

XV-th International School-Conference
The Actual Problems of Microworld Physics
Minsk, Belarus, 27 August 27-3 September, 2023

**Analytic perturbation theory &
vacuum condensates from the electron-positron
annihilation into hadrons data**

O.P. Solovtsova

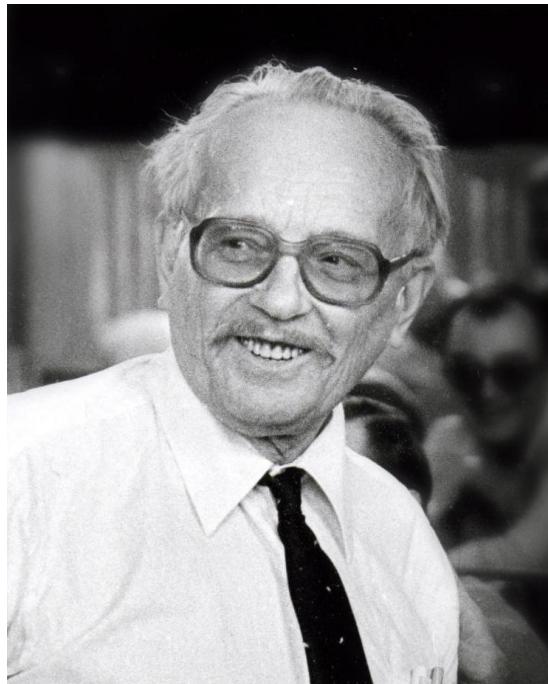
GSTU (Gomel, Belarus)

in collaboration with

O.V. Teryaev and M.E. Kozhevnikova ((II part))

JINR (Russia)

Часть I. Посвящается 95-ю со дня рождения академика РАН Д. В. Ширкова



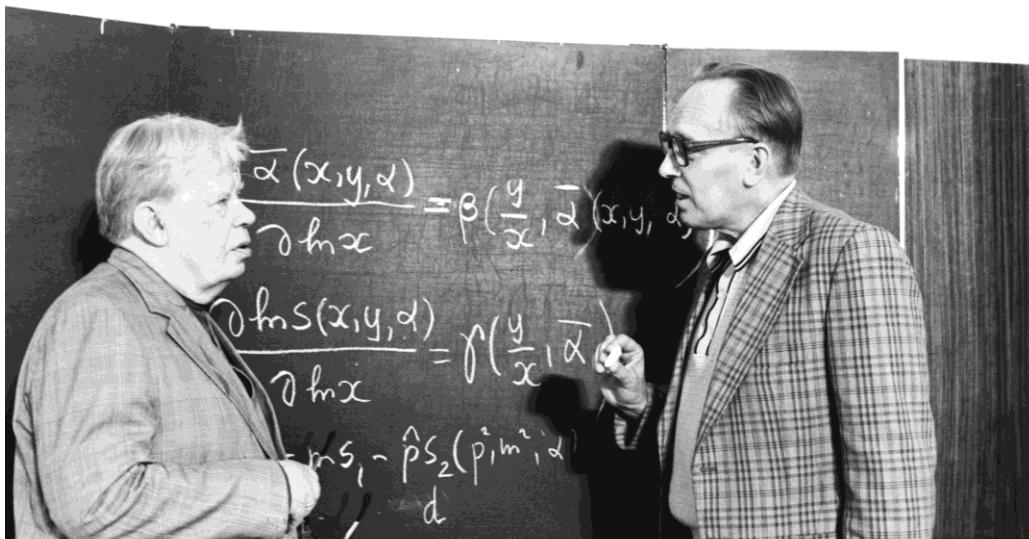
(1928 - 2016)

План

Аналитическая теория
возмущений в КХД:
создание,
развитие.
современный статус

1996 год → 2016 год → 2023 год

Л
Т
Ф



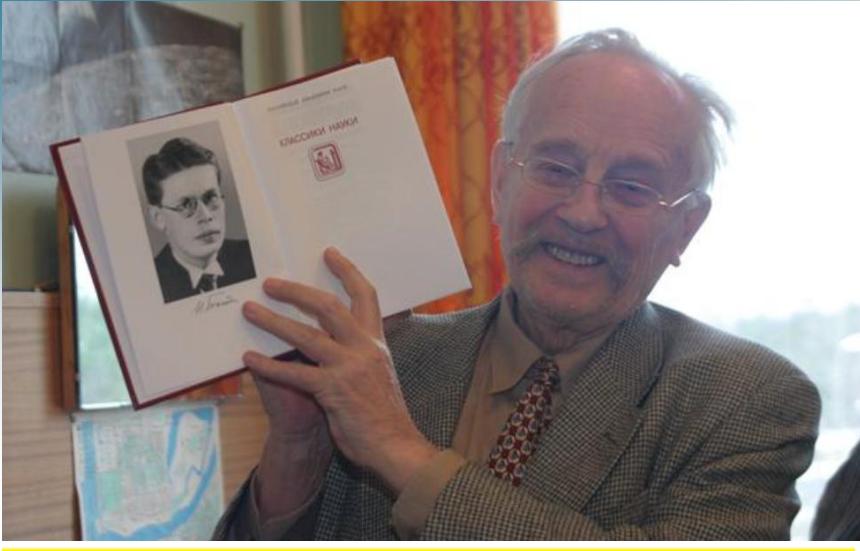
Н.Н.Боголюбов

Д.В. Ширков



Д.И. Казаков

Д.В.Ширков



Из доклада Д.В. Ширкова

Столетие Боголюбова

Помните:

Любое дело нужно делать на пределе своих возможностей.

И не ради денег, а ради качества.

Ибо только качество придает смысл Вашей жизни.

[Марк Шагал]

Боголюбову – 100

– р. 35

Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ
В ДВЕНАДЦАТИ ТОМАХ

Квантовая теория

Том X

Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков

Введение в теорию
квантованных полей

**Дополнение 1. Ренорм-группа
Боголюбова 50 лет спустя**

5. Ренорм-группа Боголюбова 50 лет спустя

691

5.2. Аналитическая теория возмущений в КХД. Модификация ряда теории возмущений, выполненная методом ренорм-группы, позволяет улучшить свойства разложения в ультрафиолетовой области, однако приводит к нефизическим особенностям.

Так, в КХД сумму одноптлевых ультрафиолетовых (УФ) логарифмов для «инвариантного заряда» (57) обычно записывают в терминах

$$\bar{\alpha}_s^{(\ell=1)}(Q^2) = \frac{\alpha_\mu}{1 + \alpha_\mu \beta_0 \ln(Q^2/\mu^2)} = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (70)$$
$$\beta_0(n_f) = \frac{11 - 2n_f/3}{4\pi}$$

масштабного параметра КХД, определенного известным образом: $\Lambda = \mu e^{-1/(2\alpha_\mu \beta_0)}$.

Аналитическая теория возмущений (АТВ)

Метод ренорм-группы (РГ) имеет фундаментальную роль в структуре квантовой теории поля и сегодня квантохромодинамический (КХД) анализ процессов немыслим вне РГ метода.

Применение метода РГ модифицирует ряды теории возмущений (ТВ) КХД, в соответствии с общим принципом РГ инвариантности, улучшая свойства рядов ТВ в ультрафиолетовой области.

Однако, в инфракрасной области инвариантный заряд КХД приобретает нефизические особенности: в лидирующем порядке - это хорошо известный «призрачный полюс».

Учёт следующих многопетлевых поправок этих особенностей не устраняет.

Существование такого рода нефизических особенностей находится в конфликте с общими принципами локальной квантовой теории поля.

Проблема появления таких нефизических особенностей хорошо известна из КЭД. Решение, предложенное в работе : Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков, ЖЭТФ 37 (1959) 805 в рамках метода РГ, состояло в наложении дополнительного общего требования аналитичности, вытекающего из спектрального представления Челлена-Лемана, с приведением результата к РГ инвариантному виду. В получаемом точном однопетлевом выражении «призрачный полюс» у аналитического инвариантного заряда КЭД отсутствовал, кроме того, возникало конечное предельное значение (3π), которое не зависело от экспериментального ($\alpha=1/137$).

Метод Аналитической Теории Возмущений модернизирует пертурбативные аппроксимации КХД, освобождая их от нефизических особенностей и делая стабильными к поправкам высших порядков и выбору схемы перенормировки, сохраняя при этом РГ инвариантность.

$$\text{АТВ} = (\text{ТВ} + \text{РГ}) + Q^2\text{-аналитичность}$$

Фундамент для создания АТВ был заложен за 40 лет до её создания.

