

---

---

# Поиск фрактальных структур в монте-карло $AuAu$ событиях при энергии 200 ГэВ $SePaC$ -методом

*Т.Г. Дедович<sup>a,b,1</sup>, М.В. Токарев<sup>a,b,2</sup>*

<sup>a</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

<sup>b</sup> Государственный университет Дубна, 141980, Россия

В работе проведен анализ фракталов, случайных и АМРТ  $AuAu$  событий с использованием  $SePaC$  метода. Изучаются поперечные импульсы  $p_t$  отрицательно заряженных частиц в пяти классах центральности. Показано, что фрактальные  $AuAu$  события с независимым делением имеют несколько узких пиков в спектре фрактальных размерностей  $D_F$ , выделенную группу лидирующих частиц по поперечному импульсу  $p_t$  для всех событий и удовлетворяют критериям, описывающим статистические свойства. Оставшиеся события обнаруживают экспоненциальное поведение  $p_t$ -спектра. Фрактальные  $AuAu$  события с зависимым делением имеют широкий пик в  $D_F$ -спектре и подавляются критериями.

PACS: 05.45.Df; 13.75.Cs

## Введение

Поиск критических явлений, связанных с изменением состояния вещества, является одной из приоритетных задач современной физики высоких энергий. Основная цель программы энергетического сканирования на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (RHIC) — установить структуру фазовой диаграммы (положение критической точки, границы фаз) ядерной материи. Указания на существование критической точки в виде немонотонной зависимости нет-протонного эксцесса, радиусов Хэнбери-Брауна-Твисса, коэффициентов выхода легких ядер и коэффициента масштабирования перемежаемости  $\nu$  от энергии обсуждаются в работе [1]. Авторами исследовалось степенное поведение факториальных моментов  $F_q$  порядка  $q = 3 - 6$  от  $F_2$  - момента 2-го порядка ( $F_q \propto F_2^{\beta_q}$ ). Установлен степенной закон поведения  $\beta_q \propto (q - 1)^\nu$  и показано, что величина  $\nu$  как функция энергии имеет минимум для центральных столкновений при  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  ГэВ. Предполагается, что наличие минимума имеет отношение к существованию критической точки, так как вблизи

---

<sup>1</sup>E-mail: dedovich@jinr.ru

<sup>2</sup>E-mail: tokarev@jinr.ru

границ фазовых переходов, системы демонстрируют фрактальное поведение, одним из проявлением которых является перемежаемость.

В работе [2] Дж.Бьеркен обратил внимание на новое направление изучения КХД на коллайдерах - поиск фрактальности партонных каскадов. Отметим, что разработка различных способов обнаружения фрактальности является актуальной задачей современной физики высоких энергий. В работе [3] предложен *SePaC*-метод фрактального анализа, позволяющий разделить события на два класса – фрактальные и нефрактальные. Для каждого фрактального события вычисляется размерность  $D_F$ , а для набора данных - спектр размерностей. Наличие узких пиков в распределении по  $D_F$  указывает на существование в наборе данных фракталов с различной структурой. Мы предполагаем, что проявлением нового состояния вещества, образующегося в столкновениях адронов и ядер высоких энергий, могут быть некоторые закономерности, установленные в рамках *SePaC*-метода. К ним относятся: немонотонное поведение зависимости доли фрактальных событий от энергии столкновения и центральности события, появление новых пиков или изменение их положения в спектре фрактальных размерностей.

В работе показана связь партонных ливней и фракталов, описаны этапы развития *SePaC*-метода и приведены результаты поиска фрактальных структур в монте-карло *AuAu* событиях при энергии 200 ГэВ.

### Фракталы как партонные ливни

Для анализа взаимодействия адронов и ядер широко используются различные монте-карло генераторы событий. Рассмотрим некоторые особенности механизма развития партонного ливня в конечном состоянии в генераторе AMPT [4]. На каждом шаге развития ливня партон  $a$  излучает два дочерних  $b$  и  $c$ . Кинематика процесса излучения описывается величиной доли энергии  $z$ , передаваемой дочерним партонам:  $E_b = zE_a$ ,  $E_c = (1 - z)E_a$ . Кинематический диапазон изменения значений величины  $z$  ( $z_- < z < z_+$ ) определяет диапазон угла излучения партона  $\Theta$  (угла раскрытия)  $\Theta_- < \Theta < \Theta_+$ . При этом углы раскрытия дочерних партонов упорядочены:  $\Theta_b, \Theta_c < \Theta_a$ .

