УДК 530.13+530.21+530.22+530.24

Скрытая суперсимметрия как метод построения низкоэнергетических суперполевых эффективных действий*,**

И. Л. Бухбиндер[a], Е. А. Иванов[б]

Поступило 14.10.2019; после доработки 11.11.2019; принято к публикации 17.02.2020

Представлен общий метод построения низкоэнергетического суперполевого квантового эффективного действия для суперсимметричных теорий Янга–Миллса с расширенной суперсимметрией в кулоновской фазе, основанный на требовании инвариантности относительно неявной (скрытой) части соответствующей полной суперсимметрии. В качестве примеров выведены $\mathcal{N}=4$ суперсимметричное эффективное действие в $4D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное эффективное действие в $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса и $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричное эффективное действие в $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Они обладают соответственно явными $4D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметриями, $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметриями и $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ суперсимметриями вне массовой поверхности. Во всех случаях эффективное действие зависит от ковариантных суперполевых напряженностей калибровочного мультиплета и суперполей гипермультиплета. Рассмотренные примеры демонстрируют замечательные возможности подхода гармонических суперпространств в квантовой области.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4084

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперсимметрия является источником различных сюрпризов в теоретической и математической физике. Достаточно сказать, что суперсимметрия позволила построить конечные модели квантовой теории поля, сформулировать феноменологически привлекательные модели за пределами Стандартной модели, исключить духи из спектра теории струн, получить точные результаты в квантовой механике, а также в классической и квантовой теории поля. Среди многочисленных работ по суперсимметрии мы хотели бы выделить работы А.А. Славнова [55, 72–74], прямо или косвенно связанные с проблемой квантового эффективного действия.

Квантовое эффективное действие представляет собой центральный объект квантовой теории поля. Оно используется для изучения многих ее аспектов, таких как перенормировка, амплитуды рассеяния, квантовые поправки к классическим уравнениям движения, динамическое нарушение симметрии, симметрии квантовых неабелевых калибровочных теорий (которые представлены тождествами Славнова–Тейлора [71, 75]) и многие другие (см., например, [78]).

*Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Buchbinder I.L., Ivanov E.A.* Hidden supersymmetry as a key to constructing low-energy superfield effective actions // Proc. Steklov Inst. Math. 2020. V. 309.

**Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-02-01046).

[a] Физико-математический факультет, Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия.

[б] Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.

E-mail: joseph@tspu.edu.ru (И.Л. Бухбиндер), eivanov@theor.jinr.ru (Е.А. Иванов).

Низкоэнергетическое эффективное действие играет важную роль в суперсимметричных калибровочных теориях, обеспечивая связь теории суперструн/бран с квантовой теорией поля. С одной стороны, такое эффективное действие можно определить в рамках квантовой теории поля, а с другой — его же можно вывести из теории суперструн/бран. Таким образом, низкоэнергетическое эффективное действие позволяет в принципе описать низкоэнергетические струнные эффекты методами квантовой теории поля и наоборот (см. обзоры [10, 22, 23]).

Наиболее элегантный и продуктивный метод изучения квантовой структуры суперсимметричных теорий поля основан на их формулировке в терминах суперполей без связей, что обеспечивает явную суперсимметрию на всех стадиях вычислений. Такая формулировка детально разработана для $4D$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии (см., например, [26]). Однако для суперсимметричных теорий в высших размерностях и для теорий с расширенной суперсимметрией формулировки через суперполя без связей сталкиваются с определенными трудностями и к настоящему времени известны только для нескольких специальных случаев. Одним из таких примеров является $4D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия, где удачная формулировка через суперполя без связей была развита в рамках гармонического суперпространства [46]. Использование гармонического подхода позволяет, например, сформулировать четырехмерную максимально расширенную $\mathcal{N}=4$ калибровочную теорию таким образом, что две суперсимметрии остаются явными и реализованными вне массовой поверхности, а две другие — скрытыми (неявными), причем их алгебра замкнута только на массовой поверхности. В результате приходим к $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной формулировке рассматриваемой теории в терминах $\mathcal{N}=2$ гармонических суперполей.

Расширенная суперсимметрия накладывает жесткие ограничения на суперполевые классические и квантовые эффективные действия. Характерным примером может служить вклад четвертого порядка по производным в низкоэнергетическое эффективное действие $4D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (в кулоновской фазе), который в секторе $\mathcal{N}=2$ калибровочного мультиплета описывается неголоморфным суперполевым потенциалом [39]. $\mathcal{N}=4$ суперсимметричное расширение этого потенциала гипермультиплетными членами в $\mathcal{N}=2$ гармоническом суперпространстве впервые построено в нашей работе [13] на основе чисто симметрийного анализа. Позднее этот результат был воспроизведен в работе [21] в однопетлевом приближении с использованием техники $\mathcal{N}=2$ суперграфов. Была установлена причина неперенормируемости низкоэнергетического эффективного действия $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса по отношению к квантовым поправкам в высших петлях, и была продемонстрирована связь этого действия с ведущими членами в эффективном действии D3-браны на $(\mathrm{AdS}_5\times S^5)$-фоне (см. также [1, 32] и обзор [23]).

Ключевое наблюдение работы [13] состоит в том, что ограничения, возникающие из требования второй, скрытой $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, дополняющей явную $\mathcal{N}=2$ суперсимметрию до полной (на массовой поверхности) $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии, настолько сильны, что фиксируют вид соответствующего суперполевого эффективного потенциала с точностью до общего коэффициента. Этот коэффициент должен далее вычисляться на основе квантово-полевого рассмотрения (как в [21])[1].

Позднее аналогичный подход был применен для вывода ведущих квантовых поправок в $3D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [35, 36] и для построения суперполевого действия в $3D$, $\mathcal{N}=3$ ABJM-модели [14]. Он также оказался полезным для выявления структуры ведущих вкладов в эффективное действие в $2D$ калибровочных теориях с расширенной суперсимметрией [69]. В качестве недавних приложений метода, введенного в [13], отметим нахождение полной структуры ведущих низкоэнергетических вкладов в эффективные действия $5D$, $\mathcal{N}=2$ и $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса [15, 24].

[1] Важность учета полной суперсимметрии для изучения эффективного действия в расширенных суперсимметричных калибровочных теориях была ранее отмечена в работе [30].

В данном обзоре мы излагаем наш метод с единой точки зрения, начиная с оригинальной работы [13] и далее переходя к недавним результатам [15, 24]. Подчеркнута принципиальная важность подхода гармонического суперпространства [43–46] для вывода полного суперполевого эффективного действия в ситуациях, когда отсутствует суперполевое описание со *всеми* суперсимметриями, реализованными вне массовой поверхности.

Статья организована следующим образом.

В разд. 2 обсуждается $\mathcal{N}=4$ суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие в $4D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Эта теория формулируется в гармоническом суперпространстве в терминах суперполей калибровочного мультиплета и гипермультиплета. Теория обладает явной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией вне массовой поверхности, а также второй неявной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией, которая вместе с явной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией образует полную $\mathcal{N}=4$ суперсимметрию на массовой поверхности. В такой теории строится квантовое низкоэнергетическое эффективное действие в кулоновской фазе. Исходным объектом служит неголоморфный эффективный потенциал в секторе калибровочного мультиплета, найденный ранее в ряде работ [11, 12, 27, 30, 37, 38, 48, 49, 59, 60, 64, 65, 68]. Далее показано, как этот результат можно дополнить гипермультиплетными вкладами до эффективного потенциала, зависящего от всех полей $\mathcal{N}=4$ калибровочного мультиплета. Это пополнение получено алгебраически, исключительно на основе требования дополнительной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии на массовой поверхности, что демонстрирует замечательные возможности скрытой симметрии для решения подобных задач.

Раздел 3 посвящен выводу низкоэнергетического эффективного действия в $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории. Как и в разд. 2, мы начинаем с классической формулировки теории в гармоническом суперпространстве, где половина суперсимметрий реализована явно, а другая половина — как скрытая суперсимметрия. Далее изучается структура низкоэнергетического эффективного действия с использованием как явной, так и скрытой суперсимметрий. Здесь стоит обратить внимание на один важный момент: $5D$, $\mathcal{N}=1$ калибровочная теория допускает классическое действие Черна–Саймонса, однако его $\mathcal{N}=2$ суперсимметричного обобщения не существует, поскольку действие Черна–Саймонса в $\mathcal{N}=1$ случае инвариантно относительно преобразований $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперконформной алгебры $F(4)$, которая единственна и не допускает расширения на высшие $\mathcal{N}$. Можно показать прямыми вычислениями в квантовой теории поля, что в $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперпространстве [34] вклады со вторыми производными (член Черна–Саймонса) в эффективное действие $\mathcal{N}=2$ калибровочной теории, генерируемые гипермультиплетом и духами, в точности взаимно уничтожаются друг с другом. Это взаимное уничтожение аналогично хорошо известному явлению в $3D$ (см. [35, 36]), где член Черна–Саймонса не может возникать как квантовая поправка к эффективному действию в суперсимметричных калибровочных теориях с $\mathcal{N}>2$.

Мы показываем в этом разделе, что вклад с производными калибровочного поля четвертого порядка, наоборот, имеет единственное гипермультиплетное пополнение, если потребовать инвариантности относительно неявной $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии на массовой поверхности наряду с явной $\mathcal{N}=1$ суперсимметрией вне массовой оболочки. Построение такого гипермультиплетного пополнения аналогично процедуре, предложенной в работе [13].

В разд. 4 рассмотрена проблема построения низкоэнергетического эффективного действия в $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричной калибровочной теории. Эта теория формулируется в $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ гармоническом суперпространстве как теория взаимодействующих суперполей $\mathcal{N}=(1,0)$ калибровочного мультиплета и гипермультиплета в присоединенном представлении калибровочной группы. Теория обладает явной $\mathcal{N}=(1,0)$ суперсимметрией и дополнительной скрытой $\mathcal{N}=(0,1)$ суперсимметрией. На массовой поверхности они в замыкании порождают полную $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметрию. Основываясь в основном на преобразованиях скрытой суперсимметрии, мы находим эффективное действие в секторе калибровочного мультиплета.

В разд. 5 перечислены основные результаты и обсуждаются некоторые возможные пути дальнейших применений.

2. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $4D$, $\mathcal{N}=4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Как известно, $4D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричная калибровочная теория связана с D3-бранами в теории суперструн (см., например, [5, 47]). Взаимодействие D3-бран описывается в абелевом бозонном секторе действием Борна–Инфельда, причем ведущая низкоэнергетическая поправка имеет схематический вид $\sim F^4/X^4$, где F^4 — структура четвертой степени по напряженности абелева поля F_{mn}, а X — норма скалярных полей $4D$, $\mathcal{N}=4$ калибровочного (векторного) мультиплета. Однопетлевое вычисление такого эффективного действия в кулоновской фазе $\mathcal{N}=4$ калибровочной теории (как в компонентном подходе, так и в $\mathcal{N}=1,2$ суперполях) выполнено в работах [11, 12, 27, 30, 37, 48, 49, 59, 60, 65, 68]. Полная $\mathcal{N}=4$ структура однопетлевого низкоэнергетического эффективного действия найдена в работах [13, 21]. Двухпетлевые вклады в низкоэнергетические эффективные действия данной теории рассматривались в работах [31, 56, 61]. Структура низкоэнергетического эффективного действия в смешанной кулоновско-хиггсовской фазе изучалась в работе [33]. Обзор результатов, связанных с расчетами низкоэнергетического эффективного действия в $4D$ расширенных суперсимметричных калибровочных теориях, дан в работах [10, 22].[2]

Изучение низкоэнергетического эффективного действия[3] $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса было инициировано в работе [39]. С точки зрения $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии $\mathcal{N}=4$ калибровочный мультиплет состоит из $\mathcal{N}=2$ калибровочного мультиплета и гипермультиплета. Авторы работы [39] изучали эффективное действие в $\mathcal{N}=4$ теории с калибровочной группой SU(2), спонтанно нарушенной до U(1), и рассмотрели ту его часть, которая зависит только от полей безмассового $\mathcal{N}=2$ калибровочного U(1)-мультиплета. Требование масштабной инвариантности и R-инвариантности фиксирует эту часть эффективного действия с точностью до числового коэффициента. Результат можно выразить через неголоморфный эффективный потенциал

$$\mathcal{H}(W,\overline{W}) = c\ln\frac{W}{\Lambda}\ln\frac{\overline{W}}{\Lambda}, \tag{2.1}$$

где W и $\overline{W}$ суть $\mathcal{N}=2$ суперполевые напряженности, Λ — произвольный масштаб, а c — произвольная действительная константа. Эффективное действие, определенное как интеграл от $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ по полному $\mathcal{N}=2$ суперпространству с координатами $z=(x^m,\theta_{\alpha i},\bar\theta^i_{\dot\alpha})$, не зависит от масштаба Λ. Подчеркнем, что результат (2.1) был получен в $\mathcal{N}=4$ теории полностью на симметрийной основе[4].

