* Nuclear Thermometry // Eur. Phys. J. A. 2006. V. 30, No. 1. P. 203–213.
9. *Song S., Rivet M., Bimbot R. et al.* Evidence for the Formation of Highly Excited Compound-Like Nuclei ( $T \approx 5$  MeV) in Collisions of 720 MeV C Projectiles with  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  and  $^{197}\text{Au}$  Targets // Phys. Lett. B. 1983. V. 130, No. 1. P. 14–18.
10. *Shlomo S., Kolomietz V. M.* Hot Nuclei // Rep. Progress Phys. 2005. V. 68, No. 1. P. 1–76.
11. *Newton J. O., Herskind B., Diamond R. M. et al.* Observation of Giant Dipole Resonances Built on States of High Energy and Spin // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46, No. 21. P. 1383–1386.
12. *Bortignon P. F., Bracco A., Broglia R. A.* Giant Resonances: Nuclear Structure at Finite Temperature // Contemporary Concepts in Physics. V. 10. Harwood Acad. Publ., 1998.

13. *Di Toro M., Baran V., Cabibbo M. et al.* The Nuclear Giant Dipole Resonance under Extreme Conditions // *Phys. Part. Nucl.* 2000. V. 31, No. 4. P. 874–904.
14. *Santonocito D., Blumenfeld Y.* Evolution of the Giant Dipole Resonance Properties with Excitation Energy // *Eur. Phys. J. A.* 2006. V. 30, No. 1. P. 183–202.
15. *Santonocito D., Blumenfeld Y.* The Hot GDR Revisited // *Eur. Phys. J. A.* 2020. V. 56, No. 11. P. 279.
16. *Brink D.M.* Some Aspects of the Interaction of Light with Matter. Ph.D. Thesis. Univ. of Oxford, 1955.
17. *Axel P.* Electric Dipole Ground-State Transition Width Strength Function and 7 MeV Photon Interactions // *Phys. Rev.* 1962. V. 126, No. 2. P. 671–683.
18. *Vautherin D., Vinh Mau N.* Temperature Dependence of Collective States in the Random-Phase Approximation // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 422, No. 1. P. 140–156.
19. *Niu Y.F., Paar N., Vretenar D., Meng J.* Low-Energy Monopole and Dipole Response in Nuclei at Finite Temperature // *Phys. Lett. B.* 2009. V. 681, No. 4. P. 315–319.
20. *Ring P., Robledo L.M., Egidio J.L., Faber M.* Microscopic Theory of the Isovector Dipole Resonance at High Angular Momenta // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 419, No. 2. P. 261–294.
21. *Yüksel E., Colò G., Khan E. et al.* Multipole Excitations in Hot Nuclei within the Finite Temperature Quasiparticle Random Phase Approximation Framework // *Phys. Rev. C.* 2017. V. 96, No. 2. P. 024303.
22. *Sagawa H., Bertsch G.F.* Self-Consistent Calculations of Finite Temperature Nuclear Response Function // *Phys. Lett. B.* 1984. V. 146, No. 3. P. 138–142.
23. *Литвинова Е. В., Камерджиев С. П., Целяев В. И.* Температурное обобщение квазичастичного метода хаотических фаз с учетом континуума // *ЯФ.* 2003. Т. 66, № 3. С. 584–590.
24. *Khan E., Van Giai N., Grasso M.* Collective Motions in Hot Exotic Nuclei: The Finite Temperature Continuum QRPA // *Nucl. Phys. A.* 2004. V. 731. P. 311–316.
25. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматлит, 1962.
26. *Bortignon P.F., Broglia R.A., Bertsch G.F., Pacheco J.* Damping of Nuclear Excitations at Finite Temperature // *Nucl. Phys. A.* 1986. V. 460, No. 2. P. 149–163.
27. *Бунатян Г. Г.* К статистическому описанию компаунд-состояний ядер // *ЯФ.* 1977. Т. 26, № 5. С. 979–990.
