

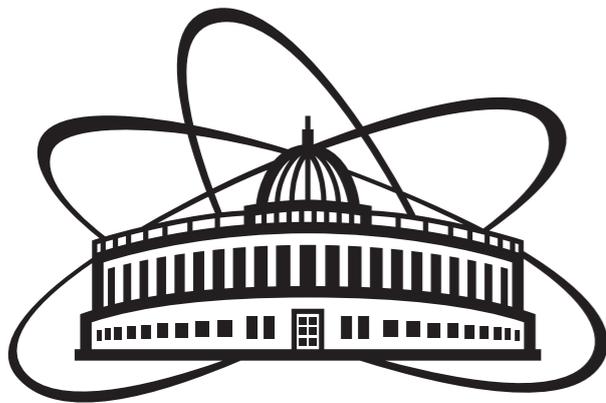


# Стандартная модель

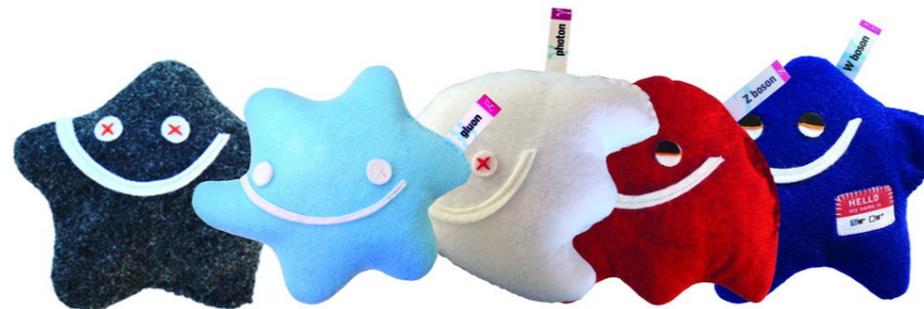
## И немного квантовой теории поля

Александр Бедняков, ОИЯИ

Байкальская школа  
по физике частиц и астрофизике 2023



JINR-ISU Baikal  
Summer School  
2023



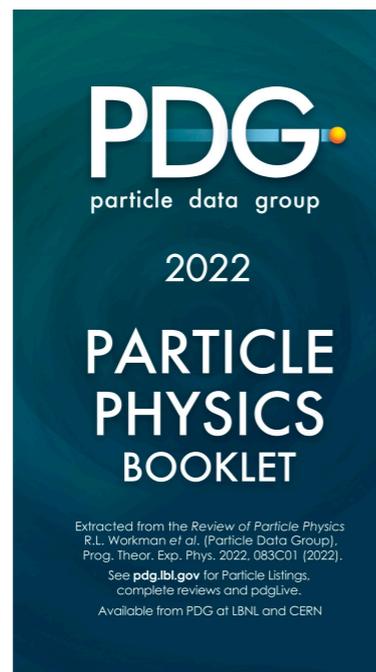
# План лекций

## Лекция 1

- Что такое Стандартная модель (СМ)?
- Кратко о Квантовой Теории Поля (КТП):
  - Поля и/или частицы?
  - А что с взаимодействиями?
  - Фундаментальные или эффективные?