Создание АТВ

1996 год Дмитрий Васильевич предложил применить идею построение инвариантного заряда в КЭД для КХД Игорю Соловцову после семинара, на котором поднимался вопрос о важности сохранения правильных аналитических свойств инвариантного заряда КХД в Евклидовой области, при переходе в область Минковского (времениподобную) *

$$\alpha_{an}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_0^{+\infty} \frac{\rho(\sigma)d\sigma}{\sigma + Q^2}$$

(представление Челлена – Лемана)

$$\rho(\sigma) = \text{Im } \alpha_{PT}(-\sigma - i\varepsilon)$$

Лидирующий порядок (ЛО):

$$\rho(\sigma) = \frac{\pi}{\ln^2(\sigma/\Lambda^2) + \pi^2}$$

$$\alpha_{PT}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left(\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \right)$$

$$\beta_0 = 11 - (2/3)n_f$$

$$\alpha_s^E(Q^2) \Rightarrow \alpha_s^M(s)$$

$(Q^2 = -q^2 > 0$
для евклидовой области)

$$\alpha_{an}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \frac{1}{1-Q^2/\Lambda^2} \right] \quad (\text{ЛО})$$

сохраняет
УФ
асимптотику

правильные
аналитические
свойства и
ИФ предел

Синтез РГ инвариантности и Q^2 –аналитичность приводит к аналитическому инвариантному заряду без полюса и с конечным ИФ значением.

$$\alpha_{APT}^E(0) = 4\pi / \beta_0 \quad (\alpha_{APT}^E \simeq 1.4 \quad \text{при } n_f = 3)$$

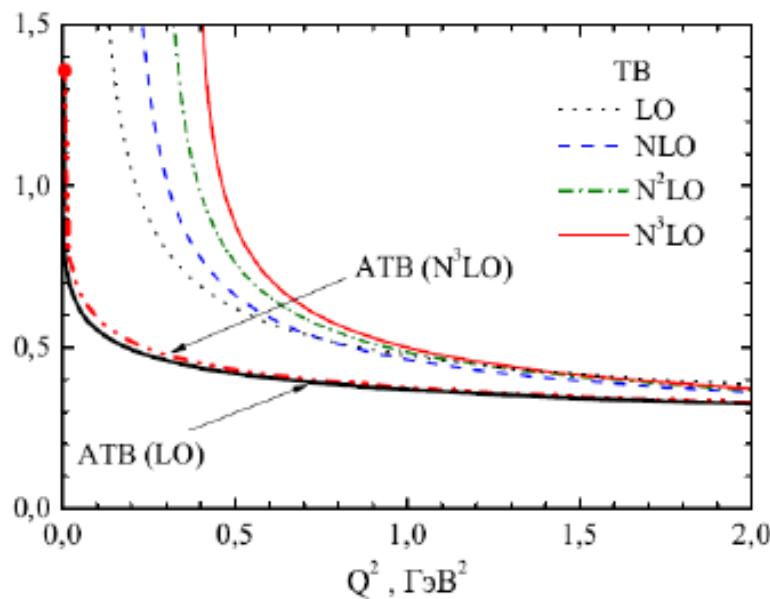
* Обсуждался подход называемый вариационной теорией возмущений.

Вопрос:

следующие порядки, как они подправляют предельное значение?

Ответ: $\alpha_{APT}(0) = \frac{4\pi}{\beta_0}$ **во всех порядках**

Универсальное значение, в том смысле, что не зависит от порядка разложения, точки нормировки (или параметра Λ_{QCD}), а определяется только коэффициентом, связанным с общей групповой структурой лагранжиана.



Сравнение поведения ТВ и АТВ инвариантных в разных порядках разложения. (При общей нормировке на $Q^2=M_Z^2$.)

D.V. Shirkov and I.L.Solovtsov,
«Analytic QCD running coupling with finite IR behaviour and universal alpha_s(0) value», JINR Rapid Comm. No.2[76], 1996, p. 5; hep-ph/9604363;
Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 1209.

В любом порядке (*l*)

$$\mathcal{A}^{(\ell)}(Q^2) \equiv \alpha_{APT}^{(\ell)}(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma + Q^2} \operatorname{Im} \alpha_{PT}^{(\ell)}(-\sigma - i\varepsilon)$$

- **нет сингулярностей**
- **универсальная ИЭ стабильная точка**
- **АТВ \rightarrow ТВ при больших Q^2**
- **нет дополнительных параметров**

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(4)}(L) = & \frac{1}{\beta_0 L} - \frac{1}{\beta_0^3 L^2} \beta_1 \ln L + \frac{1}{\beta_0^3 L^3} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0^2} (\ln^2 L - \ln L - 1) + \frac{\beta_2}{\beta_0} \right) \\ & + \frac{1}{\beta_0^4 L^4} \left[\frac{\beta_1^3}{\beta_0^3} \left(-\ln^3 L + \frac{5}{2} \ln^2 L + 2 \ln L - \frac{1}{2} \right) - 3 \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0^2} \ln L - \frac{\beta_3}{2 \beta_0} \right], \end{aligned}$$

~25 лет АТВ: статистика

✓ Самая цитируемая из работ

D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov,
“Analytic model for the QCD running coupling
with universal $\alpha_s(0)$ value”,
Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 1209

CI=486 (20 лет)

CI=562 (25 лет)

Theor. Math. Phys. 150(1) (2007) 132-152

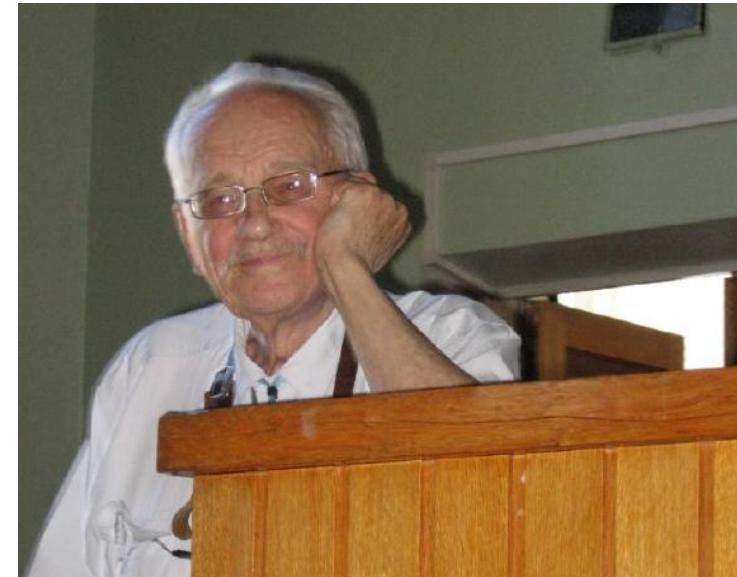
“Ten years of the Analytic Perturbation Theory in QCD”

CI=132

! Последняя работа ДВ (2015 г.) связана с АТВ

CI=48

$$\Delta_{\text{КХД}}(Q^2) = \sum_{n=1} c_n \underbrace{\left[\alpha_{TB}(Q^2) \right]^n}_{\text{TB}} \Rightarrow \sum_{n=1} c_n \underbrace{\mathcal{A}_n(Q^2)}_{\text{АТВ}}$$



Take care of Principles and
the Principles will take care of you.

D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov

← Нестепенная теория возмущений

Дальнейшие продвижения

Получено выражение для аналитического инвариантного заряда в области Минковского

$$\alpha_M^{APT}(s) = \frac{1}{\beta_0} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \rho(\sigma)$$

$$\alpha_E^{APT}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma + Q^2} \rho(\sigma)$$

$$\alpha_E^{APT}(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)} \alpha_M^{APT}(s)$$

Leading order

Euclidean region

$$\alpha_E(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{\sigma + Q^2} = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} \right]$$

Minkowskian region

$$\alpha_M(s) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \rho(\sigma) = \frac{4\pi}{\beta_0 \pi} \arccos \frac{L}{\sqrt{L^2 + \pi^2}} \Big|_{L>0}$$

$$= \frac{4\pi}{\beta_0 \pi} \arctan \frac{\pi}{L}, \quad L = \ln \frac{s}{\Lambda^2}$$

A. Radyshkin, Preprint JINR E2-82-159 (1982)

$$\alpha_E^{PT}(z) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(-z)}, \quad \alpha_E^{PT}(z) \neq Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s-z)^2} \alpha_M^{PT}(s)$$



K.Milton, I.Solovtsov, "Analytic perturbation theory in QCD and Schwinger's connection between the beta function and the spectral density", Phys. Rev. D 55 (1997) 5295.

Правильные аналитические свойства инвариантного заряда в евклидовой области позволили самосогласованно определить инвариантный заряд в минковской (времениподобной) области.