28. *Камерджиев С. П.* О микроскопическом описании «нагретых» ядер. Препринт ФЭИ-1860. Обнинск, 1987.
29. *Камерджиев С. П., Тертышный Г. Я., Целяев В. И.* Метод хронологического расщепления диаграмм и его применение к описанию гигантских резонансов в магических ядрах // *ЭЧАЯ.* 1997. Т. 28, вып. 2. С. 333–390.
30. *Litvinova E., Wibowo H.* Finite-Temperature Relativistic Nuclear Field Theory: An Application to the Dipole Response // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 121, No. 8. P. 082501.
31. *Litvinova E., Wibowo H.* Nuclear Response in a Finite-Temperature Relativistic Framework // *Eur. Phys. J. A.* 2019. V. 55, No. 12. P. 223.

32. *Wibowo H., Litvinova E.* Nuclear Dipole Response in the Finite-Temperature Relativistic Time-Blocking Approximation // *Phys. Rev. C.* 2019. V. 100, No. 2. P. 024307.
33. *Takahashi Y., Umezawa H.* Thermo Field Dynamics // *Collective Phenomena.* 1975. V. 2. P. 55.
34. *Умэдзава Х., Мацумото Х., Такики М.* Термополевая динамика и конденсированные состояния. М.: Мир, 1985.
35. *Dzhioev A. A., Vdovin A. I.* On the TFD Treatment of Collective Vibrations in Hot Nuclei // *Intern. J. Mod. Phys. E.* 2009. V. 18, No. 7. P. 1535–1560.
36. *Schmutz M.* Real-Time Green's Functions in Many-Body Problems // *Z. Phys. B. Cond. Matter.* 1978. V. 30, No. 1. P. 97–106.
37. *Ojima I.* Gauge Fields at Finite Temperatures — «Thermo Field Dynamics» and the KMS Condition and Their Extension to Gauge Theories // *Ann. Phys.* 1981. V. 137, No. 1. P. 1–32.
38. *Landsman N. P., van Weert C. G.* Real- and Imaginary-Time Field Theory at Finite Temperature and Density // *Phys. Rep.* 1987. V. 145, No. 3. P. 141–249.
39. *Rowe D. J.* Equations of Motion Method and the Extended Shell Model // *Rev. Mod. Phys.* 1968. V. 40, No. 1. P. 153–166.
40. *Rowe D. J.* Nuclear Collective Motion: Models and Theory. World Sci., 2010.
41. *Suhonen J.* From Nucleons to Nucleus. Berlin: Springer, 2007.
42. *Dzhioev A. A., Kosov D. S.* Second-Order Post-Hartree-Fock Perturbation Theory for the Electron Current // *J. Chem. Phys.* 2011. V. 134, No. 15. P. 154107.
43. *Dzhioev A. A., Kosov D. S.* Super-Fermion Representation of Quantum Kinetic Equations for the Electron Transport Problem // *J. Chem. Phys.* 2011. V. 134, No. 4. P. 044121.
44. *Dzhioev A. A., Kosov D. S.* Nonequilibrium Perturbation Theory in Liouville-Fock Space for Inelastic Electron Transport // *J. Phys. Condens. Matter.* 2012. V. 24, No. 22. P. 225304.
45. *Dzhioev A. A., Kosov D. S.* Nonequilibrium Configuration Interaction Method for Transport in Correlated Quantum Systems // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. V. 47, No. 9. P. 095002.
46. *Dzhioev A. A., Kosov D. S.* Superoperator Coupled Cluster Method for Nonequilibrium Density Matrix // *J. Phys. A: Math Theor.* 2015. V. 48, No. 1. P. 015004.
47. *Bethe H. A.* Supernova Mechanisms // *Rev. Mod. Phys.* 1990. V. 62, No. 4. P. 801–866.
48. *Langanke K., Martínez-Pinedo G.* Nuclear Weak-Interaction Processes in Stars // *Rev. Mod. Phys.* 2003. V. 75, No. 3. P. 819–862.