Выражение (2.1) задает *точное* низкоэнергетическое эффективное действие $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в секторе $\mathcal{N}=2$ калибровочного суперполя. Любые квантовые поправки содержатся в коэффициенте c. Можно показать [39, 65], что неголоморфный эффективный потенциал (2.1) обусловлен только однопетлевым вкладом. Ни высшие петли,

[2] Различные аспекты моделей в терминах $\mathcal{N}=2$ гармонических суперполей обсуждаются также в работах [2, 3, 25, 28, 29].

[3] Под низкоэнергетическим эффективным действием мы всегда подразумеваем низшую по внешним импульсам часть полного квантового эффективного действия.

[4] Неголоморфные потенциалы вида (2.1) как возможные вклады в эффективное действие в $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных теориях были ранее рассмотрены в работе [38].

ни непертурбативный анализ не могут дать вклад в $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ (2.1). В результате окончательное нахождение точного низкоэнергетического эффективного действия для SU(2)-теории в кулоновской ветви (т.е. с калибровочной группой SU(2), нарушенной до U(1)) сводится к вычислению коэффициента c в однопетлевом приближении.

Непосредственный вывод потенциала (2.1), вычисление коэффициента c и, следовательно, окончательное восстановление полного точного низкоэнергетического эффективного U(1)-действия в секторе калибровочного поля $\mathcal{N}=4$ квантовой калибровочной теории проведены в работах [27, 49, 68]. В частности, было найдено, что $c=(4\pi)^{-2}$. Дальнейшее изучение показало, что результат (2.1) для калибровочной группы SU(2), спонтанно нарушенной до U(1), можно обобщить на группу SU(N), нарушенную до ее максимальной абелевой подгруппы [11, 37, 48, 65]. Соответствующий неголоморфный эффективный потенциал задается выражением

$$\mathcal{H}(W,\overline{W}) = c\sum_{I<J}\ln\frac{W^I-W^J}{\Lambda}\ln\frac{\overline{W}^I-\overline{W}^J}{\Lambda} \qquad (2.2)$$

с тем же коэффициентом c, что и в (2.1). Здесь $I,J=1,2,\ldots,N$, $W=\sum_I W^I e_{II}$ принадлежит подалгебре Картана алгебры su(N), $\sum_I W^I=0$, а e_{IJ} — базис Вейля в алгебре su(N) (подробности можно найти в работе [11]).

2.1. Действие $\mathcal{N}=4$ калибровочной теории в $\mathcal{N}=2$ гармоническом суперпространстве. "Микроскопическое" действие $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, выраженное через $\mathcal{N}=2$ гармонические суперполя, записывается в виде

$$S[V^{++},q^+] = \frac{1}{8}\left(\int d^8\zeta_{\mathrm{L}}\,\mathrm{tr}\,W^2+\int d^8\zeta_{\mathrm{R}}\,\mathrm{tr}\,\overline{W}^2\right)-\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,\mathrm{tr}\,q^{+a}\bigl(D^{++}+igV^{++}\bigr)q^+_a. \qquad (2.3)$$

Вещественное аналитическое суперполе V^{++} является гармоническим калибровочным потенциалом $\mathcal{N}=2$ калибровочной теории, а аналитические суперполя q^+_a, $a=1,2$, описывают гипермультиплеты (они удовлетворяют условиям псевдовещественности $q^{+a}\equiv\widetilde{q}^{\,+}_a=\varepsilon^{ab}q^+_b$, где использовано обобщенное сопряжение $\sim$, введенное в работе [43]). $\mathcal{N}=2$ суперполевые напряженности W и $\overline{W}$ выражаются через V^{++}. Суперполя V^{++} и q^+_a принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы, g — константа связи, $d^8\zeta_{\mathrm{L}}=d^4x\,d^2\theta^+d^2\theta^-\,du$, $d^8\zeta_{\mathrm{R}}=d^4x\,d^2\overline{\theta}^+d^2\overline{\theta}^-\,du$ и $d\zeta^{(-4)}=d^4x\,d^2\theta^+d^2\overline{\theta}^-\,du$ — меры интегрирования по киральному, антикиральному и гармоническому аналитическому $\mathcal{N}=2$ суперпространствам, du — мера интегрирования по гармоническим переменным $u^{\pm i}$, $u^{+i}u^-_i=1$. Дальнейшие подробности, связанные с действием (2.3), в частности точный вид сохраняющей аналитичность гармонической производной D^{++}, можно найти в работах [43–46]. Мы в основном будем придерживаться обозначений, используемых в книге [46].

Каждый член в (2.3) является явно $\mathcal{N}=2$ суперсимметричным. Кроме того, действие (2.3) обладает дополнительной скрытой $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией, которая перемешивает суперполя W, $\overline{W}$ с q^+_a (см. [11, 44–46]). В результате рассматриваемая модель является $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной. Наша цель — исследовать возможность построения $\mathcal{N}=4$ суперсимметричных функционалов, у которых q^+-независимые части имели бы вид (2.1), (2.2).

В эффективные потенциалы (2.1) и (2.2) входят киральная и антикиральная абелевы напряженности W и $\overline{W}$, удовлетворяющие свободным классическим уравнениям движения $(D^+)^2W=(\overline{D}^+)^2\overline{W}=0$, где гармонические проекции спинорных $\mathcal{N}=2$ производных D^i_α, $\overline{D}^i_{\dot\alpha}$ определяются как $D^\pm_\alpha=D^i_\alpha u^\pm_i$, $\overline{D}^\pm_{\dot\alpha}=\overline{D}^i_{\dot\alpha}u^\pm_i$. Таким образом, чтобы построить указанные выше функционалы, нужно знать преобразования скрытых $\mathcal{N}=2$ суперсимметрий только для W, $\overline{W}$ на массовой поверхности и соответственно для q^{+a} ($D^{++}q^{+a}=0$) на массовой поверхности.

Для дальнейшего использования полезно выписать полный набор уравнений для введенных величин как на массовой поверхности, так и вне ее. *Вне массовой поверхности* имеем

$$\overline{D}^{\pm}_{\dot\alpha} W = D^{\pm}_{\alpha}\overline{W} = 0, \qquad (D^{\pm})^2 W = (\overline{D}^{\pm})^2\,\overline{W}, \qquad D^{+}_{\alpha} q^{+a} = \overline{D}^{+}_{\dot\alpha} q^{+a} = 0.$$

На массовой поверхности

$$(D^{\pm})^2 W = (\overline{D}^{\pm})^2\,\overline{W} = 0, \qquad D^{++} q^{+a} = D^{--} q^{-a} = 0,$$
$$q^{-a} \equiv D^{--} q^{+a}, \qquad D^{++} q^{-a} = q^{+a}, \qquad D^{-}_{\alpha} q^{-a} = \overline{D}^{-}_{\dot\alpha} q^{-a} = 0.$$

При проверке условий для гипермультиплетного суперполя на массовой поверхности существенно используется коммутационное соотношение $[D^{++}, D^{--}] = D^0$, где D^0 — оператор, который считает гармонические $U(1)$-заряды, $D^0 q^{\pm a} = \pm q^{\pm a}$.

Известно, что в центральном базисе гармонического суперпространства имеет место выражение

$$q^{\pm a} = q^{ia}(z) u^{\pm}_{i}, \tag{2.4}$$

где $q^{ia}(z)$ — суперполе гипермультиплета на массовой поверхности, которое не зависит от гармонических переменных и определено в стандартном $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве с координатами $z = (x^m, \theta_{\alpha i}, \bar\theta^{i}_{\dot\alpha})$. Заметим, что на массовой поверхности гармонические переменные в некоторой степени излишни, все можно сформулировать в терминах обычных $\mathcal{N} = 2$ суперполей $W(z)$, $\overline{W}(z)$, $q^{ia}(z)$. Однако использование языка гармонического суперпространства удобно, например, ввиду возможности интегрирования по частям по отношению к гармоническим производным в эффективном действии.

С учетом этих замечаний можно записать скрытые $\mathcal{N} = 2$ преобразования на массовой поверхности в виде [46]

$$\begin{aligned} &\delta W = \frac{1}{2}\bar\epsilon^{\dot\alpha a}\,\overline{D}^{-}_{\dot\alpha} q^{+}_{a}, && \delta\overline{W} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha a} D^{-}_{\alpha} q^{+}_{a},\\ &\delta q^{+}_{a} = \frac{1}{4}\big(\epsilon^{\beta}_{a} D^{+}_{\beta} W + \bar\epsilon^{\dot\alpha}_{a}\overline{D}^{+}_{\dot\alpha}\overline{W}\big), && \delta q^{-}_{a} = \frac{1}{4}\big(\epsilon^{\beta}_{a} D^{-}_{\beta} W + \bar\epsilon^{\dot\alpha}_{a}\overline{D}^{-}_{\dot\alpha}\overline{W}\big), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\epsilon^{\alpha a}$, $\bar\epsilon^{\dot\alpha a}$ — грассмановы параметры преобразований.

2.2. Эффективное действие в кулоновской фазе. Начнем с вычисления $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричного низкоэнергетического эффективного действия, расширяющего $\mathcal{N} = 2$ неголоморфный суперполевой потенциал (2.1). Предполагается, что это действие имеет следующий общий вид:

$$\Gamma[W,\overline{W},q^+] = \int d^{12}z\,du\big[\mathcal{H}(W,\overline{W}) + \mathcal{L}_q(W,\overline{W},q^+)\big] = \int d^{12}z\,du\,\mathcal{L}_{\text{eff}}(W,\overline{W},q^+). \tag{2.6}$$

Здесь $d^{12}z$ — мера интегрирования по полному $\mathcal{N} = 2$ суперпространству, $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ дается выражением (2.1) и $\mathcal{L}_q(W,\overline{W},q^+)$ — некоторая (пока неизвестная) функция, которая вместе с $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ должна гарантировать инвариантность функционала (2.6) по отношению к преобразованиям (2.5). Заметим, что лагранжиан $\mathcal{L}_q(W,\overline{W},q^+)$, будучи функцией суперполей на массовой поверхности, вообще не должен зависеть от гармоник $u^{\pm}_{i}$.

Первый член в (2.6) преобразуется под действием (2.5) следующим образом:

$$\delta\int d^{12}z\,du\,\mathcal{H}(W,\overline{W}) = \frac{1}{2}c\int d^{12}z\,du\,\frac{q^{+a}}{\overline{W}W}\big(\epsilon^{\alpha}_{a} D^{-}_{\alpha} W + \bar\epsilon^{\dot\alpha}_{a}\overline{D}^{-}_{\dot\alpha}\overline{W}\big). \tag{2.7}$$

Тогда член $\mathcal{L}_q(W,\overline{W},q^+)$ должен определяться из условия, что его вариация взаимно уничтожается с вариацией (2.7).