Android App



## Лекция 2

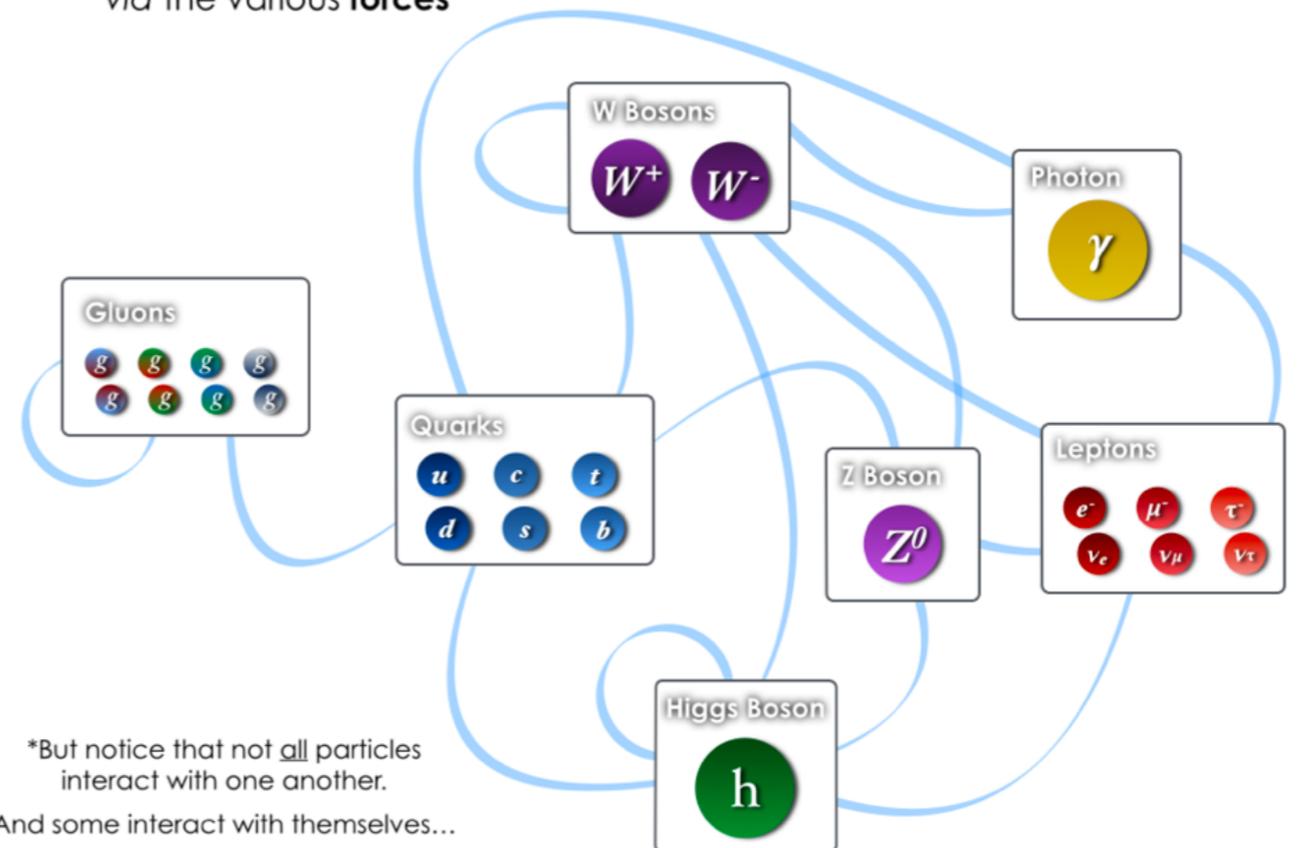
- Что мы знаем о сильных, слабых и электромагнитных взаимодействиях?
- Зачем нам поле/бозон Хиггса?
- Что предсказывает СМ и как это проверяют?
- Зачем же все ищут Новую физику?

# Что же такое Стандартная модель?

The Absolutely Amazing **Theory of Almost Everything\***

- ✓ Сформулирована на языке **Квантовой Теории Поля**
- ✓ Описывает **взаимодействия между** всеми известными элементарными частицами (бозонами и фермионами)
- ✓ **Проверена** с большой точностью в различных **экспериментах**

Crucially the **fundamental particles** are all **connected to one another** via the various **forces\***