49. *Janka H.-T., Langanke K., Marek A. et al.* Theory of Core-Collapse Supernovae // *Phys. Rep.* 2007. V. 442, No. 1–6. P. 38–74.
50. *Martínez-Pinedo G., Liebendörfer M., Frekers D.* Nuclear Input for Core-Collapse Models // *Nucl. Phys. A.* 2006. V. 777. P. 395–423.
51. *Hoyle F.* The Synthesis of the Elements from Hydrogen // *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* 1946. V. 106. P. 343–383.
52. *Cowan J. J., Sneden C., Lawler J. E. et al.* Origin of the Heaviest Elements: The Rapid Neutron-Capture Process // *Rev. Mod. Phys.* 2021. V. 93, No. 1. P. 15002.

53. *Heger A., Langanke K., Martínez-Pinedo G., Woosley S.E.* Presupernova Collapse Models with Improved Weak-Interaction Rates // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86, No. 9. P. 1678–1681.
54. *Heger A., Woosley S.E., Martínez-Pinedo G., Langanke K.* Presupernova Evolution with Improved Rates for Weak Interactions // *Astrophys. J.* 2001. V. 560, No. 1. P. 307.
55. *Langanke K., Martínez-Pinedo G., Sampaio J.M. et al.* Electron Capture Rates on Nuclei and Implications for Stellar Core Collapse // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90, No. 24. P. 241102.
56. *Hix W.R., Messer O.E.B., Mezzacappa A. et al.* Consequences of Nuclear Electron Capture in Core-Collapse Supernovae // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91, No. 20. P. 201102.
57. *Balasi K.G., Langanke K., Martínez-Pinedo G.* Neutrino–Nucleus Reactions and Their Role for Supernova Dynamics and Nucleosynthesis // *Progress Part. Nucl. Phys.* 2015. V. 85. P. 33–81.
58. *Sullivan C., O'Connor E., Zegers R. G. T. et al.* The Sensitivity of Core-Collapse Supernovae to Nuclear Electron Capture // *Astrophys. J.* 2016. V. 816, No. 1. P. 44.
59. *Titus R., Sullivan C., Zegers R. G. T. et al.* Impact of Electron-Captures on Nuclei near  $N = 50$  on Core-Collapse Supernovae // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 2018. V. 45, No. 1. P. 014004.
60. *Pascal A., Giraud S., Fantina A.F. et al.* Impact of Electron Capture Rates for Nuclei Far from Stability on Core-Collapse Supernovae // *Phys. Rev. C.* 2020. V. 101, No. 1. P. 015803.
61. *Langanke K., Martínez-Pinedo G., Zegers R.* Electron Capture in Stars // *Rep. Progress Phys.* 2021. V. 84. P. 066301.
62. *Langanke K., Martínez-Pinedo G.* Shell-Model Calculations of Stellar Weak Interaction Rates. II. Weak Rates for Nuclei in the Mass Range  $A = 45–65$  in Supernovae Environments // *Nucl. Phys. A.* 2000. V. 673, No. 1–4. P. 481–508.
63. *Langanke K., Martínez-Pinedo G.* Rate Tables for the Weak Processes of  $pf$ -Shell Nuclei in Stellar Environments // *Atom. Data Nucl. Data Tables.* 2001. V. 79, No. 1. P. 1–46.
64. *Sampaio J.M., Langanke K., Martínez-Pinedo G.* Neutrino Absorption Cross Sections in the Supernova Environment // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 511, No. 1. P. 11–18.
65. *Sampaio J.M., Langanke K., Martínez-Pinedo G., Dean D.J.* Neutral-Current Neutrino Reactions in the Supernova Environment // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 529, No. 1–2. P. 19–25.
66. *Angell C.T., Hammond S.L., Karwowski H.J. et al.* Evidence for Radiative Coupling of the Pygmy Dipole Resonance to Excited States // *Phys. Rev. C.* 2012. V. 86, No. 5. P. 51302.