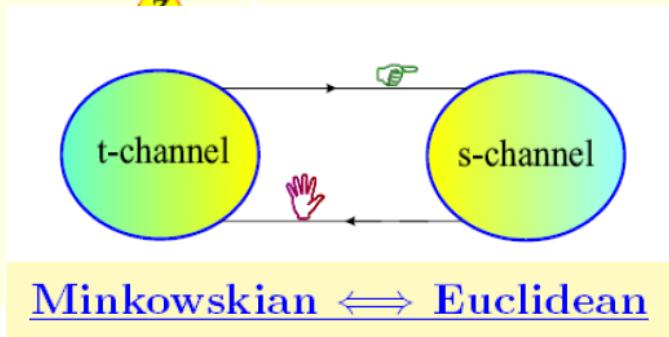
Новое

□ **Самосогласованный переход**

Евклидов $\alpha_E^{APT}(Q^2)$ и минковский $\alpha_M^{APT}(s)$ инвариантные заряды определяются согласовано, они свободны от нефизических сингулярностей и не содержат новых параметров. Подобными свойствами обладают и высшие АТВ-функции.

$$\alpha_E^{APT}(0) = \alpha_M^{APT}(0) = \frac{4\pi}{\beta_0}$$

$$\alpha_M(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} \alpha_E(-z). \quad (*)$$



The main object in description of hadronic part of many physical processes is a $\Pi(q^2)$

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T V_\mu(x) V_\nu(0)^+ | 0 \rangle \\ &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2), \quad V_{ij}^\mu = \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_i\end{aligned}$$

It is useful to introduce an Euclidean characteristic, the so-called the Adler function

$$D(Q^2) = -Q^2 \frac{d\Pi(-Q^2)}{dQ^2}, \quad Q^2 = -q^2 > 0$$

[in Euclidean
(spacelike) region]

The integral representation for the D-function is given in terms of the discontinuity of the correlator across the cut

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)^2} R(s) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi(s)$$

[in Minkowskian
(timelike) region]

To parameterize $R(s)$ in terms of QCD parameters a procedure of analytic continuation from Euclidean (s-channel) to Minkowskian (t-channel) region is required. The perturbative approximation, in which the running coupling with unphysical singularities is used, breaks the connection between space and timelike quantities. The APT leads to a self-consistent definition of analytic continuation.

The perturbative expansion for the D is started as $D(Q^2) \sim 1 + \alpha_s(Q^2)/\pi + \dots$

R-D self-duality presentations

$$a_\mu^{had} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} M(s) R(s)$$

$$a_\mu^{had} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} E(t) D(t)$$

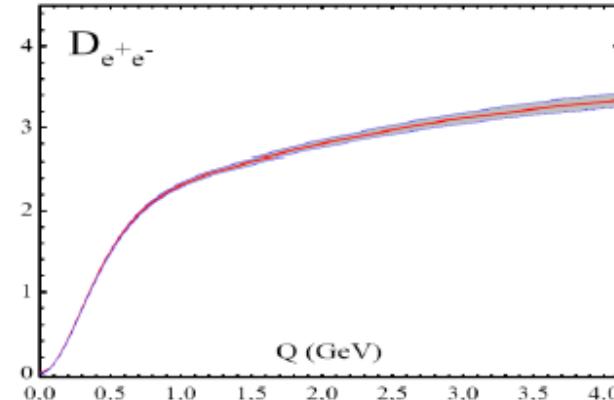
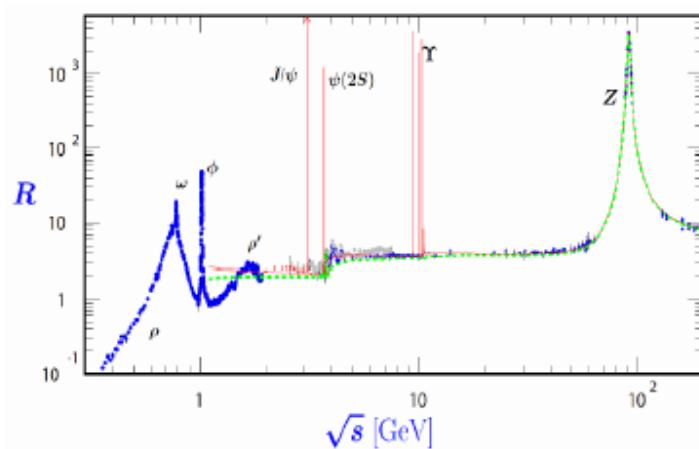
$$E(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\epsilon}^{t+i\epsilon} \frac{dz}{z} M(-z).$$



$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1+4m^2/t}-1}{\sqrt{1+4m^2/t}+1} \right]^2,$$

$$M(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2}{x^2 + (1-x)s/m^2}$$

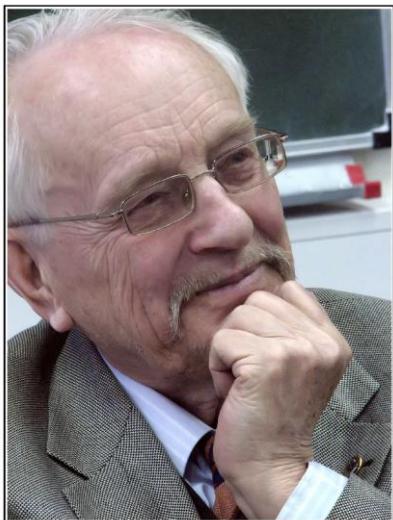
$$\eta = \frac{1-v}{1+v}, \quad v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}.$$



From F. Jegerlehner (2008) data

The D- function defined in the spacelike region is a smooth function without traces of the resonance structure and one can expect that reflects more precisely the quark-hadron duality and will be a convenient object for comparing theoretical predictions with experimental data.

Analytic approach (APT) in QCD



PT approximations breaks the analytic properties

$$\text{APT} = \text{PT} + \text{RG} + \text{ANALYTICITY}$$



Källen–Lehmann representation

APT -> leads to correct analytic properties

APT -> improves convergence properties

APT -> gives RS stability results

APT -> gives stability for HT values
and so on.

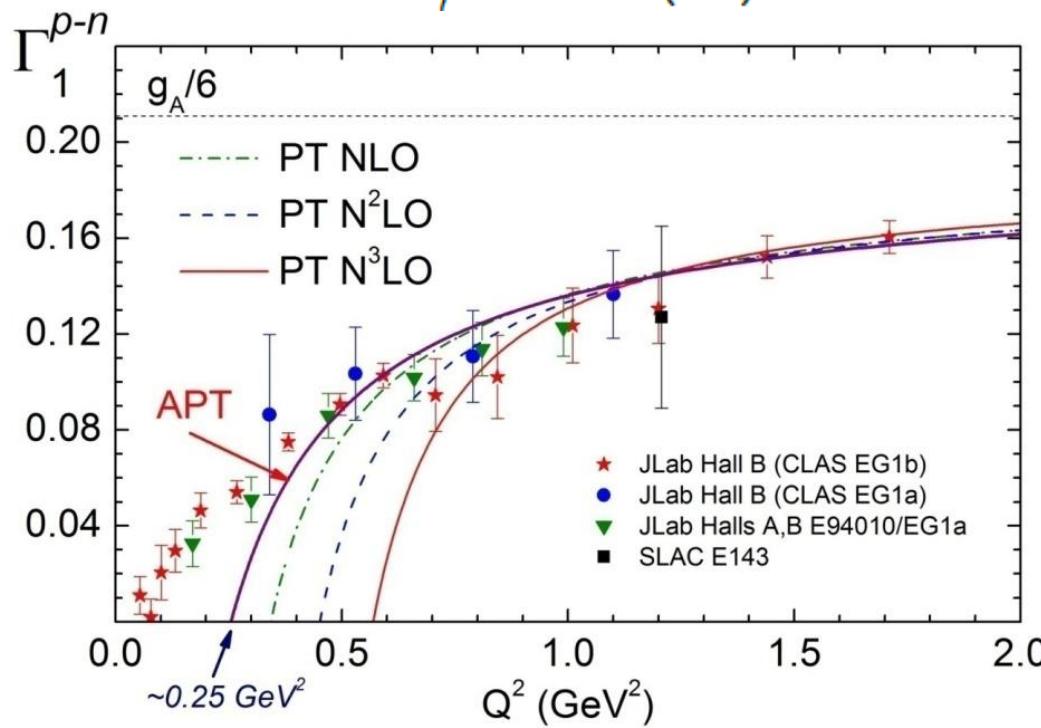
I d e a:

- Approximation (initial, convenient) breaks general properties
- Representation, which accumulates general properties
- Restoration of general properties => improved approximation

Пример

R.S. Pasechnik, D.V. Shirkov, O.V. Teryaev, O.P. Solovtsova, V.L. Khandramai,
Phys. Lett. B 706 (2012) 340

(CI=51)



APT allows to describe data down to low values of $Q^2 \sim 0.25 \text{ GeV}^2$ and gives stable extracted values of HT coefficient.