Опишем сценарий развития партонного ливня, приводящий к фракталу с независимым делением частей. На первом шаге, партон  $a$  излучает два партона  $b$  и  $c$ . Диапазон возможных углов излучения ( $\Theta_+, \Theta_-$ ) определяет допустимые части для дочерних партонов в псевдобыстротного пространстве ( $\eta = -0.5 \ln(\tan(\Theta/2))$ ). На рисунке 1,а представлен процесс формирования фрактала с независимым делением частей. Пространство, допустимое для родительского партона, условно делится на три части (основание образования фрактала  $P = 3$ ). Для каждого партона, допустимый диапазон состоит из одной части (первой и третьей, соответственно). На каждом последующем шаге развития ливня процесс излучения повторяется. Таким образом, каждый из допустимых диапазонов в процессе деления сохраняет свою структуру и рассматривается

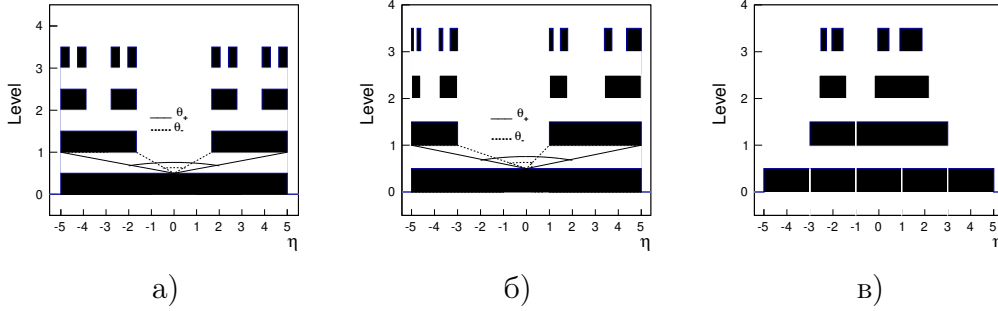


Рис. 1. Процесс формирования фракталов с независимым (а) и зависимым (б) и комбинированным (в) делением частей в  $\eta$  пространстве

как независимый объект. Формирования такого фрактала предполагает равную ширину допустимых диапазонов.

Ширина допустимых диапазонов в процессе развития ливня может быть различна, например, для разных типов кварков и глюонов. Этому соответствует образование фракталов с зависимым и комбинированным делением. На рисунке 1,б представлен процесс формирования фрактала с зависимым делением. Пространство, допустимое для родительского партона, разделено на пять частей ( $P = 5$ ). Для дочерних партонов допустимые диапазоны псевдобыстрот состоят из одной (первой) и двух частей (четвертой, пятой). На каждом последующем шаге излучение повторяется, сохраняя структуру заполнения  $\eta$ -пространства. Диапазон, состоящий из двух зависимых частей, рассматривается как единый объект. На рисунке 1,в представлен процесс формирования фрактала с комбинированным делением. Область  $\eta$ -пространства, допустимая для родительского партона, делится на пять частей ( $P = 5$ ). Для первого партона допустимый диапазон состоит из одной (второй) части, а для второго из двух (третьей, четвертой) частей. Отметим, что в процессе развития ливня образуется единый диапазон, дальнейшее деление которого будет комбинированным. Третья и четвертая части (второй диапазон) делятся зависимо, а первая - независимо.