67. *Cooperstein J., Wambach J.* Electron Capture in Stellar Collapse // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 420, No. 3. P. 591–620.
68. *Paar N., Colò G., Khan E., Vretenar D.* Calculation of Stellar Electron-Capture Cross Sections on Nuclei Based on Microscopic Skyrme Functionals // *Phys. Rev. C.* 2009. V. 80, No. 5. P. 055801.

69. *Niu Y.F., Paar N., Vretenar D., Meng J.* Stellar Electron-Capture Rates Calculated with the Finite-Temperature Relativistic Random-Phase Approximation // *Phys. Rev. C.* 2011. V. 83, No. 4. P. 45807.
70. *Fantina A. F., Khan E., Colò G. et al.* Stellar Electron-Capture Rates on Nuclei Based on a Microscopic Skyrme Functional // *Phys. Rev. C.* 2012. V. 86, No. 3. P. 035805.
71. *Ravlić A., Yüksel E., Niu Y.F. et al.* Stellar Electron-Capture Rates Based on Finite-Temperature Relativistic Quasiparticle Random-Phase Approximation // *Phys. Rev. C.* 2020. V. 102, No. 6. P. 65804.
72. *Koonin S.E., Dean D.J., Langanke K.* Shell Model Monte Carlo Methods // *Phys. Rep.* 1997. V. 278, No. 1. P. 1–77.
73. *Egido J.L., Ring P.* The Decay of Hot Nuclei // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 1993. V. 19, No. 1. P. 1–54.
74. *Блум К.* Теория матрицы плотности и ее приложения. М.: Мир, 1983.
75. *Тарасов В.Е.* Квантовая механика: лекции по основам теории. М.: Вузовская кн., 2000.
76. *Buot F.A.* General Theory of Quantum Distribution Function Transport Equations: Superfluid Systems and Ultrafast Dynamics of Optically Excited Semiconductors // *La Rivista Nuovo Cim.* (1978–1999). 1997. V. 20, No. 9. P. 1–75.
77. *Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
78. *Ben-Reuven A.* Symmetry Considerations in Pressure-Broadening Theory // *Phys. Rev.* 1966. V. 141, No. 1. P. 34–40.
79. *Kubo R.* Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems // *J. Phys. Soc. Japan.* 1957. V. 12, No. 6. P. 570–586.
80. *Martin P.C., Schwinger J.* Theory of Many-Particle Systems. I // *Phys. Rev.* 1959. V. 115, No. 6. P. 1342–1373.
81. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
82. *Hatsuda T.* Mean Field Theory and Boson Expansion at Finite Temperature on the Basis of the Thermo Field Dynamics // *Nucl. Phys. A.* 1989. V. 492, No. 2. P. 187–204.
83. *Civitaresse O., DePaoli A.L.* Thermo Field Dynamics in the Treatment of the Nuclear Pairing Problem at Finite Temperature // *Z. Phys. A.* 1992. V. 344, No. 3. P. 243–249.
84. *Вдовин А.И., Косов Д.С.* Однофононные состояния в нагретых ядрах // *ЯФ.* 1995. Т. 58. С. 829–836.
85. *Бор О., Моттельсон Б.* Структура атомного ядра. М.: Мир, 1971. Т. 1, 2.
86. *Игнатюк А.В.* Статистические свойства возбужденных атомных ядер. М.: Энергоатомиздат, 1983.
87. *Levit S.* Hot Nuclei — Theory and Phenomena. The Response of Nuclei under Extreme Conditions / Ed. by R. A. Broglia, G. F. Bertsch. Boston, MA: Springer US, 1988. P. 87–114.
88. *Misch G.W.* Nuclear Weak Rates and Detailed Balance in Stellar Conditions // *Astrophys. J.* 2017. V. 844, No. 1. P. 20.

89. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 4: Квантовая статистика. М.: URSS, 2010.