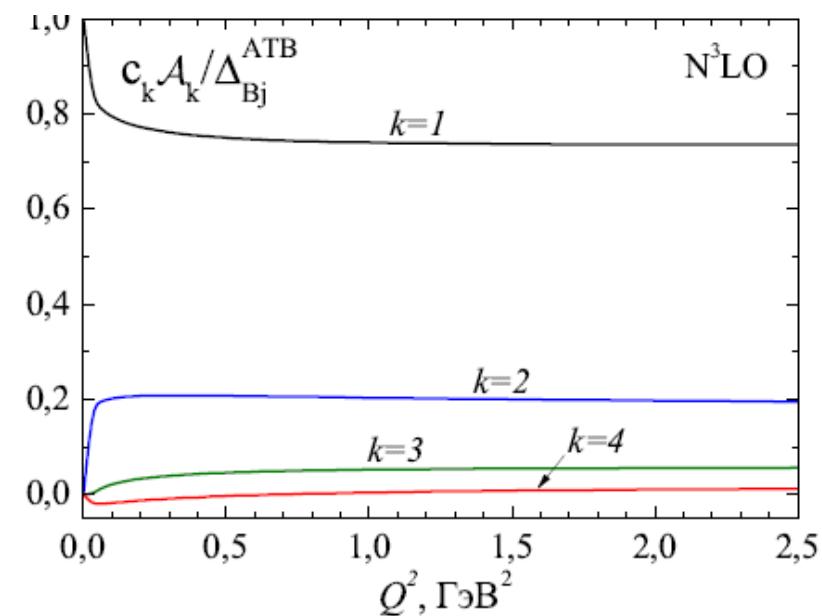
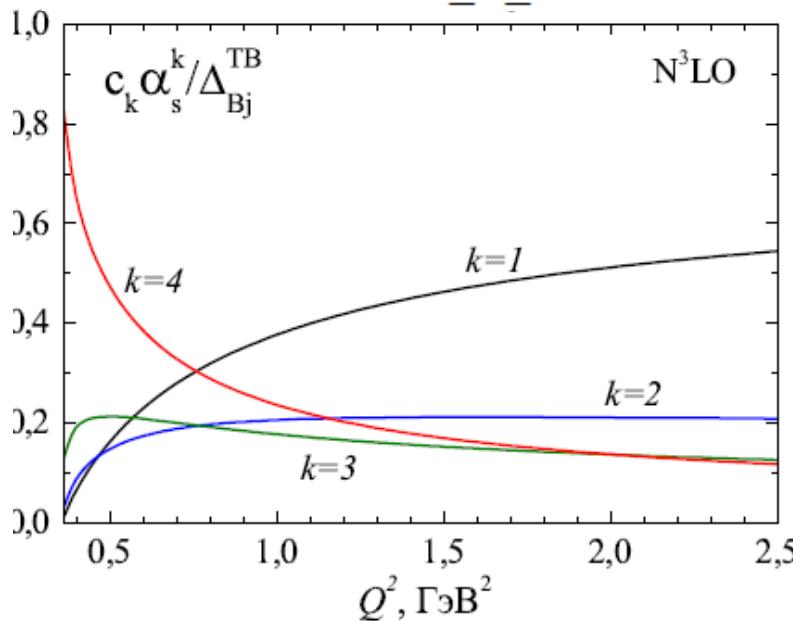
Order	Q^2_{\min}	$\mu_4, \text{ GeV}^2$	χ^2
2	0.5	-0.025±0.004	0.80
3	0.66	-0.012±0.006	0.59
4	0.71	0.005±0.008	0.51
ATB	0.47	-0.043±0.002	0.82

Сходимость

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \int_0^1 [g_1^p(x, Q^2) - g_1^n(x, Q^2)] dx = \frac{g_A}{6} (1 - \Delta_{Bj}(Q^2)) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{2i}^{p-n}}{Q^{2i-2}}$$

$$\boxed{\Gamma_1^{p-n}(Q^2 \rightarrow \infty) = \frac{g_A}{6}}$$

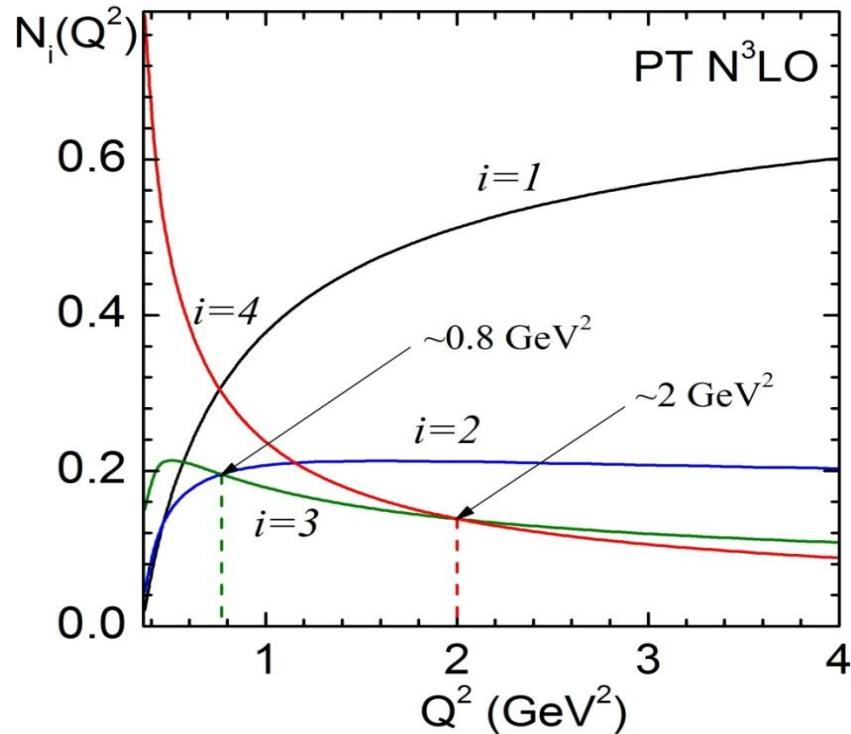
$$\Delta_{Bj}^{TB}(\alpha_s) \equiv \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \alpha_s^k = 0,318 \alpha_s + 0,363 \alpha_s^2 + 0,652 \alpha_s^3 + 1,804 \alpha_s^4$$



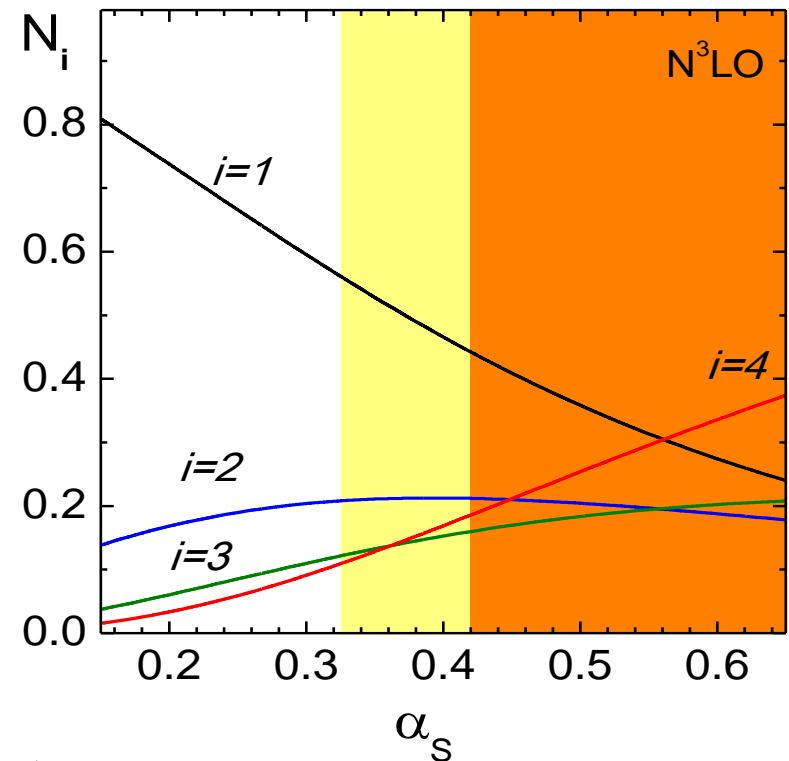
APT

$LO \sim 70\%, NLO \sim 20\%,$
 $N^2LO \sim 5\%, N^3LO \sim 1\%.$

$$N_i(Q^2) = \frac{c_i \alpha_s^i(Q^2)}{\Delta_{Bj}(Q^2)}$$



$$\Delta_{Bj}(\alpha_s) = c_1 \alpha_s + c_2 \alpha_s^2 + c_3 \alpha_s^3 + c_4 \alpha_s^4$$



✓ The fourth term becomes greater than the third at $Q^2 \sim 2 \text{ GeV}^2$

✓ The fourth term becomes greater than the third at $\alpha_s \sim 0.35$ and than the second at $\alpha_s \sim 0.45$

