



Свойства η - η' мезонов при конечной температуре

Хмелев Александр Васильевич

Университет Дубна
Кафедра "Фундаментальные проблемы физики микромира"

6 июля 2023 г.

Задачи:

- создать численные методы для моделирования спектра η и η' мезонов в плотной и горячей ядерной среде.
- написать программу расчетов для вычисления интегралов

Лагранжиан модели Намбу-Иона-Лазинио

$$\begin{aligned} L = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^a\bar{\psi})^2] \\ & - K [\det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi] . \end{aligned}$$

λ^a – это матрицы Гелл - Манна, с $a=0, 1, \dots, 8$, $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} I$

$N_f = 3$ и $N_c = 3$ являются числами ароматов и цветов соответственно.

Модель Намбу-Иона-Лазинио позволяет:

- объяснить спонтанное нарушение киральной симметрии,
- описать свойства скалярного и псевдо-скалярного мезонов в горячей и плотной среде,
- схематично описать динамику адронного вещества,
- описать свойства фазовых переходов.

Уравнение Швингера - Дайсона

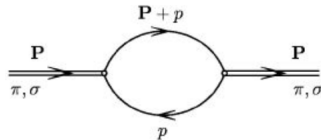
$$m = m_0 + 2G \langle \bar{q}_i q_i \rangle + 2K \langle \bar{q}_j q_j \rangle \langle \bar{q}_k q_k \rangle, \quad \langle \bar{q} q \rangle = 4N_c N_f m I_1$$

Масса мезонов

$$1 - 2\Pi(P^2 = M^2) = 0$$

$$\Pi_{ab}^{PP}(P^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i\gamma_5 \tau^a S(p+P) i\gamma_5 \tau^b S(p)]$$

$$\Pi^{SS}(P^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(p+P)S(p)]$$



$$\Pi_{ps}(P^2) = 4N_c N_f I_1 - 2N_c N_f P^2 I_2(P^2)$$

$$\Pi_s(P^2) = 4N_c N_f I_1 - 2N_c N_f (P^2 - 4m^2) I_2(P^2)$$

Константы связи мезонов и кварков

$$g_{\pi qq/\sigma qq}^{-2}(T, \mu) = \frac{\partial \Pi_{\pi qq/\sigma qq}(P^2 = M_\pi^2)}{\partial (P^2 = M^2)}$$

Решается система нелинейных интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} m_u &= m_u^0 + f_1(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s) \\ m_d &= m_d^0 + f_2(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s) \\ m_s &= m_s^0 + f_3(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s) \\ F_\pi &= f_4(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s, M_\pi) \\ F_K &= f_5(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s, M_K) \\ 1 - \Pi_\pi(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s, M_\pi) \\ 1 - \Pi_K(\Lambda, G, K, m_u, m_d, m_s, M_K) \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{параметры} \\ m_u^0, m_d^0, m_s^0, \Lambda, G, K \\ \text{фиксируются по} \\ m_u, m_d, m_s, F_\pi, F_K, M_\pi, M_K \end{array}$$

Параметры фиксируются при $T = 0$. Для расчетов при конечных T, μ в интегралах системы применяется суммирование Матсубары (интегралы по нулевой компоненте импульса заменяются на суммы по частотам Матсубары. Эти суммы равны функциям распределения Ферми)