#### Описание и этапы развития *SePaC* метода

В *SePaC* методе фрактальная размерность  $D_F$  определяется из анализа меры Хаусдорфа [5]  $M_\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_{i=1}^N l_i^\delta$ . Исследуемое множество точек покрывается  $N$  пробниками размера  $l_i \leq \epsilon$ . Оператор  $\inf$  означает минимальное значение меры, полученное по всем возможным покрытиям  $K$ . Размерность  $D_F$  определяется как значение  $\delta$ , при котором мера Хаусдорфа имеет конечное значение. Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением. Для вычисления фрактальной размерности, рассматриваются различные наборы распределений исследуемой величины. В каждом наборе количество бинов  $N_i$  в распределениях изменяется по степенному закону  $N_i = (P_{cov})^i$ , где  $P_{cov}$  - основание покрытия,  $i$  - номер распре-

деления, определяющий уровень фрактала  $N_{lev}$ . Для каждого распределения подсчитывается количество ненулевых бинов и определяется  $l_{j,i}$  - длина  $j$  элемента фрактала на  $i$ -ом уровне. Далее строятся уравнения  $\sum_{j=1}^{N_i} (l_{ji})^{d_{F,i}} = 1$ , где  $N_i$  - количество элементов фрактала на  $i$ -ом уровне. Значение  $d_{F,i}$  находится численным методом «деления отрезка пополам». Рассматривая различные покрытия с  $P_{cov}$  от 3 до  $P_{Max}$  (параметр метода) и типы фракталов (с независимым или зависимым делением) находим минимальное покрытие  $K$ , удовлетворяющее ограничению  $|d_{F,i} - \bar{d}_F|/\bar{d}_F < Dev$ , где  $Dev$  - параметр метода, а  $\bar{d}_F$  - среднее значение  $\{d_{F,i}\}$ . В этом случае, событие считается фракталом с размерностью  $D_F = \bar{d}_F$ .

В работах [6–8] показано, что эффективность восстановления характеристик фракталов ( $D_F$ ,  $N_{lev}$  и  $P$ ) составляет 99%, 91% и 84% для фракталов с независимым, зависимым и комбинированным делением частей, соответственно.

В работе [9] предложена двухступенчатая процедура для увеличения эффективности восстановления характеристик фракталов. Для анализа фракталов с независимым и зависимым делением учитывается степенной закон между количеством элементов фрактала и количеством бинов в распределениях набора. Для фракталов с комбинированным делением, степенная зависимость не учитывается (модифицированный метод).

В работе [10] для выделения фракталов из набора, содержащего в том числе фоновые события, применялся модифицированный *SePaC* метод. Показано, что фракталы реконструируются при  $P_{Max} \geq 3$  и  $Dev \leq 0.18$ . Установлено, что доля реконструированных фракталов зависит от параметров метода и не зависит от множественности событий. Случайные события не восстанавливаются как фракталы при  $P_{Max} = 3 - 10$ , а при  $P_{Max} > 10$  доля событий, реконструируемые как фракталы, зависит от множественности. Установленные различия используются как критерии для выделения фракталов.

В работе [11] анализировались неполные фракталы с независимым делением, полные фракталы с зависимым и комбинированным делением и случайные события. Неполные фракталы возникают в процессе развития ливня партонов в конечном состоянии, из-за существования порога излучения по виртуальности. В этом случае, партоны прекращают распадаться на различных уровнях и образуют неполную фрактальную структуру. Кроме этого, фрактальный характер партонных ливней может исказиться вторичными взаимодействиями и процессом адронизации. Показано, что процедура выбора параметров метода совпадает для полных и неполных фракталов.

В работе [12] фрактальный анализ проведен для различных фоновых событий, спектры которых описывались функцией Гаусса, экспоненциальной и степенной зависимостями. Установлены значения  $Dev$  и  $P_{Max}$ , при которых восстанавливается максимальное количество фракталов, а доля фоновых событий минимальна. Отмечается наличие узких пиков для фракталов и широких для всех фоновых событий в  $D_F$ -спектре. В

работе введены три критерия для подавления фона, характеризуют статистическую повторяемость структур. Критерий  $Cr_K : |\bar{\delta}_K| \leq K_{lim}$  ограничивает среднее относительное отклонение  $\bar{\delta}_K$  показателя  $K$  от значения  $i$ -го уровня в степенной зависимости  $N_i = (N_1)^K$ . Здесь  $N_1$  и  $N_i$  количество элементов на первом и  $i$ -ом уровне. Критерий  $Cr_D : |\bar{\delta}_D| \leq D_{lim}$  ограничивает среднее относительное отклонение  $\bar{\delta}_D$  количества делений элементов фрактала от количества делений базового элемента. Критерий  $Cr_P : P_{1,1} \leq P_{lim}$  ограничивает долю неделящихся элементов с одной заполненной частью  $P_{1,1}$ . При точной реконструкции фрактала значения  $\bar{\delta}_K$ ,  $\bar{\delta}_D$  и  $P_{1,1}$  равны нулю.