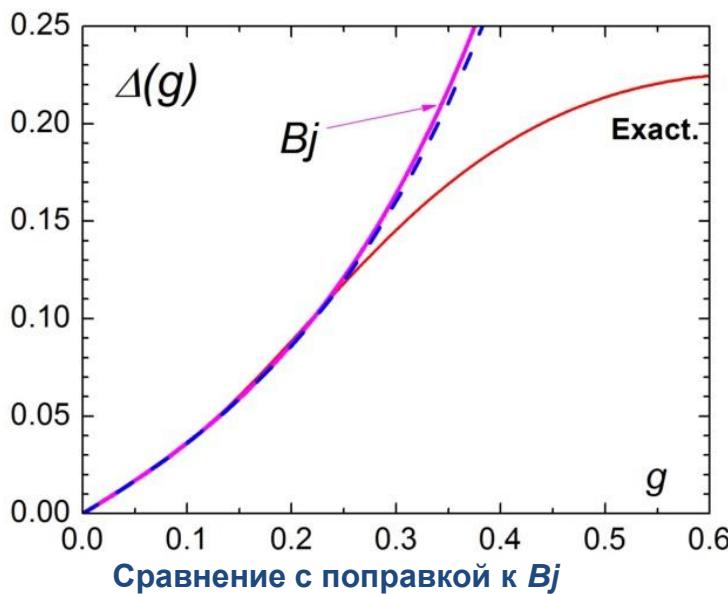
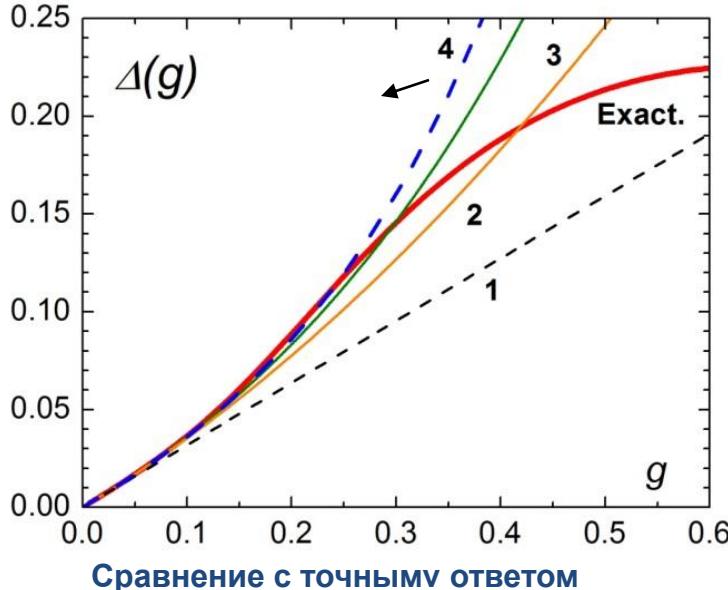
At $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ the dominant contribution comes from the four-loop term. This situation may be considered as an indication of the transition of PT series to the asymptotic regime.

Integral model $C(g)$

[D.I.Kazakov and D.V.Shirkov,
Fortsch. Phys. 28 (1980) 465]

$$C(g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{g}}{4} x \right)^2 \right]$$

$$\rightarrow \sum_k g^k C_k, \quad C_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2k+1/2)}{4^k \Gamma(k+1)}$$



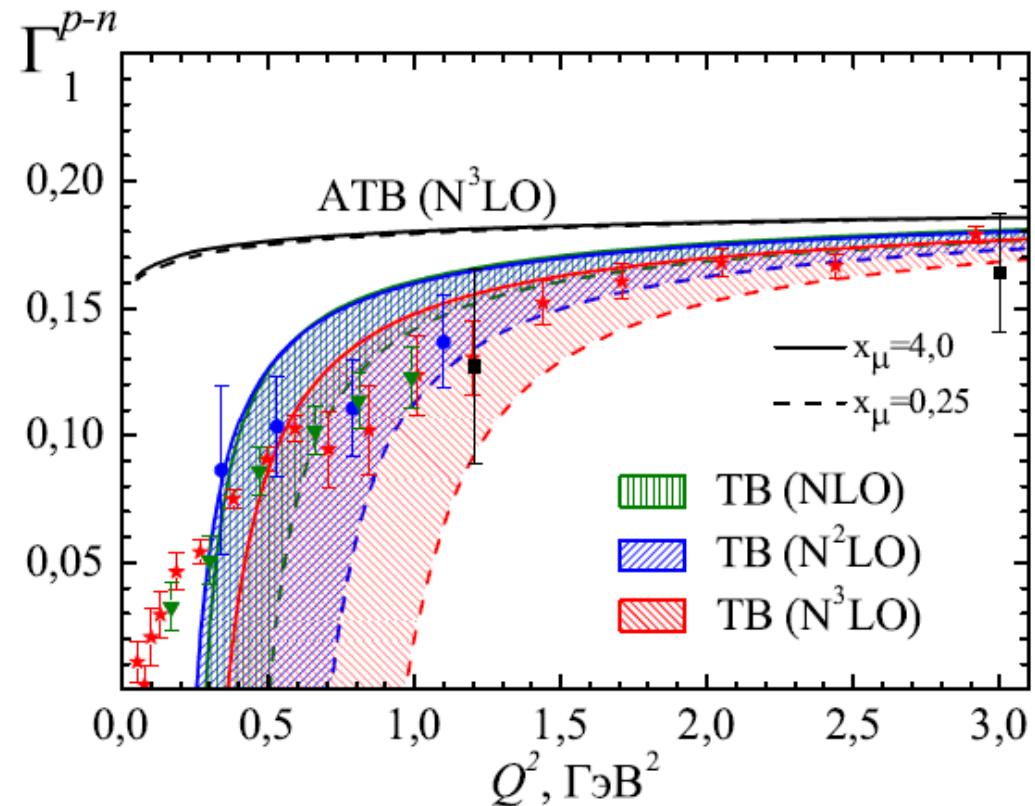
$$\begin{aligned} \Delta(g) &\equiv \frac{16}{3\pi} [C(g) - 1] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[g + 1.09g^2 + 2.25g^3 + 6.87g^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\Delta_{Bj}(\alpha_s) = \frac{1}{\pi} \left[\alpha_s + 1.14\alpha_s^2 + 2.05\alpha_s^3 + 5.68\alpha_s^4 + \dots \right]$$

The asymptotic nature of the QCD PT series is revealed at the four-loop level at $Q^2 \sim 1 - 2 \text{ GeV}^2$.

Схемная зависимость

$$x_\mu \equiv \mu^2 / Q^2 = 0,25 \div 4,0$$



Стабильность НТ

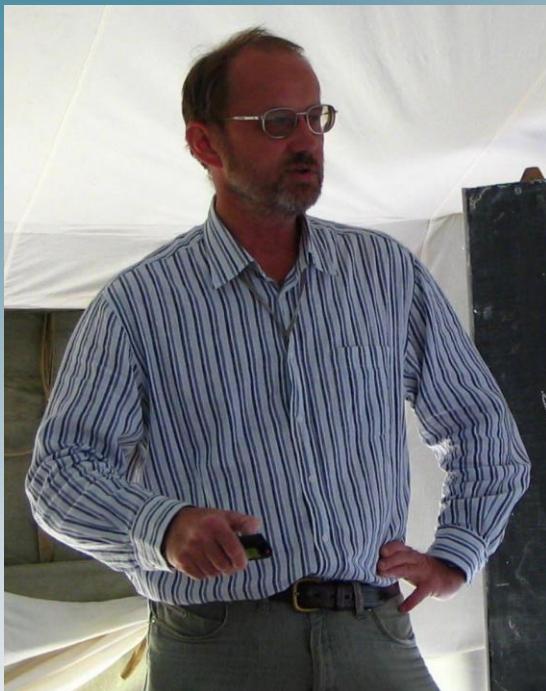
Метод	Q^2_{min} , ГэВ 2	μ_4^{p-n}/M^2	μ_6^{p-n}/M^4	μ_8^{p-n}/M^6	$\chi^2_{d.f.}$
Фитирование μ_4^{p-n}					
TB NLO	0, 5	-0, 028(3)	—	—	0, 80
TB N ² LO	0, 66	-0, 014(5)	—	—	0, 59
TB N ³ LO	0, 71	0, 006(7)	—	—	0, 51
ATB	0, 47	-0, 050(2)	—	—	0, 82
Фитирование $\mu_4^{p-n} + \mu_6^{p-n} + \mu_8^{p-n}$					
TB NLO	0, 27	-0, 026(9)	-0, 01(1)	0, 008(4)	0, 69
TB N ² LO	0, 34	0, 01(2)	-0, 06(4)	0, 04(2)	0, 67
TB N ³ LO	0, 47	0, 05(3)	-0, 17(9)	0, 12(6)	0, 46
ATB	0, 08	-0, 061(2)	0, 009(1)	-0, 0004(1)	0, 91



The PT does not lead to a stable results: the extracted coefficient μ_4 changes quite strongly between different orders of the PT expansion.

$$\mu_{4, \text{ATB}}^{p-n}(Q^2) = \mu_{4, \text{ATB}}^{p-n}(Q_0^2) \frac{\mathcal{A}_\nu^{(1)}(Q^2)}{\mathcal{A}_\nu^{(1)}(Q_0^2)},$$