Введем величину

$$\mathcal{L}_q^{(1)} \equiv -c\,\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W} \tag{2.8}$$

и заметим, что она преобразуется следующим образом:

$$\delta\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W} = \frac{q^{+a}}{2\overline{W}W}\big(\epsilon_{\dot a}^{\alpha}D_\alpha^- W + \bar\epsilon_{\dot a}^{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\alpha}^-\overline{W}\big) + (q^{+a}q_a^-)\delta\bigg(\frac{1}{\overline{W}W}\bigg) + D^{--}\bigg(\frac{\delta q^{+a}q_a^+}{\overline{W}W}\bigg). \tag{2.9}$$

Затем рассмотрим

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} = \mathcal{H}(W,\overline{W}) - c\,\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W} = \mathcal{H}(W,\overline{W}) + \mathcal{L}_q^{(1)}. \tag{2.10}$$

Под знаком интеграла по полному гармоническому $\mathcal{N}=2$ суперпространству вариация (2.7) в $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)}$ взаимно уничтожается с первым членом в (2.9). Вариация выражения (2.10), порождаемая вторым членом в (2.9), остается. После ряда алгебраических преобразований ее можно свести к виду

$$\begin{aligned}\delta\int d^{12}z\,du\,\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} &= \frac{c}{2}\int d^{12}z\,du\,\frac{q^{+b}q_b^-}{(\overline{W}W)^2}\big(\overline{W}\bar\epsilon^{\dot\alpha a}\overline{D}_{\dot\alpha}^- q_a^+ + W\epsilon^{\alpha a}D_\alpha^- q_a^+\big) = \\ &= -\frac{c}{3}\int d^{12}z\,du\,\frac{q^{+b}q_b^-}{(\overline{W}W)^2}q^{+a}\big(\bar\epsilon_a^{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\alpha}^-\overline{W} + \epsilon_a^{\alpha}D_\alpha^- W\big),\end{aligned} \tag{2.11}$$

где мы проинтегрировали по частям и воспользовались соотношениями на и вне массовой поверхности для W, $\overline{W}$, $q_a^\pm$ вместе с циклическими тождествами для дублетных SU(2)-индексов.

Теперь рассмотрим величину

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} + \frac{c}{3}\bigg(\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W}\bigg)^2 \equiv \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} + \mathcal{L}_q^{(2)}, \tag{2.12}$$

где $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)}$ определяется выражением (2.10). Коэффициент в новом члене $\mathcal{L}_q^{(2)}$ выбран так, чтобы вариация числителя этого члена компенсировала вариацию (2.11). Остаток полной вариации члена $\mathcal{L}_q^{(2)}$ снова выживает, и, чтобы от него избавиться, нужно добавить соответствующий член $\mathcal{L}_q^{(3)}$ в $\mathcal{L}_q^{(1)} + \mathcal{L}_q^{(2)}$, и т.д.

Проведенное рассуждение означает, что зависящая от q^{+a} часть $\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_q(W,\overline{W},q^+)$ полного эффективного действия (2.6) должна иметь вид

$$\mathcal{L}_q = \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}_q^{(n)} = c\sum_{n=1}^{\infty}c_n\bigg(\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W}\bigg)^n \tag{2.13}$$

с некоторыми заранее неизвестными коэффициентами c_n. Мы уже определили $c_1 = -1$, $c_2 = 1/3$. Дальнейший анализ проводится индуктивно.

Рассмотрим два соседних члена в общем разложении (2.13)

$$c_{n-1}\bigg(\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W}\bigg)^{n-1} + c_n\bigg(\frac{q^{+a}q_a^-}{\overline{W}W}\bigg)^n \tag{2.14}$$

и предположим, что вариация числителя первого члена уже использована для устранения оставшейся части вариации предыдущего члена (под знаком интеграла по полному гармоническому суперпространству, как в (2.6)). Теперь перегруппируем остаток полной вариации первого члена, как в (2.11), и потребуем, чтобы эта часть уничтожалась вариацией числителя второго члена в (2.14). Это требование приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$c_n = -2\frac{(n-1)^2}{n(n+1)}c_{n-1}, \tag{2.15}$$

где $c_1 = -1$. Отсюда немедленно следует, что

$$c_n = \frac{(-2)^n}{n^2(n+1)}. \tag{2.16}$$

В результате приходим к окончательному выражению для лагранжиана $\mathcal{L}_q$:

$$\mathcal{L}_q(W,\overline{W},q^+) \equiv \mathcal{L}_q(X) = c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}X^n = c\left\{(X-1)\frac{\ln(1-X)}{X} + \bigl[\mathrm{Li}_2(X)-1\bigr]\right\}, \tag{2.17}$$

где $X = -2q^{+a}q^-_a/(\overline{W}W)$, а $\mathrm{Li}_2(X)$ — дилогарифм Эйлера. Отметим, что выражение для X не зависит от гармоник, поскольку гипермультиплет удовлетворяет соотношению (2.4), отвечающему массовой поверхности:

$$X = -\frac{q^{ia}q_{ia}}{\overline{W}W}. \tag{2.18}$$

Поэтому $\mathcal{L}_q(X)$ также не зависит от гармоник на массовой поверхности и интеграл по гармоникам в эффективном действии (2.6) можно опустить.

Таким образом, полное $\mathcal{N}=4$ суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие для $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой SU(2), спонтанно нарушенной до U(1), имеет вид

$$\Gamma[W,\overline{W},q^+] = \int d^{12}z\,\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}(W,\overline{W},q^+), \tag{2.19}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}(W,\overline{W},q^+) = \mathcal{H}(W,\overline{W}) + \mathcal{L}_q(X), \tag{2.20}$$

где $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ и $\mathcal{L}_q(X)$ заданы выражениями (2.1) и (2.17), а X — выражением (2.18).[5]

Выражение (2.17) является точным низкоэнергетическим результатом. Действительно, неголоморфный эффективный потенциал $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ (2.1) является точным, как обсуждалось в работе [39]. Лагранжиан $\mathcal{L}_q(X)$ (2.17) однозначно восстанавливается из (2.1) в силу $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии, и он единственный функционал, образующий вместе с $\mathcal{H}(W,\overline{W})$ инвариант $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии. Поэтому полный функционал (2.19), (2.20) является точным низкоэнергетическим эффективным действием рассматриваемой теории.

Теперь обратимся к компонентной структуре полного эффективного действия (2.19), (2.20). Рассмотрим только ее бозонную часть. Тогда

$$\begin{gathered} W = \varphi(x) + 4i\theta^+_{(\alpha}\theta^-_{\beta)}F^{(\alpha\beta)}(x), \qquad \overline{W} = \overline{\varphi}(x) + 4i\bar\theta^+_{(\dot\alpha}\bar\theta^-_{\dot\beta)}(x)\overline{F}^{(\dot\alpha\dot\beta)}(x), \qquad q^{ia} = f^{ia}(x), \\ D^+_\alpha D^-_\beta W = -4iF_{(\alpha\beta)}, \qquad \overline{D}^+_{\dot\alpha}\overline{D}^-_{\dot\beta}\overline{W} = 4i\overline{F}_{(\dot\alpha\dot\beta)}. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Здесь $\varphi(x)$ — комплексное скалярное поле $\mathcal{N}=2$ калибровочного мультиплета, $F^{\alpha\beta}(x)$ и $\overline{F}^{\dot\alpha\dot\beta}(x)$ — самодуальная и антисамодуальная составляющие напряженности абелева поля F_{mn}, а $f^{ia}(x)$ объединяет четыре скалярных поля гипермультиплета $q^{ia}(z)$. В бозонном пределе функциональный аргумент X (2.18) дается выражением

$$X\big|_{\theta=0} = -\frac{f^{ia}f_{ia}}{|\varphi|^2} \equiv X_0. \tag{2.22}$$

Поскольку нас интересует только ведущая часть разложения полного эффективного действия по внешним импульсам, мы можем опустить все x-производные входящих в действие полей.

[5] Функционал (2.19) содержит только квантовые поправки. Чтобы написать полное эффективное действие, к функционалу (2.19) нужно добавить классическое действие.

Компонентный вид эффективного действия (2.19) получается после интегрирования по грассмановым переменным θ. Простые вычисления приводят к удивительно простому результату для бозонного действия

$$\Gamma_{\mathrm{bos}} = 4c \int d^4x \, \frac{F^2 \overline{F}^2}{(|\varphi|^2 + f^{ia} f_{ia})^2}, \tag{2.23}$$

где $F^2 = F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, $\overline{F}^2 = \overline{F}^{\dot\alpha\dot\beta} \overline{F}_{\dot\alpha\dot\beta}$. Выражение в знаменателе есть не что иное, как SU(4)-инвариантный квадрат шести скалярных полей $\mathcal{N} = 4$ векторного мультиплета. После соответствующих переопределений его можно свести к явно SU(4)-инвариантному виду

$$|\varphi|^2 + f^{ia} f_{ia} \sim \phi^{AB} \overline{\phi}_{AB}, \qquad \phi^{AB} = -\phi^{BA}, \quad \overline{\phi}_{AB} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ABCD} \phi^{CD}, \quad A, B, C, D = 1, \ldots, 4.$$

Это указывает на то, что эффективное действие (2.19), кроме $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии, обладает также скрытой инвариантностью относительно группы R-симметрии $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{R}}$ рассматриваемой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии.

Результат (2.19) можно обобщить на теорию с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N)$, спонтанно нарушенной до максимального тора $[\mathrm{U}(1)]^{N-1}$. В этом случае эффективное действие дается общим выражением (2.17), где $\mathcal{H}(W, \overline{W})$ записывается в виде (2.2) и

$$\mathcal{L}_q(W, \overline{W}, q^+) = \sum_{I<J} \mathcal{L}_q^{IJ}(W, \overline{W}, q^+), \tag{2.24}$$

причем все слагаемые $\mathcal{L}_q^{IJ}$ имеют вид (2.17) с заменой X на

$$X_{IJ} = -2 \frac{q_{IJ}^{+a} q_{aIJ}^{-}}{W_{IJ} \overline{W}_{IJ}} = -\frac{q_{IJ}^{ia} q_{iaIJ}}{W_{IJ} \overline{W}_{IJ}}, \tag{2.25}$$

$$W_{IJ} = W^I - W^J, \qquad \overline{W}_{IJ} = \overline{W}^I - \overline{W}^J, \qquad q_{IJ}^{+a} = q_I^{+a} - q_J^{+a}. \tag{2.26}$$

Гипермультиплетные суперполя в кулоновской фазе записываются в виде $q^{+a} = \sum_I q_I^{+a} e_{II}$, $\sum_I q_I^{+a} = 0$, где e_{IJ} образуют базис Вейля в алгебре $\mathrm{su}(N)$. Эти гипермультиплетные суперполя принадлежат подалгебре Картана в $\mathrm{su}(N)$. Соответствующее бозонное эффективное действие представляется в виде суммы членов (2.23).

В заключение отметим, что функциональные аргументы X (2.18), (2.25) имеют нулевой дилатационный вес и являются скалярами группы R-симметрии U(1), поскольку $q^{\pm a}$ и W имеют один и тот же дилатационный вес [46] и $q^{\pm a}$ ведут себя как скаляры под действием группы R-симметрии. Поэтому можно предположить, что полное эффективное действие (2.19) и его $\mathrm{su}(N)$-аналог инвариантны относительно $\mathcal{N} = 2$ суперконформной симметрии, так же как и их зависящие только от W, $\overline{W}$ части (2.1) и (2.2) (см. [30]). Являясь также $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричными, эти действия обладают полной $\mathcal{N} = 4$ суперконформной симметрией (на массовой поверхности).