Нарушение с $U_A(1)$ аномалией ($K \neq 0$)	
Физические значения	Набор параметров и кварковые массы
$f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ $M_\pi = 135.0 \text{ MeV}$ $M_K = 497.7 \text{ MeV}$ $M_{\eta'} = 960.8 \text{ MeV}$ $M_\eta = 514.8 \text{ MeV}^*$ $f_K = 97.7 \text{ MeV}^*$ $M_\sigma = 728.8 \text{ MeV}^*$ $M_{a_0} = 873.3 \text{ MeV}^*$ $M_\kappa = 1045.4 \text{ MeV}^*$ $M_{f_0} = 1194.3 \text{ MeV}^*$ $\theta_P = -5.8^\circ; \theta_S = 16^\circ$	$m_u = m_d = 5.5 \text{ MeV}$ $m_s = 140.7 \text{ MeV}$ $\Lambda = 602.3 \text{ MeV}$ $g_S \Lambda^2 = 3.67$ $g_D \Lambda^5 = -12.36$ $M_u = M_d = 367.7 \text{ MeV}^*$ $M_s = 549.5 \text{ MeV}^*$
Нарушение без $U_A(1)$ аномалии ($K = 0$)	
$f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ $M_\pi = M_\eta = 135.0 \text{ MeV}$ $M_K = 497.7 \text{ MeV}$ $f_K = 95.4 \text{ MeV}^*$ $M_{\eta'} = 707.5 \text{ MeV}^*$ $M_\sigma = M_{a_0} = 740.1 \text{ MeV}^*$ $M_\kappa = 985.38 \text{ MeV}^*$ $M_{f_0} = 1194.8 \text{ MeV}^*$ $\theta_P = -54.74^\circ; \theta_S = 35.264^\circ$	$m_u = m_d = 5.5 \text{ MeV}$ $m_s = 138.75 \text{ MeV}$ $\Lambda = 602.3 \text{ MeV}$ $g_S \Lambda^2 = 4.64$ $g_D \Lambda^5 = 0$ $M_u = M_d = 368 \text{ MeV}^*$ $M_s = 587.4 \text{ MeV}^*$

Интеграл I_1 и $I_2^{ij}(P)$ зависит от температуры T и от двух химических потенциалов μ_i, μ_j , соответствующих кварковых ароматов

$$I_1^i(T, \mu_i) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{E_i} (n_i^+ - n_i^-),$$

$$I_2^{ij}(P_0, T, \mu_i, \mu_j) = -N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2E_i} \frac{1}{(E_i + P_0 - (\mu_i - \mu_j))^2 - E_j^2} n_i^+ \right. \\ \left. - \frac{1}{2E_i} \frac{1}{(E_i - P_0 + (\mu_i - \mu_j))^2 - E_j^2} n_i^- \right. \\ \left. + \frac{1}{2E_j} \frac{1}{(E_j - P_0 + (\mu_i - \mu_j))^2 - E_i^2} n_j^+ \right. \\ \left. - \frac{1}{2E_j} \frac{1}{(E_j + P_0 - (\mu_i - \mu_j))^2 - E_i^2} n_j^- \right],$$

где

$$n_i^\pm = f_i(\pm E_i) = \frac{1}{1 + e^{\pm \beta(E_i \mp \mu_i)}}, \quad n_j^\pm = f_j(\pm E_j) = \frac{1}{1 + e^{\pm \beta(E_j \mp \mu_j)}}$$

Для вычисления интеграла используется метод Гаусса-Кронрода. Общая формула для вычисления интеграла методом Гаусса-Кронрода имеет вид:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n y_i f(a_i),$$

где n - количество узлов, z_i - узлы Гаусса-Лежандра. a_i и y_i - это коэффициенты, которые определяют узлы и веса для численного интегрирования на заданном интервале, а y_i - это соответствующий вес для i -го узла.

Для вычисления a_i и y_i можно использовать следующие формулы:

$$a_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} z_i, \quad y_i = \frac{b-a}{2} w_i$$

где w_i - веса для узлов Гаусса-Лежандра. Для оценки погрешности можно использовать эмпирическую формулу:

$$\Delta = (200|I - I_G|)^{1.5},$$

где I_G - приближённое значение интеграла, полученное методом Гаусса

Для примера рассмотрим одну из четырех функций, которые будут интегрироваться. С помощью языка программирования "C++" написана программа для вычисления Методом Гаусса – Кронрода интеграла вида:

$$\left(\frac{N_c}{\pi^2} \frac{1}{2 \left(\frac{P_0}{L} \right)} \right) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \frac{m_i^2}{L^2}}} f(E_i - \mu_i) \Phi(E)$$

$$\text{где } A = (P_0^2 + (m_i^2 - m_j^2)) \frac{1}{2P_0L}, E_i = \sqrt{x^2 + \left(\frac{m_i^2}{L^2} \right)}, f(E_i - \mu_i) = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu_i)}},$$

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

Выбраны следующие значения параметров: $P_0 = 1$, $m_i = 0.3$, $m_j = 0.7$, $\mu_i = 1$, $L = 1$, $N_c = 2$, $T_1 = 0.05$, $T_2 = 0.1$, $T_3 = 0.15$.