90. *Brack M., Quentin P.* Selfconsistent Calculations of Highly Excited Nuclei // *Phys. Lett. B.* 1974. V. 52, No. 2. P. 159–162.
91. *Bonche P., Levit S., Vautherin D.* Properties of Highly Excited Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 427, No. 2. P. 278–296.
92. *Соловьёв В. Г.* Теория атомного ядра: квазичастицы и фононы. М.: Энергоатомиздат, 1989.
93. *Мигдал А. Б.* Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1983.
94. *Giai N. V., Sagawa H.* Spin–Isospin and Pairing Properties of Modified Skyrme Interactions // *Phys. Lett. B.* 1981. V. 106, No. 5. P. 379–382.
95. *Giai N. V., Stoyanov Ch., Voronov V. V.* Finite Rank Approximation for Random Phase Approximation Calculations with Skyrme Interactions: An Application to Ar Isotopes // *Phys. Rev. C.* 1998. V. 57, No. 3. P. 1204–1209.
96. *Severyukhin A. P., Stoyanov Ch., Voronov V. V., Giai N. V.* Quasiparticle Random Phase Approximation with Finite Rank Approximation for Skyrme Interactions // *Phys. Rev. C.* 2002. V. 66, No. 3. P. 34304.
97. *Урин М. Г.* Аналоговые резонансы и состояния // *ЭЧАЯ.* 1980. Т. 11, № 4. С. 991–1047.
98. *Гапонов Ю. В., Лютостанский Ю. С.* Микроскопическое описание гамов-теллеровского резонанса и коллективных изобарических  $1^+$ -состояний сферических ядер // *ЭЧАЯ.* 1981. Т. 12, № 6. С. 1324–1363.
99. *Пятов Н. И., Фаянс С. А.* Зарядово-обменные возбуждения ядер // *ЭЧАЯ.* 1983. Т. 14, вып. 4. С. 953–1019.
100. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Wiley, 1972.
101. *Вдовин А. И., Соловьёв В. Г.* Квазичастично-фононная модель ядра. III. Однофононные состояния в сферических ядрах // *ЭЧАЯ.* 1983. Т. 14, вып. 2. С. 237–285.
102. *Dzhioev A., Aouissat Z., Storozhenko A. et al.* Extended Holstein–Primakoff Mapping for the Next-to-Leading Order of the  $1/N$  Expansion at Finite Temperature // *Phys. Rev. C.* 2004. V. 69, No. 1. P. 014318.
103. *Vdovin A. I., Dzhioev A. A., Storozhenko A. N.* Boson–Fermion Holstein–Primakoff Mapping at Nonzero Temperatures for the Example of the Lipkin Model // *Phys. Atom. Nucl.* 2003. V. 66, No. 10. P. 1861.
104. *Kosov D. S., Vdovin A. I.* The TFD Treatment of the Quasiparticle–Phonon Interaction at Finite Temperature // *Mod. Phys. Lett. A.* 1994. V. 09, No. 19. P. 1735–1743.
105. *Goodman A. L.* Finite-Temperature HFB Theory // *Nucl. Phys. A.* 1981. V. 352, No. 1. P. 30–44.
106. *Civitarese O., Dussel G. G., Perazzo R. P. J.* Thermal Aspects of the Pairing Correlations in Finite Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 1983. V. 404, No. 1. P. 15–28.
107. *Vdovin A. I., Dzhioev A. A.* Thermal Bogoliubov Transformation in Nuclear Structure Theory // *Phys. Part. Nucl.* 2010. V. 41, No. 7. P. 1127–1131.
108. *Esebbag C., Egido J.* Number Projected Statistics and the Pairing Correlations at High Excitation Energies // *Nucl. Phys. A.* 1993. V. 552, No. 2. P. 205–231.

109. *Gambacurta D., Lacroix D., Sandulescu N.* Pairing and Specific Heat in Hot Nuclei // *Phys. Rev. C: Nucl. Phys.* 2013. V. 88, No. 3. P. 034324.