#### Данные для анализа

В данной работе, изучаются монте-карло  $AuAu$  события при  $\sqrt{s_{NN}}=200$  ГэВ/с, полученные с помощью генератора AMPT [4]. Анализируется поперечный импульс  $p_t$  отрицательно заряженных частиц, регистрируемых в интервале  $|\eta| \leq 0,5$ , для пяти классов центральности (0-5)%, (5-10)%, (10-20)%, (20-30)% и (30-40)%. Для сравнения используются наборы случайных событий и монте-карло фракталы.

В генераторе AMPT множественное рождение частиц в ядро-ядерных взаимодействиях рассматривается в предположении универсальности партоновых плотностей, эволюция которых происходит в соответствии с уравнением DGLAP. Жесткие и полужесткие процессы рассчитываются в рамках pQCD. Мягкие взаимодействия описываются феноменологической моделью множественного рождения струн. Взаимодействия партонов между собой и со средой включают неупругие взаимодействия, а также ливни в начальном и конечном состоянии. При отсутствии термализации ядерной материи неравновесная динамика многочастичной системы может быть описана в рамках мультифазной транспортной модели (AMPT). Она включает начальные партоновые, конечные адронные взаимодействия и переход между этими фазами. В работе использовался сценарий с плавлением струн. В начальном состоянии энергия столкновения распределена между мягкими возбужденными струнами, министруями партонов и нуклонами спектаторами. Далее происходит процесс плавления струн, в рамках которого мягкие струны фрагментируют (модель Лунда) в адроны с последующим переходом в партоны в соответствии с ароматом и спином их валентных кварков. Партоны, полученные в результате плавления мягких струн, и партоны из министруй участвуют в неупругом ZPC (Zhang's parton cascade) каскаде. Механизм коалесценции используется для объединения партонов в адроны. Получившиеся адроны участвуют во взаимодействии в конечном состоянии, описываемом релятивистской транспортной моделью ART [4].

#### Результаты фрактального анализа

Получены зависимости доли  $Prtn$  случайных и  $AuAu$  событий, реконструированных как фракталы, от параметра  $P_{Max}$  при  $Dev = 0,05$  [12]. Зависимость для  $AuAu$  событий имеет несколько режимов поведения: быстрый рост ( $P_{Max} = 3 - 10$ ), первое плато ( $P_{Max} = 6 - 11$ ), монотонное возрастание ( $P_{Max} = 12 - 95$ ) с выходом на второе плато ( $Prtn = 0,63$  при  $P_{Max} > 95$ ). Первое плато соответствует гипотезе независимого деления, а область дальнейшего роста - гипотезе зависимого деления. Установлено, что при  $P_{Max} < 15$  случайные события не восстанавливаются как фракталы, в отличие от  $AuAu$  событий. Это указывает на то, что некоторые  $AuAu$  события имеют фрактальную структуру.

Использование гипотезы независимого деления при  $Dev = 0,05$  и  $P_{Max}=100$  позволяет разделить  $AuAu$  события на фрактальные и нефрактальные. Показано, что спектр поперечных импульсов  $p_t$  для фрактальных событий имеет несколько режимов поведения, а для нефрактальных имеет экспоненциальный вид. Для всех классов центральности  $p_t$ -спектры аппроксимировались экспонентой в диапазоне  $[1, 2 - 6, 2]$  ГэВ/с. Изучалась зависимость  $\chi^2/N$  аппроксимации от параметра  $Dev$  при  $P_{Max} = 100$ . Установлено, что при малых значениях  $Dev$  (от 0,01 до 0,03) наблюдается плато, с последующим увеличением  $\chi^2/N$ . Максимальное значение  $Dev$  на плато считалось оптимальным, так как соответствует минимальному  $\chi^2/N$  и наибольшему количеству фрактальных событий. Установлено, что оптимальное значение  $Dev$  незначительно уменьшается (от 0,03 до 0,02), значение  $\chi^2/N$  увеличивается (от 1,8 до 7,9), а параметра наклона не изменяется ( $2,36 \pm 0,02$ ) с увеличением центральности.