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $5D$, $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

В этом разделе изучается роль расширенной суперсимметрии при выводе низкоэнергетического эффективного действия в $5D$ суперкалибровочной теории. Эта теория представляет интерес с нескольких точек зрения. Она неперенормируема из-за наличия размерной константы связи g, $[g] = -1/2$. Тем не менее имеются аргументы в пользу того, что непертурбативное квантовое пополнение этой модели описывает $6D$, $\mathcal{N} = (2, 0)$ суперконформную теорию поля, компактифицированную на окружность [40, 62, 63]. В поддержку этой гипотезы говорят также результаты точных вычислений статистической суммы этой теории с помощью техники локализации (см., например, обзор [23] и цитируемую там литературу).

Несмотря на неперенормируемость $5D$, $\mathcal{N}=1$ калибровочной теории, изучение в ней однопетлевых квантовых поправок вполне оправдано, поскольку расходимости в нечетномерных теориях поля могут появляться (в размерной регуляризации) только в четных петлях. Однопетлевые вклады в эффективное действие $5D$, $\mathcal{N}=1$ калибровочной теории были вычислены в работах [34, 57] для калибровочной группы SU(2), спонтанно нарушенной до U(1). Ведущий вклад описывается $5D$ суперсимметричным членом Черна–Саймонса [57], а следующий после ведущего вклад имеет вид [34]

$$c_0 \int d^{5|8}z\, du\, W \ln \frac{W}{\Lambda}, \tag{3.1}$$

где W — напряженность $5D$, $\mathcal{N}=1$ абелева калибровочного суперполя, Λ — некоторый масштаб, $[\Lambda]=1$, а интегрирование ведется по всему $\mathcal{N}=1$ гармоническому суперпространству с мерой $d^{5|8}z\, du \equiv d^5x\, d^8\theta\, du$. Легко проверить, что действие (3.1) не зависит от Λ. Член Черна–Саймонса описывает квантовые вклады в эффективное действие со вторыми производными, а (3.1) является $\mathcal{N}=1$ суперполевым расширением члена с четырьмя производными типа “F^4/ϕ^3”.

Нашей целью является изучение ведущих вкладов в низкоэнергетическом эффективном действии $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперкалибровочной теории в гармоническом суперпространстве. Хотя эти вклады можно найти прямыми квантовыми вычислениями в $5D, \mathcal{N}=1$ суперпространстве, здесь мы определим их на симметрийной основе, построив $\mathcal{N}=2$ пополнение эффективного действия $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперкалибровочной теории соответствующими гипермультиплетными членами. Построенное эффективное действие соответствует кулоновской фазе $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперкалибровочной теории, в которой калибровочная группа нарушена до некоторой абелевой подгруппы (например, до максимального тора) и которая в общем случае включает в себя безмассовые абелевы $\mathcal{N}=2$ калибровочные мультиплеты со значениями в алгебре Ли этой подгруппы. Для простоты мы рассмотрим калибровочную группу SU(2) и только кратко упомянем (в п. 3.3) случай калибровочной симметрии SU(N).

Дополнительная мотивация для изучения квантового эффективного действия в рассматриваемой теории связана с теорией D-бран, как и в предыдущем примере $4D$, $\mathcal{N}=4$ теории. Классическое действие $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой U(N) можно интерпретировать как действие пучка N D4-бран, заданных на плоском пространстве-времени. Тогда $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное пополнение эффективного действия $5D, \mathcal{N}=1$ калибровочной теории можно отождествить с пополнением члена с четырьмя производными в низкоэнергетическом эффективном действии одной D4-браны на ($\mathrm{AdS}_6 \times S^4$)-фоне.

3.1. Классическое действие. Начнем с краткого описания $\mathcal{N}=1$ калибровочной модели и гипермультиплетной модели в $5D$ гармоническом суперпространстве. При этом будем придерживаться обозначений и соглашений, принятых в работах [34, 58].

$\mathcal{N}=2$ калибровочный мультиплет в $5D$, $\mathcal{N}=1$ гармоническом суперпространстве представляется парой аналитических суперполей (V^{++}, q^+_a), где V^{++} описывает $\mathcal{N}=1$ калибровочный мультиплет, а $q^+_a \equiv (q^+, -\overline{q}^+)$ — гипермультиплет. Классическое действие суперполя V^{++} записывается как интеграл по полному гармоническому суперпространству [80]

$$S_{\mathrm{YM}} = \frac{1}{2g^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \operatorname{tr} \int d^{5|8}z\, du_1 \ldots du_n \frac{V^{++}(z,u_1)\, V^{++}(z,u_2) \ldots V^{++}(z,u_n)}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+) \ldots (u_n^+ u_1^+)}, \tag{3.2}$$

где g — константа связи размерности $-1/2$. Уравнение движения для V^{++} имеет вид

$$(\mathcal{D}^+)^2 W = 0, \tag{3.3}$$

где $(\mathcal{D}^+)^2 \equiv \mathcal{D}^{+\widehat{\alpha}}\mathcal{D}^+_{\widehat{\alpha}}$ и W — суперполевая напряженность калибровочного $\mathcal{N}=1$ мультиплета,

$$W = \frac{i}{8}(\mathcal{D}^+)^2 V^{--}. \tag{3.4}$$

Неаналитическая связность V^{--} связана с V^{++} гармоническим условием нулевой кривизны

$$D^{++}V^{--} - D^{--}V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0. \tag{3.5}$$

Классическое действие гипермультиплета в присоединенном представлении калибровочной группы имеет вид [43–45]

$$S_q = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}\int d\zeta^{(-4)}\, q^+_a \mathcal{D}^{++} q^{+a}, \tag{3.6}$$

где $d\zeta^{(-4)}$ — мера интегрирования по аналитическому суперпространству, а $\mathcal{D}^{++} = D^{++} + iV^{++}$ — калибровочно ковариантная гармоническая производная. Уравнение движения для q^+_a имеет вид

$$\mathcal{D}^{++} q^+_a = 0. \tag{3.7}$$

Действие $\mathcal{N}=2$ калибровочного мультиплета в $\mathcal{N}=1$ гармоническом суперпространстве есть просто сумма (3.2) и (3.6),

$$S^{\mathcal{N}=2} = S_{\mathrm{YM}} + S_q. \tag{3.8}$$

Это действие инвариантно относительно преобразований неявной $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии

$$\delta q^+_a = -\frac{1}{2}(D^+)^4\big[\epsilon_{a\widehat{\alpha}}\theta^{-\widehat{\alpha}}V^{--}\big], \qquad \delta V^{++} = \epsilon^a_{\widehat{\alpha}}\theta^{+\widehat{\alpha}} q^+_a, \tag{3.9}$$

где $\epsilon^a_{\widehat{\alpha}}$ — соответствующий антикоммутирующий параметр. Хотя уравнение (3.3) при переходе к полному действию (3.8) модифицируется за счет вклада гипермультиплета в правую часть, оно не изменяется для интересующих нас безмассовых абелевых суперполей со значениями в подалгебре Картана. В абелевом случае уравнения движения для $\mathcal{N}=1$ калибровочного мультиплета (3.3) и гипермультиплета (3.7) принимают более простой вид

$$(D^+)^2 W = 0, \qquad D^{++} q^+_a = 0. \tag{3.10}$$

Можно показать, что преобразования неявной суперсимметрии (3.9) на этих уравнениях сводятся к виду

$$\delta q^{\pm}_a = \frac{i}{2}\epsilon^{\widehat{\alpha}}_a\big(D^{\pm}_{\widehat{\alpha}} W\big), \qquad \delta W = -\frac{i}{8}\epsilon^a_{\widehat{\alpha}} D^{-\widehat{\alpha}} q^+_a + \frac{i}{8}\epsilon^a_{\widehat{\alpha}} D^{+\widehat{\alpha}} q^-_a. \tag{3.11}$$

3.2. $\mathcal{N}=2$ эффективное действие. В этом пункте мы построим полное низкоэнергетическое эффективное действие в $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой SU(2), содержащее зависимость как от $\mathcal{N}=1$ калибровочного мультиплета, так и от гипермультиплета.

Та часть суперполевого эффективного действия $\mathcal{N}=1$ векторного мультиплета, которая содержит в бозонном секторе члены с четырьмя производными, имеет вид [34]

$$S_0 = c_0 \int d^{5|8}z\, du\, W \ln\frac{W}{\Lambda}, \tag{3.12}$$

где W — напряженность абелева калибровочного суперполя, Λ — масштабный параметр, c_0 — безразмерная константа и интегрирование выполняется по полному $\mathcal{N}=1$ гармоническому суперпространству с мерой $d^{5|8}z\,du \equiv d^5x\,d^8\theta\,du$. Представление (3.4) приводит к соотношению $\int d^{5|8}z\,du\,W = 0$, поэтому действие (3.12) не зависит от масштаба Λ, $dS_0/d\Lambda = 0$.

Точное значение константы c_0 в эффективном действии (3.12) зависит от представления калибровочной группы, которому принадлежит гипермультиплет [34]. Здесь мы не будем фиксировать эту константу и построим $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное обобщение для (4.1), предполагая c_0 произвольной. Это построение в общем повторяет рассмотрение, проведенное в работе [13] (и предыдущем разд. 2).

Вариацию действия (3.12) при преобразованиях скрытой симметрии (3.11) можно представить в виде

$$\delta S_0 = \frac{ic_0}{4}\int d^{5|8}z\,du\,\epsilon^a_{\widehat{\alpha}}\,q^+_a\,\frac{D^{-\widehat{\alpha}}W}{W}. \tag{3.13}$$

При выводе этого выражения мы воспользовались абелевым аналогом соотношений (3.4), (3.5), уравнением движения (3.10) и выполнили интегрирование по частям по отношению к гармоническим и ковариантным спинорным производным.

Вариацию (3.13) можно частично устранить вариацией добавки к действию

$$S_1 = c_1\int d^{5|8}z\,du\,\frac{q^{+a}q^-_a}{W}, \tag{3.14}$$

где коэффициент c_1 будет определен ниже. Вариация этого члена с учетом (3.11) имеет вид

$$\delta S_1 = ic_1\int d^{5|8}z\,du\,\frac{q^{+a}\epsilon^{\widehat{\alpha}}_a(D^-_{\widehat{\alpha}}W)}{W} - \frac{i}{8}c_1\int d^{5|8}z\,du\,\frac{q^{+a}q^-_a}{W^2}\big(\epsilon^b_{\widehat{\alpha}}D^{+\widehat{\alpha}}q^-_b - \epsilon^b_{\widehat{\alpha}}D^{-\widehat{\alpha}}q^+_b\big). \tag{3.15}$$

Первый член в правой части равенства (3.15) устраняет вариацию (3.13) при условии

$$c_1 = -\frac{c_0}{4}, \tag{3.16}$$

тогда как последний член в (3.15) можно представить в виде

$$\delta(S_0+S_1) = -\frac{ic_0}{12}\int d^{5|8}z\,du\,\frac{q^{+a}q^-_a}{W^3}\epsilon^b_{\widehat{\alpha}}\,q^+_b\,D^{-\widehat{\alpha}}W. \tag{3.17}$$

Чтобы компенсировать это выражение, необходимо добавить новый член

$$S_2 = c_2\int d^{5|8}z\,du\,\frac{(q^{+a}q^-_a)^2}{W^3}, \qquad c_2 = \frac{c_0}{24}. \tag{3.18}$$

Вместо вычисления вариации члена (3.18) перейдем сразу к общему случаю и будем искать полное $\mathcal{N}=2$ эффективное действие в виде

$$S^{\mathcal{N}=2}_{\text{eff}} = \int d^{5|8}z\,du\left[c_0W\ln\frac{W}{\Lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{(q^{+a}q^-_a)^n}{W^{2n-1}}\right] \tag{3.19}$$

с неопределенными коэффициентами c_n. Выделим два соседних члена в выражении (3.19)

$$c_n\frac{(q^{+a}q^-_a)^n}{W^{2n-1}} + c_{n+1}\frac{(q^{+a}q^-_a)^{n+1}}{W^{2n+1}}. \tag{3.20}$$

Можно показать, что вариация знаменателя в первом члене компенсирует вариацию числителя во втором, если коэффициенты связаны следующим образом:

$$(n+1)c_{n+1} = -c_n\frac{n(2n-1)}{n+2}. \tag{3.21}$$

Из этого рекуррентного соотношения с учетом условия (3.16) можно найти общее выражение для коэффициентов

$$c_n = \frac{(-1)^n(2n-2)!}{2^n\,n!\,(n+1)!}c_0. \tag{3.22}$$

Теперь можно просуммировать ряд в (3.19) и представить эффективное действие в замкнутом виде

$$S_{\mathrm{eff}}^{\mathcal{N}=2} = c_0 \int d^{5|8}z\, du\, W\left[\ln\frac{W}{\Lambda} + \frac{1}{2}H(Z)\right], \tag{3.23}$$

где

$$Z \equiv \frac{q^{+a}q_a^-}{W^2} \tag{3.24}$$

и

$$H(Z) = 1 + 2\ln\frac{1+\sqrt{1+2Z}}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+\sqrt{1+2Z}} - \frac{4}{3}\sqrt{1+2Z}. \tag{3.25}$$

Легко проверить, что $H(0) = 0$, $H'(0) = -1/2$ в соответствии с (3.22). Результат (3.23) был получен в работе [24].