From APT to FAPT: of Q^2 evolution



Александр Бакулов

(25.06.1956 - 28.09.2012)

$$[\alpha_{PT}(Q^2)]^\nu \Rightarrow \mathcal{A}_\nu(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\rho_\nu(\sigma) d\sigma}{\sigma + Q^2},$$
$$\rho_\nu(\sigma) = \text{Im} \left([\alpha_{PT}(-\sigma)]^\nu \right)$$

Global Fractional APT (FAPT)

Analytization of $\alpha_s^\nu: \mathcal{A}_\nu(Q^2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\nu(s)$

A.Bakulev & Mikhailov & Stefanis

A.P. Bakulev, S.V. Mikhailov, N. Stefanis,

Phys. Rev. D 72 (2005) 074014 (2005);

75 (2007) 056005

A.P. Bakulev, Phys. Part. Nucl. 40 (2009) 715.

$$M_N(Q^2) = \frac{[\alpha_s(Q^2)]^\nu}{[\alpha_s(Q_0^2)]^\nu} M_N(Q_0^2), \quad \nu(N) \equiv \gamma_{NS}^{(0)}(N) / 2\beta_0$$

$$M_N(Q^2) = \int_0^1 x^{N-1} F(x, Q^2) dx$$

nonsinglet one-loop
anomalous dimensions

In the framework of the APT this expression transforms as follows:

$$\mathcal{M}_N^{APT}(Q^2) = \frac{\mathcal{A}_\nu(Q^2)}{\mathcal{A}_\nu(Q_0^2)} \mathcal{M}_N^{APT}(Q_0^2)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_\nu^{LO}(Q^2) = [\bar{a}_{PT}^{LO}(Q^2)]^\nu - \frac{\text{Li}_\delta(t)}{\Gamma(\nu)},$$

Li_δ is the polylogarithm function



Гомель, технический университет, МЦПИ



✓ МЦПИ

Международный
Центра
Перспективных
Исследований

Создан по инициативе Д.В. Ширкова.



Визит Дмитрия Васильевича и Светланы Николаевны в Гомель (2002 г.)



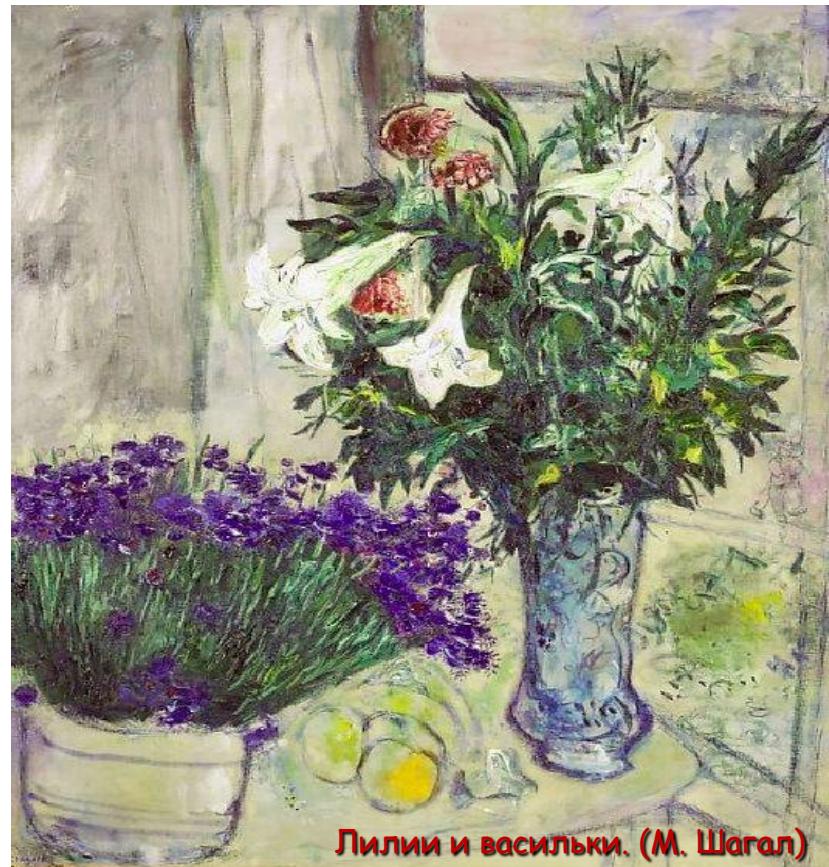


Ф.И.Федоров

Д.В. Ширков

На конференции «NPCS-2007» Д.В. Ширков вместе с Л.М. Томильчиком





Лилии и васильки. (М. Шагал)



В душу нам глядят цветы Земли
Добрыйм взглядом всех, кто с нами рядом,
Или же потусторонним взглядом
Тех, кто навсегда ушли.

Благодарю за внимание и призываю применять АТВ

Часть II.

Vacuum condensates from the electron-positron annihilation into hadrons data



Д. В. Ширков, В. Г. Кадышевский
и М. Гелл-Манн.

Outline

- The electron-positron annihilation into hadrons data.
- The method based on the Borel transform technique which is applied to the Adler function.
- How we look for whether there is an operator with dimension 2 or not.
- We discuss the difference that arises if an analytic invariant charge is used instead of the usual perturbative one.
- We look also how the hypothesis of vacuum dominance works.

Соотношение Гелл-Манна – Оакса – Реннера

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2(m_u + m_d) \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$$

[M. Gell-Mann, R.J. Oakes, B. Renner, Phys. Rev. 175 (1968)]

'Короткая струна'

Theoretical framework: R -ratio and D -function

R -ratio: $R(s) = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}}(s)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)}$, $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s) = \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}^2}{3s}$.

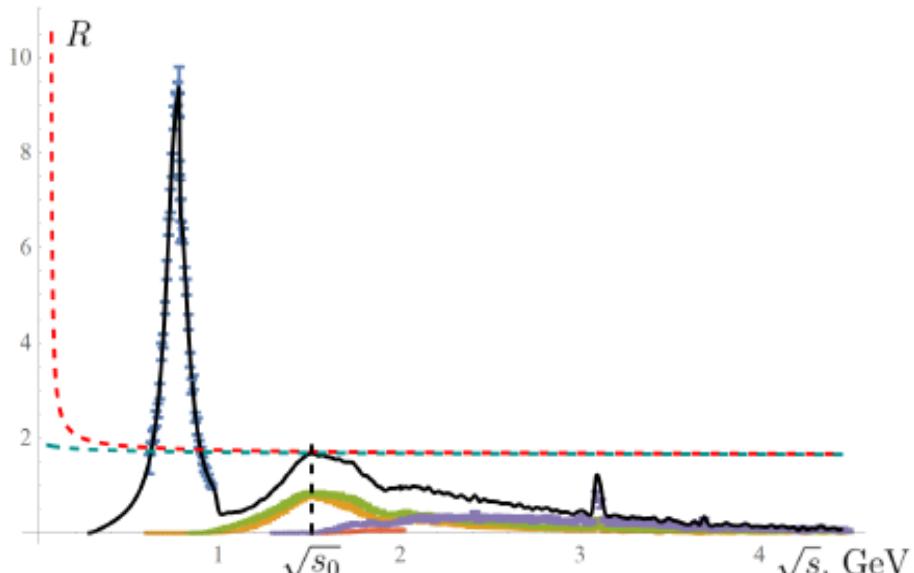


Fig. The full R -ratio in dependence on \sqrt{s} at $\sqrt{s} \leq 3$ GeV (black), the experimental data (blue, green, orange, violet and red dots), the theoretical representation R_{th} in the PT (red, dashed) and in the APT (blue, dashed). The continuum threshold is $s_0 \approx 1.52^2$ GeV².

Theoretical form: $R_{\text{th}}^{\text{PT/APT}}(s) = N_e \sum_q e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s^{\text{PT/APT}}(s)}{\pi} \right)$.