На рис 2,а,б,в показаны результаты анализа всех  $AuAu$  событий с гипотезой независимого деления при  $P_{Max} = 100$  и оптимальных значениях  $Dev$  для каждого класса центральности. На рис.2,а показаны  $p_t$ -спектр фрактальных и нефрактальных событий. Нефрактальные события (синие точки) имеют экспоненциальный спектр до значений  $p_t = 6,2$  ГэВ/с, а спектр фрактальных событий (красные точки) имеет сложное поведение. На рис 2,б приведено распределение событий по фрактальной размерности  $D_F$ . Оно имеет два четко выраженных узких пика при  $D_F = 0,775$  и 0,85. Распределение событий на двумерной плоскости  $\{p_t, p_{tmax}\}$ , где  $p_{tmax}$  - максимальный поперечный импульс частицы в событии, а  $p_t$  - поперечный импульс частицы для фрактальных событий, показано на рис 2,в. Из рисунка видно, что фрактальные события имеют разряженную область, соответствующую группе лидирующих частиц в событии, в том числе, при малых значениях  $p_{tmax} < 4$  ГэВ/с. Такое поведение распределения связано с изломом  $p_t$ - спектра фрактальных событий. Распределение  $\{p_t, p_{tmax}\}$  для нефрактальных событий не имеет разряженной области, поэтому предполагаем, что фрактальные и нефрактальные события имеют различную динамику.

Нефрактальные  $AuAu$  события, полученные после применения гипотезы независимого деления, проанализированы  $SePaC$ -методом с гипотезой зависимого деления. Показано, что распределение по  $p_t$  фрактальных и нефрактальных событий сходно с распределениями событий, име-

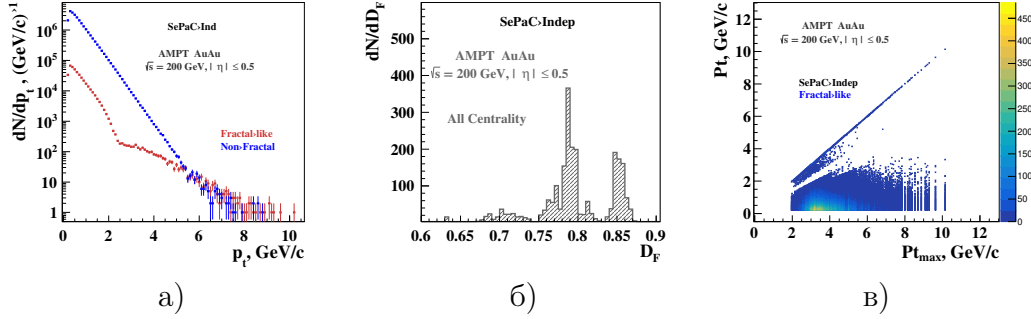


Рис. 2. Характеристики событий, полученные *SePaC* методом с гипотезой независимого деления:  $p_t$ -спектр (а),  $D_F$ -спектр (б) и  $\{p_t; p_{tmax}\}$ -распределение (в) для фрактальных *AuAu* событий.

ющих экспоненциальный спектр. Установлено также, что распределение по размерности  $D_F$  имеет широкий пик, характерный для фоновых событий [12].

В работе показано, что распределения по величинам  $\delta_K$ ,  $\delta_D$  и  $P_{1,1}$ , характеризующим статистическую повторяемость структур, для фракталов и случайных событий не имеют областей перекрытия. Введенные критерии  $Cr_K : |\bar{\delta}_K| \leq 0,25$ ,  $Cr_D : |\bar{\delta}_D| \leq 0,65$  и  $Cr_P : P_{1,1} \leq 0,35$ , позволяют подавить случайные события (остаются 9%, 2% и 17% событий, соответственно) и восстановить фракталы (подтверждаются 76%, 95% и 99% событий, соответственно). Установлено, что доли *AuAu* фрактальных событий с независимым делением, удовлетворяющие критериям  $Cr_K$ ,  $Cr_D$ ,  $Cr_P$  составляют 100%, 88% и 98%, соответственно. Введенные критерии подавляют *AuAu* фрактальные события с зависимым делением на уровне 88%. Таким образом, можно утверждать, что *AuAu* фрактальные события с независимым делением имеют одинаковые статистические свойства и могут быть интерпретированы как фракталы, а с зависимым делением фракталами не считаются.