Действие (3.23) является $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричным расширением эффективного действия (3.12). Было бы интересно воспроизвести этот результат с помощью пертурбативных квантовых вычислений в $5D$ гармоническом суперпространстве, как это было сделано для случая $4D$, $\mathcal{N} = 4$ в работах [1, 21, 32].

Следует отметить, что член (3.1), с которого мы начали (а также его аналоги для калибровочных групп высшего ранга), может возникнуть в квантовой теории только как однопетлевая квантовая поправка к эффективному действию. Действительно, он является масштабно инвариантным и, таким образом, не зависит от калибровочной константы связи g. С другой стороны, в рамках метода фонового поля в гармоническом суперпространстве [12, 34] все многопетлевые фейнмановские графы включают в себя вершины калибровочных суперполей с константой связи g. Таким образом, все многопетлевые квантовые вклады в эффективное действие не являются масштабно инвариантными и поэтому не могут повлиять на вид коэффициента c_0 в уравнении (3.1). Однако, в отличие от случая $4D$, этот коэффициент не защищен от непертурбативных поправок. Учет таких поправок требует специального изучения.

Этот результат можно непосредственно обобщить на калибровочную группу более высокого ранга. Например, для калибровочной группы $\mathrm{SU}(N)$, спонтанно нарушенной до максимального тора $[\mathrm{U}(1)]^{N-1}$, получим

$$S_{\mathrm{eff}}^{\mathcal{N}=2} = c_0 \sum_{I<J}^{N} \int d^{5|8}z\, du\, W_{IJ}\left[\ln\frac{W_{IJ}}{\Lambda} + \frac{1}{2}H(Z_{IJ})\right], \tag{3.26}$$

где $Z_{IJ} = (q^{+a})_{IJ}(q_a^-)_{IJ}/W_{IJ}^2$ и $W_{IJ} = W_I - W_J$, $(q^{\pm a})_{IJ} = q_I^{\pm a} - q_J^{\pm a}$. Суперполя W_I и $q_I^{\pm a}$ подчиняются связям $\sum_I W_I = 0$, $\sum_I q_I^{\pm a} = 0$ и принадлежат подалгебре Картана алгебры $\mathrm{su}(N)$. Функция $H(Z_{IJ})$ задается выражением (3.25) для любого аргумента Z_{IJ}.

3.3. Компонентная структура. Рассмотрим бозонный сектор найденного эффективного действия (3.23) и покажем, как возникает вклад с четырьмя производными F^4/ϕ^3. Для этого достаточно рассмотреть следующее компонентное разложение входящих в действие суперполей с опущенными фермионными полями:

$$q^+ = f^i(x)u_i^+, \qquad \overline{q}^+ = -\overline{f}^i(x)u_i^+, \tag{3.27}$$

$$W = \sqrt{2}\phi(x) - 2i\theta^{+\widehat{\alpha}}\theta^{-\widehat{\beta}}F_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(x). \tag{3.28}$$

Здесь $\overline{\phi} = \phi$, $\overline{f^i} = \overline{f}_i$ — скалярные поля, а $F_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} = F_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}$ — напряженность абелева векторного поля.

Подставляя (3.28) в первый член выражения (3.23), получим

$$S_0 = c_0 \frac{\sqrt{2}}{3} \int d^{5|8}z \, \frac{\left(\theta^{+\widehat{\alpha}}\theta^{-\widehat{\beta}}F_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\right)^4}{\phi^3} = \frac{c_0}{4\sqrt{2}} \int d^{5|8}z \, \frac{\det F}{\phi^3} (\theta^+)^2(\theta^+)^2(\theta^-)^2(\theta^-)^2, \tag{3.29}$$

где $\det F = (1/4!)\varepsilon^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{\delta}}\varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}F_{\widehat{\alpha}\widehat{\mu}}F_{\widehat{\beta}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\gamma}\widehat{\rho}}F_{\widehat{\delta}\widehat{\sigma}}$ и $(\theta^\pm)^2 = \theta^{\pm\widehat{\alpha}}\theta^\pm_{\widehat{\alpha}}$. Интегрируя по грассмановым переменным согласно правилу

$$\int d^{5|8}z \, (\theta^+)^2(\theta^+)^2(\theta^-)^2(\theta^-)^2 f(x) = 4 \int d^5x \, f(x) \tag{3.30}$$

для функции $f(x)$, мы приходим к следующей компонентной форме действия в бозонном секторе (3.29):

$$S_0 = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \int d^5x \, \frac{\det F}{\phi^3}. \tag{3.31}$$

Аналогичным образом можно проинтегрировать по грассмановым переменным в последнем члене в (3.23). Получим

$$\int d^{5|8}z \, W H(Z) = \sqrt{2} \int d^5x \, \frac{\det F}{\phi^3} \left[4z^4 H^{(4)}(z) + 28z^3 H'''(z) + 39z^2 H''(z) + 6zH'(z)\right], \tag{3.32}$$

где

$$z \equiv Z\big|_{\theta=0} = \frac{f^i \bar{f}_i}{\phi^2}. \tag{3.33}$$

Подставляя функцию (3.25) в (3.32), найдем

$$\frac{c_0}{2} \int d^{5|8}z \, W H(Z) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \int d^5x \, \frac{\det F}{(\phi^2 + f^i \bar{f}_i)^{3/2}} - \frac{c_0}{\sqrt{2}} \int d^5x \, \frac{\det F}{\phi^3}. \tag{3.34}$$

Последний член в точности взаимно уничтожается с (3.31). В результате полный вклад, содержащий члены типа F^4/ϕ^3 в компонентной форме эффективного действия (3.23), сводится к выражению

$$S^{\mathcal{N}=2}_{\text{eff}} = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \int d^5x \, \frac{\det F}{(\phi^2 + f^i \bar{f}_i)^{3/2}} + \ldots, \tag{3.35}$$

где многоточием обозначены оставшиеся члены. Интересно отметить, что скалярные поля появляются в знаменателе выражения (3.35) только в SO(5)-инвариантной комбинации. Это не столь очевидно заранее, поскольку поле ϕ происходит из $\mathcal{N} = 1$ калибровочного мультиплета, а f^i, $\bar{f}_i$ — из гипермультиплета. В случае теории с SU(N)-группой (3.26) бозонное эффективное действие $S^{\mathcal{N}=2}_{\text{eff}}$ представляется суммой соответствующих членов типа (3.35).

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $6D$, $\mathcal{N} = (1,1)$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Другой интересный класс протяженных объектов в теории суперструн/бран представлен D5-бранами (см., например, [5, 47]). Эти объекты связаны с $6D$, $\mathcal{N} = (1,1)$ калибровочной теорией подобно тому, как D3-браны связаны с $4D$, $\mathcal{N} = 4$ калибровочной теорией. Как и в случае D3-бран, взаимодействие D5-бран описывается $6D$ действием Борна–Инфельда [76] (различные аспекты действия Борна–Инфельда в разных размерностях обсуждаются, например, в работах [4, 41, 50] и цитируемой там литературе). Поскольку D5-брана связана с $6D$, $\mathcal{N} = (1,1)$ калибровочной теорией, естественно ожидать, что взаимодействие D5-бран в низкоэнергетическом пределе можно описать исходя из низкоэнергетического квантового эффективного действия этой теории.

В этом разделе мы рассмотрим квантовые аспекты $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Это максимально расширенная суперсимметричная калибровочная теория в шести измерениях с восемью левыми и восемью правыми суперзарядами. Равное число спиноров с взаимно противоположными киральностями гарантирует отсутствие киральной аномалии в этой теории. С точки зрения $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ суперсимметрии рассматриваемая модель строится на калибровочных (векторных) мультиплетах и гипермультиплетах. Соответственно ее бозонный сектор включает в себя вещественное $6D$ калибровочное поле и два комплексных (или четыре вещественных) скалярных поля.

Хотя неабелева $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ калибровочная теория неперенормируема по индексу, она конечна на массовой поверхности в одно- и двухпетлевом приближениях [6–8, 42, 51, 52, 66, 67]. Более того, недавно было показано, что эта теория в однопетлевом приближении конечна даже вне массовой поверхности [16–18] и что двухпетлевые диаграммы с гипермультиплетными внешними линиями также конечны вне массовой поверхности [19]. Обзор нашего подхода представлен в работе [20].

Чтобы сохранить как можно больше явных суперсимметрий, мы используем подход гармонического суперпространства [43, 46]. Рассматриваемая теория формулируется в терминах $\mathcal{N}=(1,0)$ гармонических суперполей, описывающих калибровочный мультиплет и гипермультиплет. Такая теория обладает явной $\mathcal{N}=(1,0)$ суперсимметрией и, кроме того, неявной (скрытой) $\mathcal{N}=(0,1)$ суперсимметрией, смешивающей $\mathcal{N}=(1,0)$ калибровочный мультиплет и гипермультиплет. Эти суперсимметрии замыкаются на полную $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметрию на массовой поверхности. Соответствующая формулировка $\mathcal{N}=(1,1)$ теории подробно описана в работе [9] (см. также [53, 79]). Существенным отличием нашего рассмотрения является использование так называемой “ω-формы” гипермультиплета (см. далее).

Мы изучаем случай, когда калибровочная симметрия $\mathrm{SU}(N)$ нарушена до $\mathrm{SU}(N-1)\times\times\,\mathrm{U}(1)\subset\mathrm{SU}(N)$. Технически это означает, что фоновые суперполя расположены вдоль фиксированного генератора картановской подалгебры алгебры $\mathrm{su}(N)$, которая соответствует абелевой подгруппе $\mathrm{U}(1)$. В этом случае эффективное действие теории зависит только от абелевых калибровочного мультиплета и гипермультиплета. В бозонном секторе эффективного действия содержатся одно вещественное калибровочное $\mathrm{U}(1)$-поле и четыре вещественных скалярных поля. То же число бозонных степеней свободы на мировой поверхности соответствует одной D5-бране в шести измерениях [70].