Dispersional D -function:

$$D_{\text{exp}}(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R_{\text{exp-th}}(s) ds}{(s + Q^2)^2}.$$

D -function in OPE framework with using PT approach:

$$D_{\text{PT+OPE}}(Q^2) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \Gamma(n) \frac{C_{2n}}{Q^{2n}} \right),$$

where $\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}$,

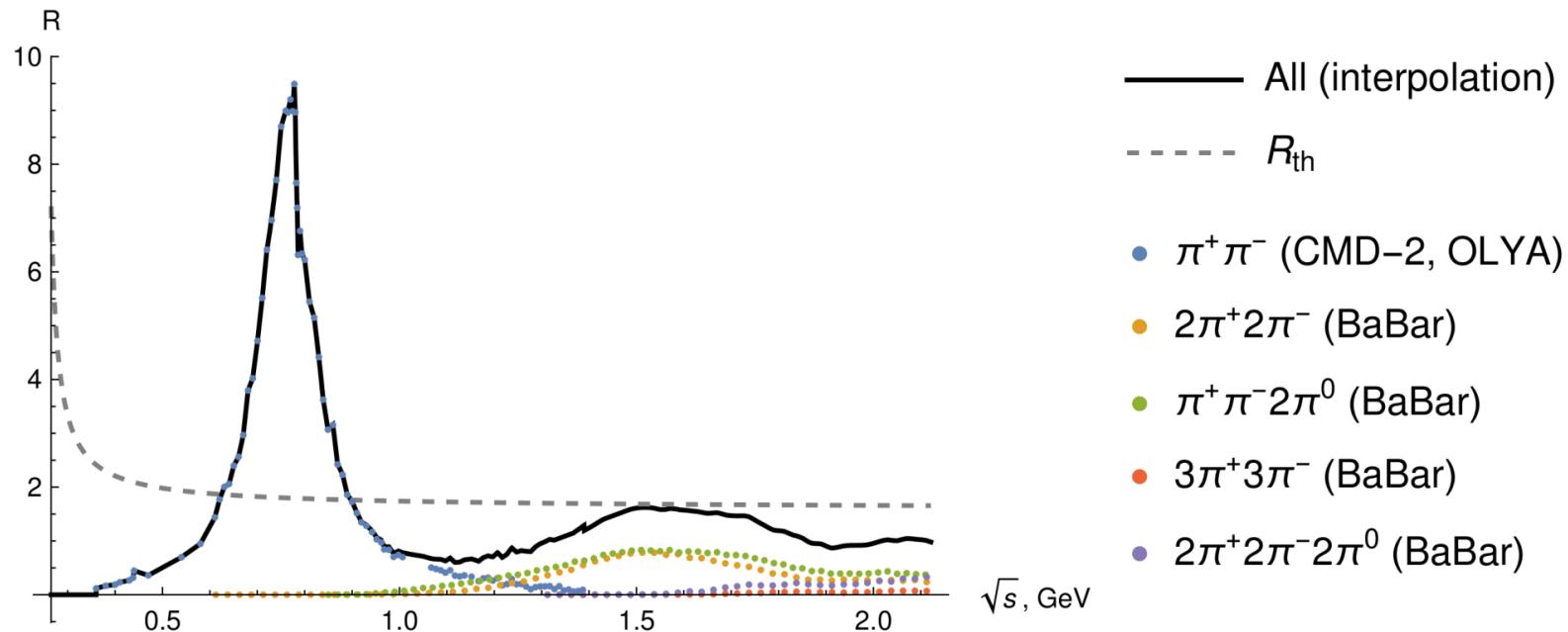
and APT approach:

$$D_{\text{APT+OPE}}(Q^2) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}_s(Q^2)}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \Gamma(n) \frac{\tilde{C}_{2n}}{Q^{2n}} \right),$$

where

$$\mathcal{A}_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda_{\text{APT}}^2)} - \frac{\Lambda_{\text{APT}}^2}{Q^2 - \Lambda_{\text{APT}}^2} \right].$$

Данные



$$a_\mu^{\pi^+\pi^-} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} K(s) R_{\pi^+\pi^-}(s),$$

$$a_\mu^{\text{CMD2}} = (368.83 \pm 2.21) \cdot 10^{-10}$$

$$a_\mu^{\text{KLOE12}} = (368.85 \pm 2.58) \cdot 10^{-10}$$

$$a_\mu^{\text{BESIII}} = (368.11 \pm 3.31) \cdot 10^{-10}$$

$$I_{dual}(s_0) \equiv \int_0^{s_0} ds R_{\text{exp}}(s)) = \int_0^{s_0} ds R_{\text{th}}(s).$$

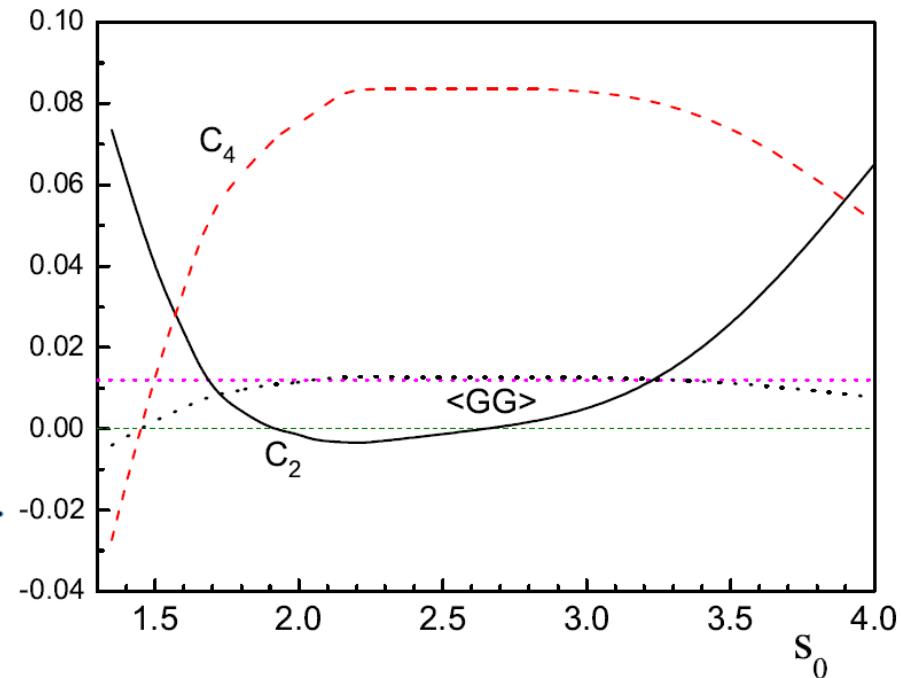
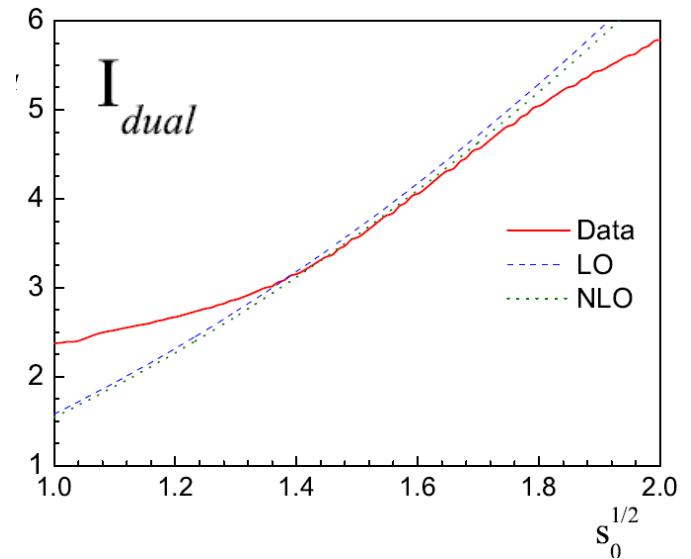
$$R_{\text{exp-th}}(s) = R_{\text{exp}}(s) \theta(s_0 - s)$$

$$+ R_{\text{th}}(s) \theta(s - s_0)$$

$$D_{\text{exp}}(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^\infty \frac{R_{\text{exp-th}}(s) ds}{(s + Q^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} D_{\text{PT+OPE}}(Q^2) &= \\ &= \frac{3}{2} \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \Gamma(n) \frac{c_{2n}}{Q^{2n}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\text{APT+OPE}}(Q^2) &= \\ &= \frac{3}{2} \left[1 + \frac{\mathcal{A}_s(Q^2)}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \Gamma(n) \frac{\tilde{c}_{2n}}{Q^{2n}} \right]. \end{aligned}$$



Borel transform (BT) and D -function

BT of D -function: $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [D_{\text{exp}}(Q^2)] = \Phi_{\text{exp}}(M^2) = \int_{4m_\pi^2}^{\infty} R_{\text{exp-th}}(s) \left(1 - \frac{s}{M^2}\right) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2},$

in **PT**: $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [D_{\text{PT+OPE}}(Q^2)] = \Phi_{\text{PT+OPE}}(M^2) = \frac{3}{2} \left(\frac{\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [\alpha_s(Q^2)]}{\pi} + \frac{C_2}{M^2} + \frac{C_4}{M^4} + \frac{C_6}{M^6} \right),$

in **APT**: $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [D_{\text{APT+OPE}}(Q^2)] = \Phi_{\text{APT+OPE}}(M^2) = \frac{3}{2} \left(\frac{\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [\mathcal{A}_s(Q^2)]}{\pi} + \frac{\tilde{C}_2}{M^2} + \frac{\tilde{C}_4}{M^4} + \frac{\tilde{C}_6}{M^6} \right).$

Equating both forms gives sum rules: $\Phi_{\text{exp}}(M^2) = \begin{cases} \Phi_{\text{PT+OPE}}(M^2), \\ \Phi_{\text{APT+OPE}}(M^2). \end{cases}$

The error of Borelized D -function: $\Delta \Phi_{\text{exp}}(M^2) = \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \Delta R(s) \left(1 - \frac{s}{M^2}\right) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2}.$

Table 1: The extracted values for the interval of $M^2 : [0.75, 3]$ GeV 2 in PT.