110. *Kosov D. S., Vdovin A. I.* Approximate Number Projection at Finite Temperature // *Z. Phys. A.* 1996. V. 355, No. 1. P. 17–21.
111. *Ikeda K., Fujii S., Fujita J.* The  $(p, n)$  Reactions and Beta Decays // *Phys. Lett.* 1963. V. 3, No. 6. P. 271–272.
112. *Ring P., Schuck P.* The Nuclear Many-Body Problem. Springer, 2004.
113. *Alasia F., Civitarese O.* Finite Temperature Random Phase Approximation with the Inclusion of Scattering Terms // *Phys. Rev. C.* 1990. V. 42, No. 4. P. 1335–1340.
114. *Dussel G. G., Liotta R. J., Sofia H., Vertse T.* Temperature-Dependent Resonant Random Phase Approximation // *Phys. Rev. C.* 1992. V. 46, No. 2. P. 558–564.
115. *Dzhioev A. A., Vdovin A. I., Martínez-Pinedo G. et al.* Thermal Quasiparticle Random-Phase Approximation with Skyrme Interactions and Supernova Neutral-Current Neutrino–Nucleus Reactions // *Phys. Rev. C.* 2016. V. 94, No. 1. P. 015805.
116. *Вдовин А. И., Косов Д. С.* Термополевое преобразование в квазичастично-фононной модели ядра // *Изв. РАН. Сер. физ.* 1994. Т. 58, № 11. С. 41–47.
117. *Storozhenko A. N., Vdovin A. I., Ventura A., Blokhin A. I.* Temperature Dependence of Spreading Width of Giant Dipole Resonance // *Phys. Rev. C.* 2004. V. 69, No. 6. P. 64320.
118. *Воронов В. В., Соловьёв В. Г.* Квазичастично-фононная модель ядра. IV. Фрагментация однофононных и двухквазичастичных состояний в сферических ядрах // *ЭЧАЯ.* 1983. Т. 14, вып. 6. С. 1380–1442.
119. *Вдовин А. И., Воронов В. В., Соловьёв В. Г., Стоянов Ч.* Квазичастично-фононная модель ядра. V. Нечетные сферические ядра // *ЭЧАЯ.* 1985. Т. 16, вып. 2. С. 245–279.
120. *Soloviev V. G., Stoyanov Ch., Vdovin A. I.* Fragmentation of Giant Multipole Resonances over Two-Phonon States in Spherical Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 1977. V. 288, No. 3. P. 376–396.
121. *Galès S., Stoyanov Ch., Vdovin A. I.* Damping of High-Lying Single-Particle Modes in Heavy Nuclei // *Phys. Rep.* 1988. V. 166, No. 3. P. 125–193.
122. *Vdovin A. I., Storozhenko A. N.* Temperature Dependence of a Spreading Width of Giant Dipole Resonance in Neutron-Rich Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 2003. V. 722. P. C497–C501.
123. *Джюев А. А., Вдовин А. И.* Термодинамически последовательное описание фрагментации однофононных состояний в нагретых ядрах // *Письма в ЭЧАЯ.* 2021. Т. 18, № 6(238). С. 513–532.
124. *Игнатюк А. В.* Вклад коллективных движений в плотность возбужденных состояний ядра // *ЯФ.* 1975. Т. 21, № 1. С. 20–30.
125. *Sommerrmann H. M.* Microscopic Description of Giant Resonances in Highly Excited Nuclei // *Ann. Phys.* 1983. V. 151, No. 1. P. 163–203.
126. *Fedotkin S. N., Mikhailov I. N., Nazmitdinov R. G.* The Microscopic Description of the Isovector Dipole Excitations at High Spins // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 121, No. 1. P. 15–20.
127. *Civitarese O., Broglia R. A., Dasso C. H.* On the Temperature Dependence of the Nuclear Response // *Ann. Phys.* 1984. V. 156, No. 1. P. 142–154.