4.1. $6D,\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричная теория Янга–Миллса в $\mathcal{N}=(1,0)$ гармонической формулировке с ω-гипермультиплетом. Начнем с формулировки $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ калибровочной теории в терминах $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ гармонических аналитических суперполей V^{++} и ω, описывающих калибровочный мультиплет и гипермультиплет. Действие рассматриваемой теории имеет вид

$$S_0[V^{++},q^+]=\frac{1}{\mathrm{f}^2}\Biggl\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n}\,\mathrm{tr}\int d^{14}z\,du_1\dots du_n\,\frac{V^{++}(z,u_1)\dots V^{++}(z,u_n)}{(u_1^+u_2^+)\dots(u_n^+u_1^+)}-{}$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\int d\zeta^{(-4)}\,\nabla^{++}\omega\,\nabla^{++}\omega\Biggr\},\tag{4.1}$$

где f — размерная константа связи ([f] $=-1$), а мера интегрирования по аналитическому подпространству $d\zeta^{(-4)}$ включает в себя интегрирование по гармоникам, $d\zeta^{(-4)}=d^6x_{(\mathrm{an})}\,du\,(D^-)^4$. Оба суперполя V^{++} и ω принимают значения в присоединенном представлении калибровочной группы. Ковариантная гармоническая производная ∇^{++} действует на ω-гипермультиплет как

$$\nabla^{++}\omega=D^{++}\omega+i[V^{++},\omega].\tag{4.2}$$

Действие (4.1) инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований

$$\delta V^{++} = -\nabla^{++}\Lambda, \qquad \delta\omega = i[\Lambda, \omega], \tag{4.3}$$

где $\Lambda(\zeta, u) = \widetilde{\Lambda}(\zeta, u)$ — вещественный аналитический калибровочный параметр.

Кроме аналитической калибровочной связности V^{++}, введем неаналитическую связность V^{--} (см. [46]), которая является решением уравнения нулевой кривизны (3.5). Используя V^{--}, определим еще одну ковариантную гармоническую производную $\nabla^{--} = D^{--} + iV^{--}$ и напряженность $\mathcal{N} = (1,0)$ калибровочного суперполя

$$W^{+a} = -\frac{i}{6}\varepsilon^{abcd} D_b^+ D_c^+ D_d^+ V^{--}, \tag{4.4}$$

обладающую полезными свойствами вне массовой поверхности:

$$\nabla^{++} W^{+a} = \nabla^{--} W^{-a} = 0, \qquad W^{-a} = \nabla^{--} W^{+a}. \tag{4.5}$$

Вводя аналитическое суперполе F^{++},

$$F^{++} = \frac{1}{4} D_a^+ W^{+a} = i(D^+)^4 V^{--}, \qquad D_a^+ F^{++} = \nabla^{++} F^{++} = 0, \tag{4.6}$$

запишем классические уравнения движения, соответствующие действию (4.1), в виде

$$F^{++} + [\omega, \nabla^{++}\omega] = 0, \qquad (\nabla^{++})^2 \omega = 0. \tag{4.7}$$

$\mathcal{N} = (1,0)$ суперполевое действие (4.1) обладает дополнительной $\mathcal{N} = (0,1)$ суперсимметрией

$$\delta V^{++} = (\epsilon^{+A} u_A^+)\omega - (\epsilon^{+A} u_A^-)\nabla^{++}\omega = 2(\epsilon^{+A} u_A^+)\omega - \nabla^{++}\big((\epsilon^{+A} u_A^-)\omega\big), \tag{4.8}$$

$$\delta\omega = -(D^+)^4\big((\epsilon^{-A} u_A^-) V^{--}\big) = i(\epsilon^{-A} u_A^-) F^{++} - i(\epsilon_a^A u_A^-)\, W^{+a}, \tag{4.9}$$

где $A = 1, 2$ — дублетный индекс SU(2)-группы Паули–Гюрши. Чтобы проверить эту инвариантность, выведем, используя (4.8) и (4.9), $\mathcal{N} = (0,1)$ закон преобразования производной $\nabla^{++}\omega$:

$$\delta(\nabla^{++}\omega) = i\big((\epsilon^{-A} u_A^+) + (\epsilon^{+A} u_A^-)\big) F^{++} - i(\epsilon_a^A u_A^+)\, W^{+a} + i(\epsilon^{+A} u_A^-)[\omega, \nabla^{++}\omega]. \tag{4.10}$$

Затем проварьируем классическое действие (4.1) по (4.8) и (4.10):

$$\delta S = \frac{1}{\mathrm{f}^2}\bigg\{\mathrm{tr}\int d^{14}z\, du\, V^{--}\delta V^{++} - \mathrm{tr}\int d\zeta^{(-4)}\, \nabla^{++}\omega\, \delta(\nabla^{++}\omega)\bigg\}. \tag{4.11}$$

В первом интеграле перейдем к интегрированию по аналитическому подпространству и воспользуемся явным видом вариаций (4.8) и (4.10):

$$\delta S = -\frac{i}{\mathrm{f}^2}\,\mathrm{tr}\int d\zeta^{(-4)}\Big\{2F^{++}(\epsilon^{+A} u_A^+)\omega + \nabla^{++}\omega\big((\epsilon^{-A} u_A^+) + (\epsilon^{+A} u_A^-)\big)F^{++} - \\ - F^{++}\nabla^{++}\big((\epsilon^{+A} u_A^-)\omega\big) - \epsilon_a^A u_A^+\, \nabla^{++}\omega\, W^{+a}\Big\} = 0. \tag{4.12}$$

Последние два члена в (4.12) — полные гармонические производные ∇^{++} в силу свойств суперполей F^{++} и W^{+a}, и поэтому они обращаются в нуль при интегрировании по аналитической мере $d\zeta^{(-4)}$. Первые два члена взаимно уничтожаются после интегрирования по частям по отношению к гармонической производной ∇^{++} с использованием свойств $\nabla^{++}\epsilon^{-A} = \epsilon^{-A}$ и $\nabla^{++}u^-_A = u^+_A$. Наконец, член $\mathrm{tr}(\nabla^{++}\omega[\omega, \nabla^{++}\omega])$ обращается в нуль из-за циклического свойства следа.

Уравнение нулевой кривизны (3.5) позволяет выразить преобразование неаналитической калибровочной связности δV^{--} через преобразование δV^{++} в виде соотношения

$$\nabla^{++}\delta V^{--} - \nabla^{--}\delta V^{++} = 0 \tag{4.13}$$

и найти закон преобразования напряженности W^{+a} относительно скрытой суперсимметрии

$$\delta W^{+a} = \varepsilon^{adbc}\epsilon^A_d\nabla_{bc}\big(u^+_A\omega - u^-_A\nabla^{++}\omega\big) + i\epsilon^{-A}\big[W^{+a}, u^+_A\omega - u^-_A\nabla^{++}\omega\big], \tag{4.14}$$

где

$$\nabla_{bc} = \partial_{bc} - \frac{1}{2}D^+_b D^+_c V^{--}. \tag{4.15}$$

Как и раньше, для построения эффективного действия воспользуемся методом фонового суперполя. Предполагается, что калибровочной группой теории (4.1) является $\mathrm{SU}(N)$. Для дальнейшего рассмотрения мы также предположим, что фоновые суперполя $\mathbf{V}^{++}$ и $\mathbf{\Omega}$ принадлежат фиксированному направлению в подалгебре Картана алгебры $\mathrm{su}(N)$:

$$\mathbf{V}^{++} = V^{++}(\zeta, u)H, \qquad \mathbf{\Omega} = \Omega(\zeta, u)H, \tag{4.16}$$

где H — фиксированный генератор подалгебры Картана, порождающий некоторую абелеву подгруппу $\mathrm{U}(1)$. Наш выбор фона соответствует спонтанному нарушению симметрии $\mathrm{SU}(N) \to \to \mathrm{SU}(N-1) \times \mathrm{U}(1)$. Следует отметить, что пара фоновых суперполей (V^{++}, Ω) образует абелев векторный $\mathcal{N} = (1,1)$ мультиплет, который в бозонном секторе содержит одно вещественное векторное поле $A_M(x)$ и четыре вещественных скаляра $\phi(x)$ и $\phi^{(ij)}(x)$, $i,j = 1,2$, где ϕ и $\phi^{(ij)}$ — скалярные компоненты гипермультиплета Ω (см. [46]). Абелево векторное поле и четыре скаляра в шестимерном пространстве-времени как раз составляют бозонные степени свободы D5-браны на мировой поверхности [5, 47].

Классические уравнения движения (4.7) для фоновых суперполей V^{++} и Ω имеют вид

$$F^{++} = 0, \qquad (D^{++})^2\Omega = 0. \tag{4.17}$$

Далее предположим, что фоновые суперполя являются решениями классических уравнений движения (4.17). Рассмотрим также фон, медленно меняющийся в пространстве-времени, т.е.

$$\partial_M W^{+a} = 0, \qquad \partial_M\Omega = 0. \tag{4.18}$$

Таким образом, в качестве фоновых суперполей мы используем абелевы аналитические суперполя V^{++} и Ω, удовлетворяющие классическому уравнению движения (4.17) и условиям (4.18). При таких предположениях напряженность калибровочного суперполя W^{+a} является аналитической[6], $D^+_a W^{+b} = \delta^b_a F^{++} = 0$. В дальнейшем анализе будем использовать $\mathcal{N} = (0,1)$ преобразование для напряженности калибровочного суперполя W^{+a} (4.14). В случае медленно меняющихся абелевых фоновых суперполей на массовой поверхности преобразования скрытой $\mathcal{N} = (0,1)$ суперсимметрии (4.9) и (4.14) принимают очень простой вид

$$\delta\Omega = -i(\epsilon^A_a u^-_A)W^{+a}, \qquad \delta W^{+a} = 0. \tag{4.19}$$

[6] В общем случае это не так и $F^{++} \neq 0$.

Эти трансформационные законы следуют из абелевых версий преобразований (4.9), (4.14), в которых необходимо учесть условия (4.18) и (4.17). Заметим, что эти условия сами по себе ковариантны относительно $\mathcal{N}=(0,1)$ суперсимметрии.

4.2. Эффективное действие со скрытой $\mathcal{N}=(0,1)$ суперсимметрией. Рассмотрим теперь простейшие $\mathcal{N}=(1,1)$ инварианты, которые можно построить из абелевых аналитических суперполей W^{+a} и Ω в предположениях (4.17) и (4.18). Очевидно, что калибровочно инвариантное действие

$$I=\mathrm{f}^2\int d\zeta^{(-4)}\,(W^+)^4\mathcal{F}(\mathrm{f}\,\Omega), \tag{4.20}$$

где $(W^+)^4=-(1/24)\varepsilon_{abcd}W^{+a}W^{+b}W^{+c}W^{+d}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{f}\,\Omega)$ — произвольная функция от Ω, инвариантно относительно преобразования (4.19) благодаря условию нильпотентности $(W^+)^5\equiv 0$. Для дальнейшего рассмотрения основной интерес представляет выбор

$$I_1=c\int d\zeta^{(-4)}\,\frac{(W^+)^4}{\Omega^2}, \tag{4.21}$$

соответствующий выбору $\mathcal{F}=1/(\mathrm{f}^2\Omega^2)$ в (4.20). Коэффициент c в (4.21) не может быть фиксирован только на симметрийной основе, здесь уже требуется квантово-полевое рассмотрение [15]. То же самое относится и к специальному выбору функции $\mathcal{F}(\mathrm{f}\,\Omega)$.

В результате непосредственных квантово-полевых вычислений [15] мы приходим к следующему выражению для однопетлевого низкоэнергетического эффективного действия:

$$\Gamma^{(1)}_{\mathrm{lead}}=\frac{N-1}{(4\pi)^3}\int d\zeta^{(-4)}\,\frac{(W^+)^4}{\Omega^2}. \tag{4.22}$$

Как ожидалось, главным низкоэнергетическим вкладом (4.22) в эффективное действие в модели (4.1) является как раз $\mathcal{N}=(1,1)$ инвариант I_1 (4.21). Коэффициент c вычисляется и имеет вид [15]

$$c=\frac{N-1}{(4\pi)^3}. \tag{4.23}$$

Выражение для c аналогично соответствующему выражению в четырехмерной $\mathcal{N}=4$ калибровочной теории (см., например, [56] и цитируемую там литературу). В бозонном секторе эффективное действие (4.22) имеет структуру

$$\Gamma^{(1)}_{\mathrm{bos}}\sim\int d^6x\,\frac{F^4}{\phi^2}\left(1+\frac{\phi^{(ij)}\phi_{(ij)}}{\phi^2}+\ldots\right), \tag{4.24}$$

где $F^4=F_{MN}F^{MN}F_{PQ}F^{PQ}-4F^{NM}F_{MR}F^{RS}F_{SN}$, а F_{MN} — напряженность абелева калибровочного поля.