Λ_{PT} , GeV	C_2 , GeV 2	C_4 , GeV 4	$\frac{\langle \alpha_s GG \rangle}{\pi}$, GeV 4
0.250	-0.003 ∓ 0.015	0.084 ± 0.012	0.013 ± 0.002
0.300	-0.032 ∓ 0.016	0.093 ± 0.013	0.014 ± 0.002
0.350	-0.062 ∓ 0.015	0.100 ± 0.012	0.015 ± 0.002

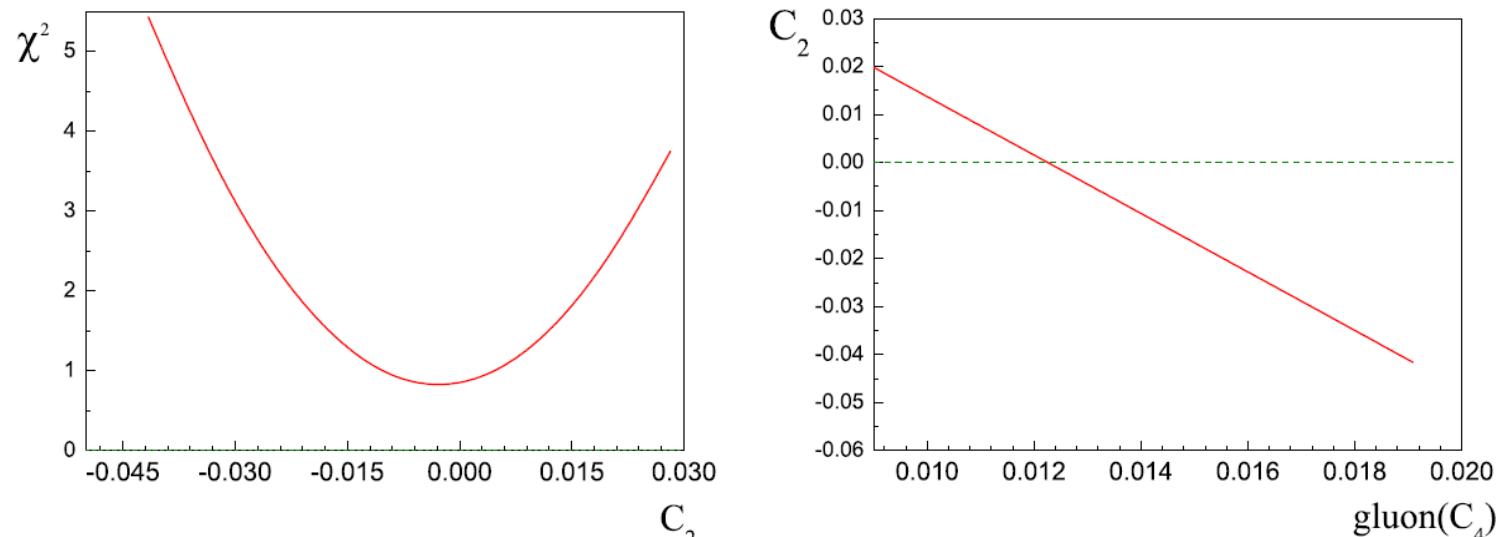


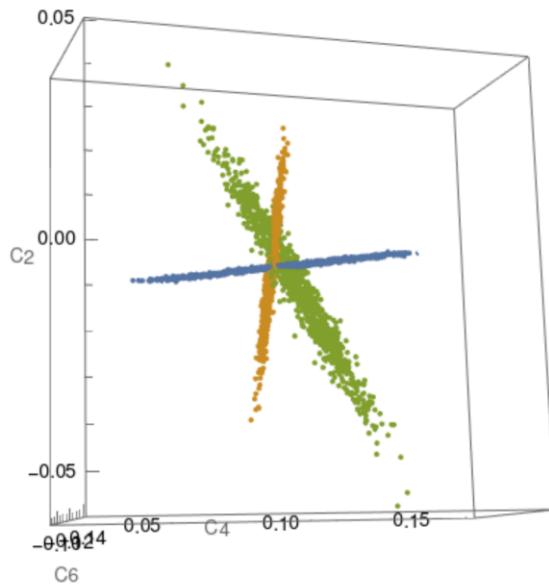
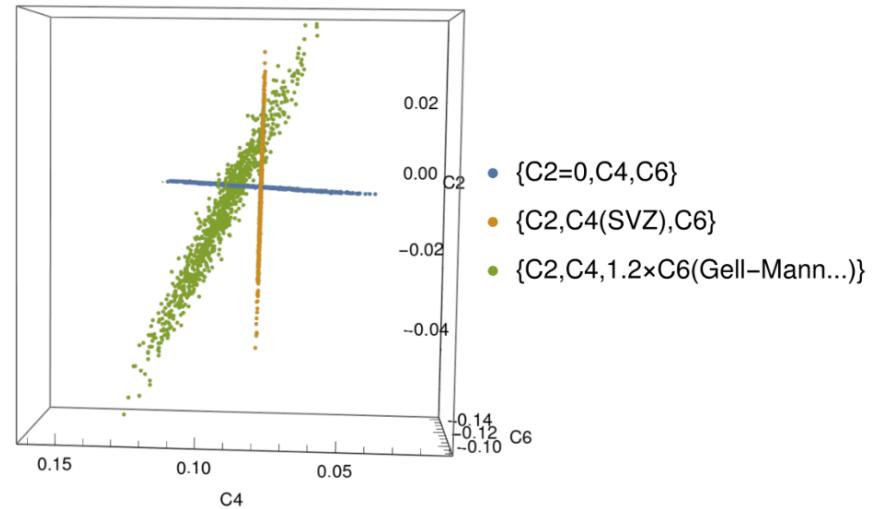
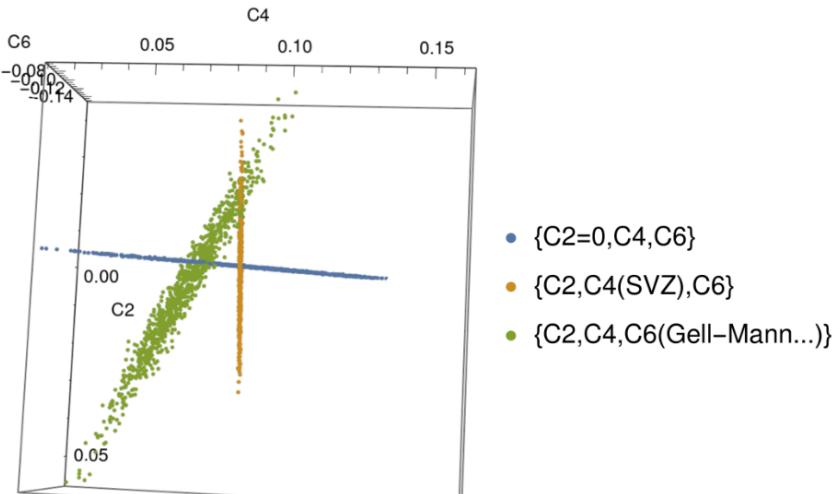
Table 2: The extracted values for the interval of $M^2 : [0.75, 3]$ GeV 2 in APT.

Λ_{APT} , GeV	\tilde{C}_2 , GeV 2	\tilde{C}_4 , GeV 4	$\frac{\langle \alpha_s GG \rangle}{\pi}$, GeV 4
0.277	0.022 ± 0.015	0.088 ± 0.012	0.013 ± 0.002
0.342	0.005 ± 0.016	0.099 ± 0.012	0.015 ± 0.002
0.412	-0.011 ∓ 0.016	0.110 ± 0.012	0.017 ± 0.002

Summary

- The Borel transform was implemented to the Adler function in the framework of the PT and the APT approaches and the numerical extraction of the coefficient C_2 and gluon condensate was performed using new experimental data on e^+e^- -annihilation.
- The coefficient C_2 which can be related to Zakharov's short string connected with the term kr in the Cornell potential has a negative sign and its compatibility with zero depends on the value of Λ in the PT and may happen only for the lowest values of the local gluon condensate. The dimension 2 operator is closer to zero for the APT.
- The qualitative properties are common – strong (anti)correlation between C_2 and local gluon condensate, although at different intervals of M^2 there are a bit different results for C_2 and the gluon condensate.

It is possible to increase the coefficient C_6 in OPE, and hence the quark condensate, by no more than 20%, that may be due to the correction to vacuum dominance of intermediate states. In this case the value of C_2 is compatible with zero, and C_4 is within reasonable values.



✓ It is possible to increase the coefficient C_6 in OPE, and hence the quark condensate, by no more than 20%, that may be due to the correction to vacuum dominance of intermediate states. In this case the value of C_2 is compatible with zero, and C_4 is within reasonable values.



И снова Благодарю за внимание!.