128. *Halbleib J. A., Sorensen R. A.* Gamow–Teller Beta Decay in Heavy Spherical Nuclei and the Unlike Particle-Hole RPA // *Nucl. Phys. A.* 1967. V. 98, No. 3. P. 542–568.
129. *Гапонов Ю. В., Лютостанский Ю. С.* Гамов-теллеровский изобарический  $1^+$ -резонанс // *ЯФ.* 1974. Т. 19, № 1. С. 62–74.
130. *Кузьмин В. А., Соловьев В. Г.* Описание  $T_>$  гиганстских резонансов в сферических ядрах // *ЯФ.* 1982. Т. 35. С. 620–627.
131. *Dzhioev A. A., Vdovin A. I., Stoyanov Ch.* The Skyrme-TQRPA Calculations of Electron Capture on Hot Nuclei in Pre-Supernova Environment // *Phys. Atom. Nucl.* 2016. V. 79, No. 6. P. 1019–1029.
132. *Джиоев А. А., Вдовин А. И., Пономарев В. Ю., Вамбах Й.* Резонанс Гамова–Теллера в нагретых ядрах и астрофизические приложения // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2008. Т. 72. С. 294–298.
133. *Джиоев А. А., Вдовин А. И., Пономарев В. Ю., Вамбах Й.* Зарядово-обменные переходы в нагретых ядрах // *ЯФ.* 2009. Т. 72. С. 1373–1384.
134. *Dzhioev A. A., Vdovin A. I., Ponomarev V. Yu. et al.* Gamow–Teller Strength Distributions at Finite Temperatures and Electron Capture in Stellar Environments // *Phys. Rev. C.* 2010. V. 81, No. 1. P. 015804.
135. *Civitaresse O., Ray A.* Centroids of Gamow–Teller Transitions at Finite Temperature in  $fp$ -Shell Neutron-Rich Nuclei // *Physica Scripta.* 1999. V. 59, No. 5. P. 352–354.
136. *Civitaresse O., Hirsch J. G., Montani F., Reboiro M.* Extended Quasiparticle Random Phase Approximation at Finite Temperatures: Calculation of Single  $\beta$ -Decay Fermi Transitions // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 62, No. 5. P. 54318.
137. *Civitaresse O., Reboiro M.* Gamow–Teller Transitions at Finite Temperatures in the Extended Quasiparticle Random Phase Approximation // *Phys. Rev. C.* 2001. V. 63, No. 3. P. 34323.
138. *O’Connell J. S., Donnelly T. W., Walecka J. D.* Semileptonic Weak Interactions with  $^{12}\text{C}$  // *Phys. Rev. C.* 1972. V. 6. P. 719–733.
139. *Walecka J. D.* Semileptonic Weak Interactions in Nuclei // *Muon Physics. V. 2: Weak Interactions* / Ed. by V. W. Hughes, C. S. Wu. Elsevier Sci., 1975. P. 113.
140. *Kolbe E., Langanke K., Martínez-Pinedo G., Vogel P.* Neutrino–Nucleus Reactions and Nuclear Structure // *J. Phys. G.* 2003. V. 29. P. 2569–2596.
141. *Paar N., Vretenar D., Marketin T., Ring P.* Inclusive Charged-Current Neutrino–Nucleus Reactions Calculated with the Relativistic Quasiparticle Random-Phase Approximation // *Phys. Rev. C.* 2008. V. 77, No. 2. P. 024608.
142. *Ђапо H., Paar N.* Neutral-Current Neutrino–Nucleus Cross Sections Based on Relativistic Nuclear Energy Density Functional // *Phys. Rev. C.* 2012. V. 86, No. 3. P. 35804.
143. *Chasioti V. C., Kosmas T. S., Divari P. C.* Inelastic Neutrino–Nucleus Reaction Cross Sections at Low Neutrino Energies // *Progress Part. Nucl. Phys.* 2007. V. 59, No. 1. P. 481–485.