Следует отметить, что даже в однопетлевом приближении могут появляться более сложные вклады в эффективное действие, учет которых, однако, остается за пределами нашего анализа. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в другой работе.

5. ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В настоящей работе представлен обзор подхода к построению низкоэнергетического эффективного действия для калибровочных теорий с расширенной суперсимметрией и для теорий в высших размерностях на основе скрытой суперсимметрии. Рассмотрены $4D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричные, $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметричные и $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ суперсимметричные теории Янга–Миллса, сформулированные в терминах гармонических суперполей. Все эти теории характеризуются некоторым числом явных суперсимметрий вне массовой поверхности и некоторым числом скрытых суперсимметрий на массовой поверхности. Полная суперсимметрия данной теории есть объединение явных и скрытых суперсимметрий. Низкоэнергетические эффективные действия выведены исходя из чисто алгебраических рассуждений в общем виде с точностью до числовых коэффициентов. Фиксация таких коэффициентов требует дальнейших квантово-полевых вычислений. Описанный подход полностью реализован для всех трех рассмотренных теорий.

В $4D$, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной $\mathrm{SU}(N)$-теории Янга–Миллса мы начали с известного $\mathcal{N}=2$ суперсимметричного неголоморфного эффективного потенциала в секторе калибровочного мультиплета и, используя преобразования скрытой суперсимметрии, дополнили его гипермультиплетными членами до полного $\mathcal{N}=4$ суперсимметричного низкоэнергетического эффективного потенциала в кулоновской фазе [13]. Позднее полученный результат был подтвержден квантово-полевыми вычислениями с использованием однопетлевых суперграфов [1, 21, 32].

Обобщая подход работы [13] на случай $5D$, мы построили ведущее низкоэнергетическое эффективное действие $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса как сумму эффективного действия $5D$, $\mathcal{N}=1$ калибровочной теории и соответствующего вклада гипермультиплетов. При этом эффективное действие оказалось фиксированным с точностью до общей константы связи c_0 требованием неявной $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии, расширяющей явную $\mathcal{N}=1$ суперсимметрию вне массовой поверхности до $5D$, $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии на массовой поверхности. Мы подробно обсудили случай калибровочной группы $\mathrm{SU}(2)$, спонтанно нарушенной до $\mathrm{U}(1)$, когда эффективное действие зависит от одной пары абелевых $5D$, $\mathcal{N}=1$ калибровочных мультиплета и гипермультиплета. Была также рассмотрена более общая ситуация с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N)$, нарушенной до ее максимального тора, с $N-1$ парами таких абелевых мультиплетов [24].

Следующей очевидной задачей является воспроизведение найденного в работе [24] $5D$ эффективного действия из квантовой теории поля в $5D$, $\mathcal{N}=1$ гармоническом суперпространстве. Было бы также интересно установить явную связь с соответствующей D-бранной динамикой и с $4D$ и $6D$ аналогами построенного $5D$ эффективного действия. Еще одна интересная задача состоит в построении следующих за ведущим вкладов в это эффективное действие — также на основе требования неявной $5D$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии.

В случае $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ калибровочной теории мы использовали ее формулировку в терминах $\mathcal{N}=(1,0)$ гармонических суперполей, описывающих взаимодействующие $\mathcal{N}=(1,0)$ калибровочный мультиплет и гипермультиплет, оба в присоединенном представлении калибровочной группы. Эта теория характеризуется явной $\mathcal{N}=(1,0)$ суперсимметрией и скрытой $\mathcal{N}=(0,1)$ суперсимметрией на массовой поверхности. Низкоэнергетическое эффективное действие построено с учетом вкладов суперполевых напряженностей калибровочного мультиплета и вкладов гипермультиплета, что позволило достичь инвариантности относительно скрытой суперсимметрии. Результат был затем подтвержден прямыми квантовыми расчетами [15].

Наш подход к низкоэнергетическим эффективным действиям, основанный на использовании скрытых суперсимметрий, допускает обобщения по многим направлениям. Во-первых, во всех случаях мы нашли только ведущие низкоэнергетические вклады, опуская все члены, зависящие от производных по координатам суперпространства. Однако такие члены в принципе могут оказаться существенными для установления точных связей с суперструнными/бранными низкоэнергетическими эффективными действиями. Во-вторых, было бы интересно просуммировать члены, зависящие от напряженностей суперполей без производных, и вывести таким образом эффективные действия типа Гейзенберга–Эйлера и Борна–Инфельда, обладающие как явными, так и скрытыми суперсимметриями. Третье интересное направление связано с описанием квантовой структуры суперсимметричных теорий с высшими производными, например структуры перенормируемой $6D$ суперсимметричной калибровочной теории с высшими производными [54, 77].

Благодарности. Авторы благодарят редколлегию сборника, посвященного юбилею Андрея Алексеевича Славнова, за приглашение представить статью в этот сборник. Данная обзорная статья частично основана на совместных работах с Борисом Мерзликиным, Альбертом Петровым, Николаем Плетневым, Игорем Самсоновым и Константином Степаньянцем. Авторы сердечно им признательны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banin A.T., Buchbinder I.L., Pletnev N.G.* One-loop effective action for $\mathcal{N}=4$ SYM theory in the hypermultiplet sector: Leading low-energy approximation and beyond // Phys. Rev. D. 2003. V. 68, N 6. Pap. 065024; arXiv: hep-th/0304046.
2. *Belyaev D.V., Samsonov I.B.* Wess–Zumino term in the $\mathcal{N}=4$ SYM effective action revisited // J. High Energy Phys. 2011. V. 2011, N 04. Pap. 112; arXiv: 1103.5070 [hep-th].
3. *Belyaev D.V., Samsonov I.B.* Bi-harmonic superspace for $\mathcal{N}=4$ $d=4$ super Yang–Mills // J. High Energy Phys. 2011. V. 2011, N 09. Pap. 056; arXiv: 1106.0611 [hep-th].
4. *Bergshoeff E.A., de Roo M., Bilal A., Sevrin A.* Supersymmetric non-abelian Born–Infeld revisited // J. High Energy Phys. 2001. V. 2001, N 07. Pap. 029; arXiv: hep-th/0105274.
5. *Blumenhagen R., Körs B., Lüst D., Stieberger S.* Four-dimensional string compactifications with D-branes, orientifolds and fluxes // Phys. Rep. 2007. V. 445, N 1–6. P. 1–193; arXiv: hep-th/0610327.
6. *Bork L.V., Kazakov D.I., Kompaniets M.V., Tolkachev D.M., Vlasenko D.E.* Divergences in maximal supersymmetric Yang–Mills theories in diverse dimensions // J. High Energy Phys. 2015. V. 2015, N 11. Pap. 059; arXiv: 1508.05570 [hep-th].
7. *Bossard G., Howe P.S., Stelle K.S.* The ultra-violet question in maximally supersymmetric field theories // Gen. Relativ. Gravitation. 2009. V. 41, N 4. P. 919–981; arXiv: 0901.4661 [hep-th].
8. *Bossard G., Howe P.S., Stelle K.S.* A note on the UV behaviour of maximally supersymmetric Yang–Mills theories // Phys. Lett. B. 2009. V. 682, N 1. P. 137–142; arXiv: 0908.3883 [hep-th].
9. *Bossard G., Ivanov E., Smilga A.* Ultraviolet behavior of $6D$ supersymmetric Yang–Mills theories and harmonic superspace // J. High Energy Phys. 2015. V. 2015, N 12. Pap. 085; arXiv: 1509.08027 [hep-th].
10. *Бухбиндер Е.И., Оврут Б.А., Бухбиндер И.Л., Иванов Е.А., Кузенко С.М.* Низкоэнергетическое эффективное действие в $N=2$ суперсимметричных теориях поля // ЭЧАЯ. 2001. Т. 32, № 5. С. 1222–1290.
11. *Buchbinder E.I., Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Non-holomorphic effective potential in $N=4$ $SU(n)$ SYM // Phys. Lett. B. 1999. V. 446, N 3–4. P. 216–223; arXiv: hep-th/9810239.
12. *Buchbinder I.L., Buchbinder E.I., Kuzenko S.M., Ovrut B.A.* The background field method for $N=2$ super Yang–Mills theories in harmonic superspace // Phys. Lett. B. 1998. V. 417, N 1–2. P. 61–71; arXiv: hep-th/9704214.
13. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A.* Complete $\mathcal{N}=4$ structure of low-energy effective action in $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theories // Phys. Lett. B. 2002. V. 524, N 1–2. P. 208–216; arXiv: hep-th/0111062.
14. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Lechtenfeld O., Pletnev N.G., Samsonov I.B., Zupnik B.M.* ABJM models in $\mathcal{N}=3$ harmonic superspace // J. High Energy Phys. 2009. V. 2009, N 03. Pap. 096; arXiv: 0811.4774 [hep-th].
15. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Merzlikin B.S.* Leading low-energy effective action in $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ SYM theory // J. High Energy Phys. 2018. V. 2018, N 09. Pap. 039; arXiv: 1711.03302 [hep-th].
16. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Merzlikin B.S., Stepanyantz K.V.* One-loop divergences in the $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ abelian gauge theory // Phys. Lett. B. 2016. V. 763. P. 375–381; arXiv: 1609.00975 [hep-th].
17. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Merzlikin B.S., Stepanyantz K.V.* One-loop divergences in $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ SYM theory // J. High Energy Phys. 2017. V. 2017, N 01. Pap. 128; arXiv: 1612.03190 [hep-th].
18. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Merzlikin B.S., Stepanyantz K.V.* Supergraph analysis of the one-loop divergences in $6D$, $\mathcal{N}=(1,0)$ and $\mathcal{N}=(1,1)$ gauge theories // Nucl. Phys. B. 2017. V. 921. P. 127–158; arXiv: 1704.02530 [hep-th].
19. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Merzlikin B.S., Stepanyantz K.V.* On the two-loop divergences of the 2-point hypermultiplet supergraphs for $6D$, $\mathcal{N}=(1,1)$ SYM theory // Phys. Lett. B. 2018. V. 778. P. 252–255; arXiv: 1711.11514 [hep-th].