Условия для функций $\Phi(E)$.

$$\text{Если} \quad m_i \geq m_j \rightarrow \frac{1}{E_i + A}$$

$$\text{Если} \quad m_i < m_j \rightarrow \begin{cases} \text{Если} & P_0 - \sqrt{m_j^2 - m_i^2} > 0 \rightarrow \frac{1}{E_i + A} \\ \text{Если} & P_0 - \sqrt{m_j^2 - m_i^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{E_i} \end{cases}$$

$$\text{Если} \quad P_0 - \sqrt{m_j^2 - m_i^2} < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Если} & m_i^2 - A^2 > 0 \rightarrow \frac{E_i - A}{p^2 + (m_i^2 - A)} \\ \text{Если} & m_i^2 - A^2 = 0 \rightarrow \frac{E_i - A}{p^2} \\ \text{Если} & m_i^2 - A^2 < 0 \rightarrow \frac{E_i - A}{p + \sqrt{A^2 - m_i^2}} \end{cases}$$

Мы получили следующие результаты для одного интеграла:

	Метод Гаусса-Кронрода	Погрешность
Функция 1	0.0181391	6.6415029e-07
Функция 2	0.0366382	4.7850861e-09
Функция 3	0.0916010	9.8231421e-08
Функция 4	0.0136871	4.9003445e-12

Такие результаты имеем для спектра температур:

Температура T	Значение интегралов	Время вычислений
0.05	0.1611627	0.0176663
0.10	0.1600655	0.0174783
0.15	0.1590390	0.01811

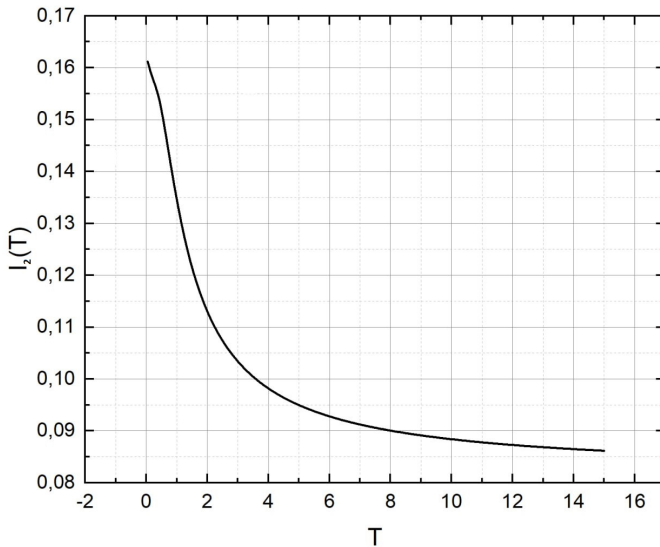
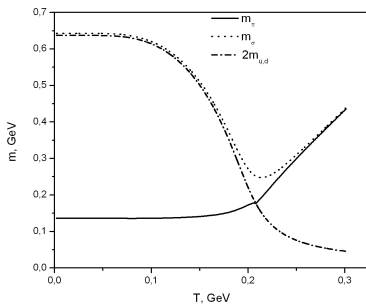
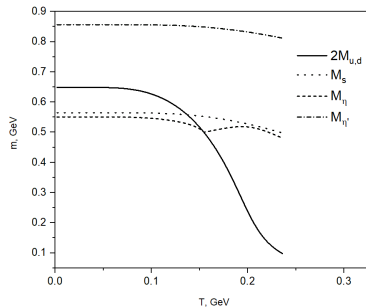


Рис. 1: Зависимость значений интеграла от температуры при $T = \overline{0.05, 15}$



a)



b)

Рис. 2: Фазовая диаграмма ядерной материи: а) Спектр масс σ и π мезонов, б) спектр масс η и η' мезонов

Теперь у нас в планах заняться такими задачами, как:

- Численные решения систем нелинейных интегральных уравнений
- Изучение адронов при конечном химическом потенциале μ

Для численного решения систем нелинейных интегральных уравнений существует множество нетривиальных алгоритмов.

Спасибо за внимание