144. *Lazauskas R., Volpe C.* Neutrino Beams as a Probe of the Nuclear Isospin and Spin–Isospin Excitations // *Nucl. Phys. A.* 2007. V. 792, No. 3–4. P. 219–228.
145. *Vogel P.* Neutrino–Nucleus Cross Section at Low Energies // *Nucl. Phys. A.* 2006. V. 777. P. 340–355.

146. *Zinner N. T., Langanke K., Vogel P.* Muon Capture on Nuclei: Random Phase Approximation Evaluation Sersus Data for  $6 \leq Z \leq 94$  Nuclei // *Phys. Rev. C.* 2006. V. 74, No. 2. P. 24326.
147. *Walecka J. D.* Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics. Imperial College Press, 2004.
148. *Donnelly T. W., Peccei R. D.* Neutral Current Effects in Nuclei // *Phys. Rep.* 1979. V. 50, No. 1. P. 1–85.
149. *Ахиезер А. И., Ситенко А. Г., Тартаковский В. К.* Электродинамика ядер. Киев: Наук. думка, 1989.
150. *Beringer J., Arguin J.-F., Barnett R. M. et al.* Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86, No. 1. P. 10001.
151. *Балашов В. В., Коренман Г. Я., Эрамжян Р. А.* Поглощение мезонов атомными ядрами. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.
152. *Chasioti V. C., Kosmas T. S.* A Unified Formalism for the Basic Nuclear Matrix Elements in Semileptonic Processes // *Nucl. Phys. A.* 2009. V. 829, No. 3–4. P. 234–252.
153. *Donnelly T. W., Haxton W. C.* Multipole Operators in Semileptonic Weak and Electromagnetic Interactions with Nuclei // *Atom. Data Nucl. Data Tables.* 1979. V. 23, No. 1. P. 103–176.
154. *Donnelly T. W., Haxton W. C.* Multipole Operators in Semileptonic Weak and Electromagnetic Interactions with Nuclei. II. General Single-Particle Matrix Elements // *Atom. Data Nucl. Data Tables.* 1980. V. 25, No. 1. P. 1–28.
155. *Haxton W., Lunardini C.* Seven Operators, a Mathematica Script for Harmonic Oscillator Nuclear Matrix Elements Arising in Semileptonic Electroweak Interactions // *Comp. Phys. Commun.* 2008. V. 179, No. 5. P. 345–358.
156. *Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.* О мезонных поправках в теорию  $\beta$ -распада // *ЖЭТФ.* 1955. Т. 29. С. 698–699.
157. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* Theory of the Fermi Interaction // *Phys. Rev.* 1958. V. 109. P. 193–198.
158. *Gell-Mann M., Lévy M.* The Axial Vector Current in Beta Decay // *Nuovo Cim.* 1960. V. 16. P. 705–726.
159. *Nambu Y.* Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions // *Phys. Rev. Lett.* 1960. V. 4. P. 380–382.
160. *Комминс Ю., Буксбаум Ф.* Слабые взаимодействия лептонов и кварков. М.: Атомиздат, 1987. 440 с.
161. *Singh S. K.* Electroweak Form Factors // *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* 2002. V. 112, No. 1–3. P. 77–85.
162. *Yao W.-M.* Review of Particle Physics // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 2006. V. 33. P. 1–1232.
163. *Behrens H., Bühring W.* Electron Radial Wave Functions and Nuclear Beta-Decay. Clarendon ed. Oxford, 1982.
164. *Engel J.* Approximate Treatment of Lepton Distortion in Charged-Current Neutrino Scattering from Nuclei // *Phys. Rev. C.* 1998. V. 57, No. 4. P. 2004–2009.
165. *Aste A., Trautmann D.* Focusing of High-Energy Particles in the Electrostatic Field of a Homogeneously Charged Sphere and the Effective Momentum Approximation // *Eur. Phys. J. A.* 2007. V. 33. P. 11–20.