20. *Buchbinder I., Ivanov E., Merzlikin B., Stepanyantz K.* Harmonic superspace approach to the effective action in six-dimensional supersymmetric gauge theories // Symmetry. 2019. V. 11, N 1. Pap. 68; arXiv: 1812.02681 [hep-th].
21. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Petrov A.Yu.* Complete low-energy effective action in $\mathcal{N}=4$ SYM: A direct $\mathcal{N}=2$ supergraph calculation // Nucl. Phys. B. 2003. V. 653, N 1–2. P. 64–84; arXiv: hep-th/0210241.
22. *Бухбиндер И.Л., Иванов Е.А., Плетнев Н.Г.* Суперполевой подход к построению эффективного действия в квантовой теории поля с расширенной суперсимметрией // ЭЧАЯ. 2016. Т. 47, №3. С. 541–698.
23. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Samsonov I.B.* The low-energy $\mathcal{N}=4$ SYM effective action in diverse harmonic superspaces // Phys. Part. Nucl. 2017. V. 48, N 3. P. 333–388; arXiv: 1603.02768 [hep-th].
24. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Samsonov I.B.* Low-energy effective action in $5D$, $\mathcal{N}=2$ supersymmetric gauge theory // Nucl. Phys. B. 2019. V. 940. P. 54–62; arXiv: 1812.07206 [hep-th].
25. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Samsonov I.B., Zupnik B.M.* Superconformal $\mathcal{N}=3$ SYM low-energy effective action // J. High Energy Phys. 2012. V. 2012, N 01. Pap. 001; arXiv: 1111.4145 [hep-th].
26. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Ideas and methods of supersymmetry and supergravity, or a walk through superspace. Bristol: Inst. Phys., 1995; 2nd ed., 1998.
27. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Comments on the background field method in harmonic superspace: Non-holomorphic corrections in $N=4$ SYM // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13, N 20. P. 1623–1635; arXiv: hep-th/9804168.
28. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Ovrut B.A.* On the $D=4$, $N=2$ non-renormalization theorem // Phys. Lett. B. 1998. V. 433, N 3–4. P. 335–345; arXiv: hep-th/9710142.
29. *Buchbinder I., Kuzenko S., Ovrut B.* Covariant harmonic supergraphity for $N=2$ super Yang–Mills theories // Supersymmetries and quantum symmetries / Ed. by J. Wess, E.A. Ivanov. Berlin: Springer, 1999. P. 21–36. (Lect. Notes Phys.; V. 524); hep-th/9810040.
30. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Tseytlin A.A.* Low-energy effective actions in $\mathcal{N}=2,4$ superconformal theories in four dimensions // Phys. Rev. D. 2000. V. 62, N 4. Pap. 045001; arXiv: hep-th/9911221.
31. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu., Tseytlin A.A.* Two-loop $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills effective action and interaction between D3-branes // Nucl. Phys. B. 2002. V. 621, N 1–2. P. 179–207; arXiv: hep-th/0110173.
32. *Buchbinder I.L., Pletnev N.G.* Construction of one-loop $\mathcal{N}=4$ SYM effective action in the harmonic superspace approach // J. High Energy Phys. 2005. V. 2005, N 09. Pap. 073; arXiv: hep-th/0504216.
33. *Buchbinder I.L., Pletnev N.G.* Hypermultiplet dependence of one-loop effective action in the $\mathcal{N}=2$ superconformal theories // J. High Energy Phys. 2007. V. 2007, N 04. Pap. 096; arXiv: hep-th/0611145.
34. *Buchbinder I.L., Pletnev N.G.* Effective actions in $\mathcal{N}=1$, D5 supersymmetric gauge theories: Harmonic superspace approach // J. High Energy Phys. 2015. V. 2015, N 11. Pap. 130; arXiv: 1510.02563 [hep-th].
35. *Buchbinder I.L., Pletnev N.G., Samsonov I.B.* Effective action of three-dimensional extended supersymmetric matter on gauge superfield background // J. High Energy Phys. 2010. V. 2010, N 04. Pap. 124; arXiv: 1003.4806 [hep-th].
36. *Buchbinder I.L., Pletnev N.G., Samsonov I.B.* Low-energy effective actions in three-dimensional extended SYM theories // J. High Energy Phys. 2011. V. 2011, N 01. Pap. 121; arXiv: 1010.4967 [hep-th].
37. *Chepelev I., Tseytlin A.A.* Interactions of type IIB D-branes from the D-instanton matrix model // Nucl. Phys. B. 1998. V. 511, N 3. P. 629–646; arXiv: hep-th/9705120.
38. *De Wit B., Grisaru M.T., Roček M.* Nonholomorphic corrections to the one-loop $N=2$ super Yang–Mills action // Phys. Lett. B. 1996. V. 374, N 4. P. 297–303; arXiv: hep-th/9601115.
39. *Dine M., Seiberg N.* Comments on higher derivative operators in some SUSY field theories // Phys. Lett. B. 1997. V. 409, N 1–4. P. 239–244; arXiv: hep-th/9705057.
40. *Douglas M.R.* On $D=5$ super Yang–Mills theory and $(2,0)$ theory // J. High Energy Phys. 2011. V. 2011, N 02. Pap. 011; arXiv: 1012.2880 [hep-th].
41. *Drummond J.M., Heslop P.J., Howe P.S., Kerstan S.F.* Integral invariants in $\mathcal{N}=4$ SYM and the effective action for coincident D-branes // J. High Energy Phys. 2003. V. 2003, N 08. Pap. 016; arXiv: hep-th/0305202.
42. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Quantum properties of higher dimensional and dimensionally reduced supersymmetric theories // Nucl. Phys. B. 1983. V. 227, N 2. P. 252–290.
43. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Unconstrained $N=2$ matter, Yang–Mills and supergravity theories in harmonic superspace // Classical Quantum Gravity. 1984. V. 1, N 5. P. 469–498.
44. *Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Harmonic supergraphs: Green functions // Classical Quantum Gravity. 1985. V. 2, N 5. P. 601–616.
45. *Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Harmonic supergraphs: Feynman rules and examples // Classical Quantum Gravity. 1985. V. 2, N 5. P. 617–630.

46. *Galperin A.S., Ivanov E.A., Ogievetsky V.I., Sokatchev E.S.* Harmonic superspace. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
47. *Giveon A., Kutasov D.* Brane dynamics and gauge theory // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71, N 4. P. 983–1084; arXiv: hep-th/9802067.
48. *Gonzalez-Rey F., Kulik B., Park I.Y., Roček M.* Self-dual effective action of $N=4$ super-Yang–Mills // Nucl. Phys. B. 1999. V. 544, N 1–2. P. 218–242; arXiv: hep-th/9810152.
49. *Gonzalez-Rey F., Roček M.* Nonholomorphic $N=2$ terms in $N=4$ super Yang–Mills theory: 1-loop calculation in $N=2$ superspace // Phys. Lett. B. 1998. V. 434, N 3–4. P. 303–311; arXiv: hep-th/9804010.
50. *Grimm T.W., Ha T.-W., Klemm A., Klevers D.* The D5-brane effective action and superpotential in $\mathcal{N}=1$ compactifications // Nucl. Phys. B. 2009. V. 816, N 1–2. P. 139–184; arXiv: 0811.2996 [hep-th].
51. *Howe P.S., Stelle K.S.* Ultraviolet divergences in higher dimensional supersymmetric Yang–Mills theories // Phys. Lett. B. 1984. V. 137, N 3–4. P. 175–180.
52. *Howe P.S., Stelle K.S.* Supersymmetry counterterms revisited // Phys. Lett. B. 2003. V. 554, N 3–4. P. 190–196; arXiv: hep-th/0211279.
53. *Howe P.S., Stelle K.S., West P.C.* $N=1$, $d=6$ harmonic superspace // Classical Quantum Gravity. 1985. V. 2, N 6. P. 815–821.
54. *Ivanov E.A., Smilga A.V., Zupnik B.M.* Renormalizable supersymmetric gauge theory in six dimensions // Nucl. Phys. B. 2005. V. 726, N 1–2. P. 131–148; arXiv: hep-th/0505082.
55. *Кривощеков В.К., Славнов А.А., Чехов Л.О.* Эффективный лагранжиан для суперсимметричной квантовой хромодинамики и проблема динамического нарушения суперсимметрии // ТМФ. 1987. Т. 72, №1. С. 12–21.
56. *Kuzenko S.M.* Self-dual effective action of $\mathcal{N}=4$ SYM revisited // J. High Energy Phys. 2005. V. 2005, N 03. Pap. 008; arXiv: hep-th/0410128.
57. *Kuzenko S.M.* Five-dimensional supersymmetric Chern–Simons action as a hypermultiplet quantum correction // Phys. Lett. B. 2007. V. 644, N 1. P. 88–93; arXiv: hep-th/0609078.
58. *Kuzenko S.M., Linch W.D.,* III. On five-dimensional superspaces // J. High Energy Phys. 2006. V. 2006, N 02. Pap. 038; hep-th/0507176.
59. *Kuzenko S.M., McArthur I.N.* Effective action of $\mathcal{N}=4$ super Yang–Mills: $\mathcal{N}=2$ superspace approach // Phys. Lett. B. 2001. V. 506, N 1–2. P. 140–146; arXiv: hep-th/0101127.
60. *Kuzenko S.M., McArthur I.N.* Hypermultiplet effective action: $\mathcal{N}=2$ superspace approach // Phys. Lett. B. 2001. V. 513, N 1–2. P. 213–222; arXiv: hep-th/0105121.
61. *Kuzenko S.M., McArthur I.N.* On the two-loop four-derivative quantum corrections in 4D $\mathcal{N}=2$ superconformal field theories // Nucl. Phys. B. 2004. V. 683, N 1–2. P. 3–26; arXiv: hep-th/0310025.
62. *Lambert N., Papageorgakis C., Schmidt-Sommerfeld M.* M5-branes, D4-branes and quantum 5D super-Yang–Mills // J. High Energy Phys. 2011. V. 2011, N 01. Pap. 083; arXiv: 1012.2882 [hep-th].
63. *Lambert N., Papageorgakis C., Schmidt-Sommerfeld M.* Deconstructing $(2,0)$ proposals // Phys. Rev. D. 2013. V. 88, N 2. Pap. 026007; arXiv: 1212.3337 [hep-th].
64. *Lindström U., Gonzalez-Rey F., Roček M., von Unge R.* On $N=2$ low energy effective actions // Phys. Lett. B. 1996. V. 388, N 3. P. 581–587; arXiv: hep-th/9607089.
65. *Lowe D.A., von Unge R.* Constraints on higher derivative operators in maximally supersymmetric gauge theory // J. High Energy Phys. 1998. V. 1998, N 11. Pap. 014; arXiv: hep-th/9811017.
66. *Markus N., Sagnotti A.* A test of finiteness predictions for supersymmetric theories // Phys. Lett. B. 1984. V. 135, N 1–3. P. 85–90.
67. *Markus N., Sagnotti A.* The ultraviolet behavior of $N=4$ Yang–Mills and the power counting of extended superspace // Nucl. Phys. B. 1985. V. 256. P. 77–108.
68. *Periwal V., von Unge R.* Accelerating D-branes // Phys. Lett. B. 1998. V. 430, N 1–2. P. 71–76; arXiv: hep-th/9801121.
69. *Samsonov I.B.* Low-energy effective action in two-dimensional SQED: A two-loop analysis // J. High Energy Phys. 2017. V. 2017, N 07. Pap. 146; arXiv: 1704.04148 [hep-th].
70. *Seiberg N.* Notes on theories with 16 supercharges // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 1998. V. 67, N 1–3. P. 158–171; arXiv: hep-th/9705117.
71. *Славнов А.А.* Тождества Уорда в калибровочных теориях // ТМФ. 1972. Т. 10, №2. С. 153–161.
72. *Славнов А.А.* Перенормировка суперсимметричной квантовой электродинамики // ТМФ. 1975. Т. 23, №1. С. 3–10.
73. *Slavnov A.A.* Renormalization of supersymmetric gauge theories. II: Non-Abelian case // Nucl. Phys. B. 1975. V. 97, N 1. P. 155–164.

74. *Slavnov A.A., Chekhov L.O., Krivoshchekov V.K.* SUSY QCD effective action in the large $N(c)$ limit // Phys. Lett. B. 1987. V. 194, N 2. P. 236–240.
75. *Taylor J.C.* Ward identities and charge renormalization of the Yang–Mills field // Nucl. Phys. B. 1971. V. 33, N 2. P. 436–444.
76. *Tseytlin A.A.* On non-abelian generalisation of the Born–Infeld action in string theory // Nucl. Phys. B. 1997. V. 501, N 1. P. 41–52; arXiv: hep-th/9701125.
77. *Tseytlin A.A., Casarin L.* One-loop β-functions in 4-derivative gauge theory in 6 dimensions // J. High Energy Phys. 2019. V. 2019, N 08. Pap. 159; arXiv: 1907.02501 [hep-th].
78. *Weinberg S.* The quantum theory of fields. V. 2: Modern applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
79. *Зупник Б.М.* Шестимерные суперкалибровочные теории в гармоническом суперпространстве // Ядер. физика. 1986. Т. 44, №3. С. 794–802.
80. *Zupnik B.M.* The action of the supersymmetric $N=2$ gauge theory in harmonic superspace // Phys. Lett. B. 1987. V. 183, N 2. P. 175–176.

Перевод с английского А.И. Зенчука