## Заключение

В работе обсуждается возможность использования фрактального анализа для поиска нового состояния вещества, рожденного во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий. Представлено обоснование этапов развития *SePaC*-метода фрактального анализа для описания различных физических процессов. Проведен анализ фракталов, случайных и AMPT *AuAu* событий при  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ. Описаны физические процессы, используемые в модели для генерации AMPT *AuAu* событий. В качестве исследуемой величины рассматривался поперечный импульс отрицательно заряженных частиц для событий пяти классов центральности. Показано существенное различие в поведении доли случайных и *AuAu* событий, определяемых как фракталы, от параметра метода  $P_{Max}$ . Установлено, что гипотезы независимого и зависимого деления

соответствуют различным областям зависимости  $Prtn(P_{Max})$  для  $AuAu$  событий. Показано, что фрактальные  $AuAu$  события с независимым делением имеют несколько узких пиков в спектре фрактальных размерностей и выделенную группу лидирующих частиц по поперечному импульсу. Оставшиеся события обнаруживают экспоненциальное поведение  $p_t$ -спектра. Установлено, что фрактальные  $AuAu$  события с зависимым делением имеют широкий пик в  $D_F$ -спектре. Показано, что большинство фракталов и  $AuAu$  фрактальных событий с независимым делением (86%) удовлетворяют критериям, описывающих статистическую повторяемость структур на разных уровнях, а все случайные и  $AuAu$  фрактальные события с зависимым делением подавлены.

#### Список литературы

1. *Abdulhamid M. et al.* [STAR Collaboration] Energy Dependence of Intermittency for Charged Hadrons in Au+Au Collisions at RHIC // *Phys. Lett. B* — 2023. — V. 845 — P. 138165 — arXiv:2301.11062 [nucl-ex].
2. *Bjorken J. et al.* Fractal phase space as a diagnostic tool for high-energy multijet processes // *Phys. Rev. D* — 1992. — V. 45 — P. 4077.
3. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Method of systems of equations of P-adic coverages for fractal analysis of events // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2011. — V. 9. no. 6 — P. 552–566.
4. *Zi-Wei L., Che Ming K., Bao-An L., Zhang B., Subrata P.* Multiphase transport model for relativistic heavy ion collisions // *Phys. Rev. C* — 2005. — V. 72. — P. 064901.
5. *Hausdorff M.* Mass Constituents of a Flat Lattice Multiverse: Conclusion from Similarity between Two Universal Numbers, the Rocksalt-Type 2D Madelung Constant and the Golden Mean // *Math. Ann.* — 1918. — V. 79. — P. 157–179.
6. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Comparison of fractal analysis methods in the study of fractals with independent branching // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2013. — V. 10. no 6 — P. 481–490.
7. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Analysis of Fractals with Dependent Branching by Box Counting, P-adic Coverages and System of Equations of P-adic Coverages // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2013. — V. 10. no.6 — P. 491–500.
8. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Analysis of Fractals with Combined Partition // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2016. — V. 13. no.2 — P. 169–177.



9. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* A Two-Step Procedure of Fractal Analysis // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2016. — V. 13. no.2 — P. 178–189.
10. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Fractal Reconstruction in the Presence of Background // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2019. — V. 14. no.6 — P. 865–873.
11. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Reconstruction of the Dimension of Complete and Incomplete Fractals // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2019. — V. 16. no.3 — P. 240–250.
12. *Dedovich T.G., Tokarev M.V.* Criteria of Fractal Reconstruction and Suppressing Background Events with the SePaC Methods // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2021. — V. 18. no.1 — P. 93–106.