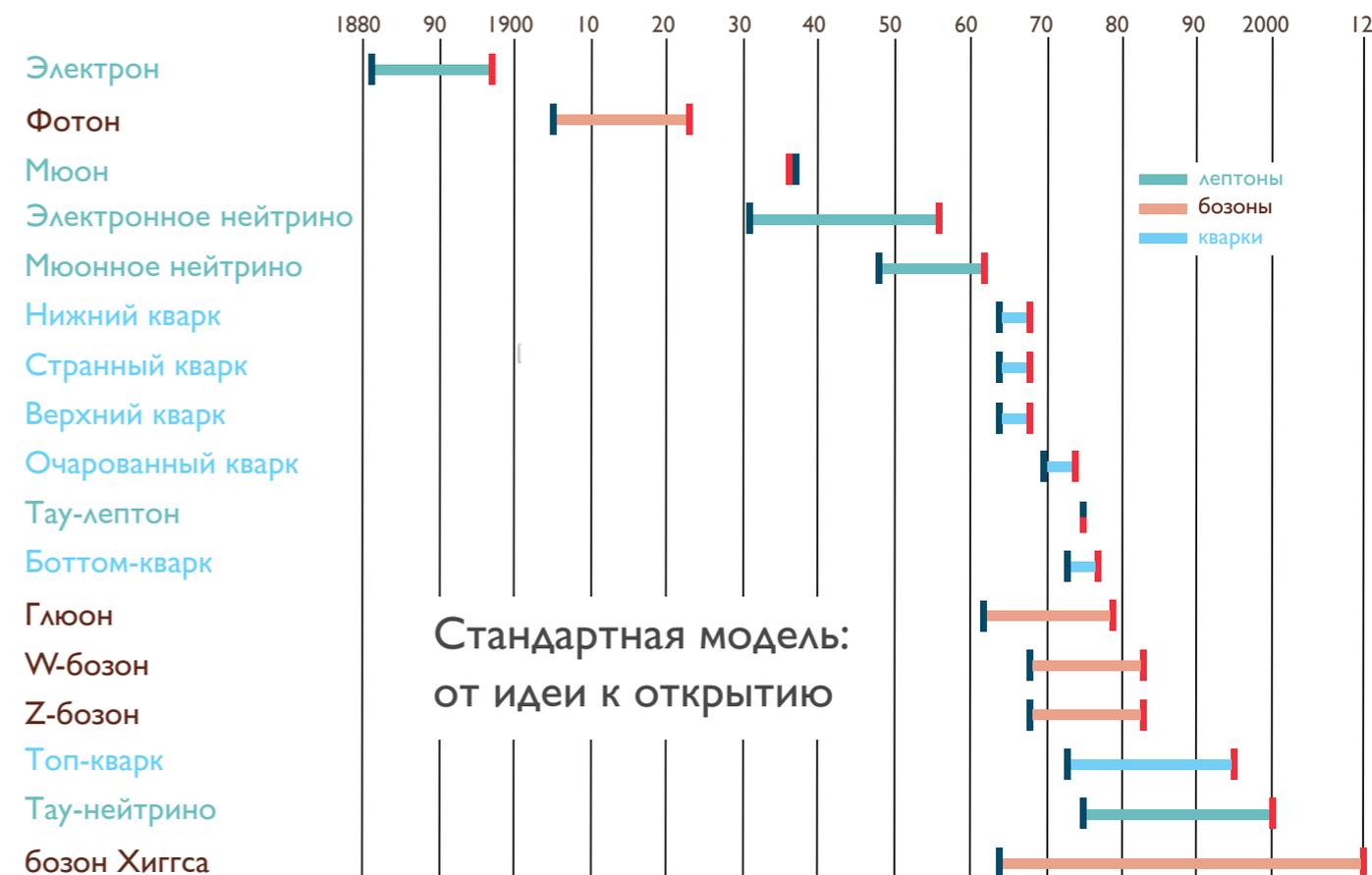


\*Абсолютно удивительная **теория почти обо всем** (перевод ChatGPT)

# Что же такое Стандартная модель?

The Absolutely Amazing **Theory of Almost Everything\***

- ✓ Сформулирована на языке **Квантовой Теории Поля**
- ✓ Описывает **взаимодействия между всеми известными элементарными частицами (бозонами и фермионами)**
- ✓ **Проверена с большой точностью в различных экспериментах**

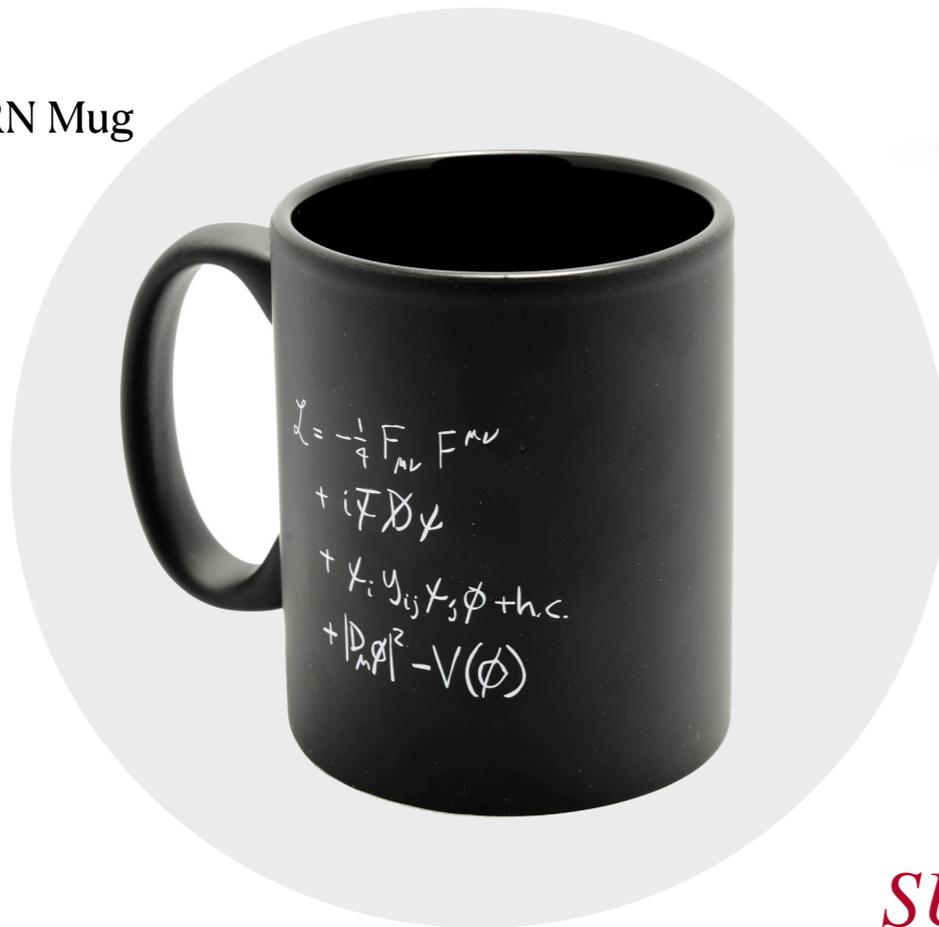


\* Абсолютно удивительная **теория почти обо всем** (перевод ChatGPT)

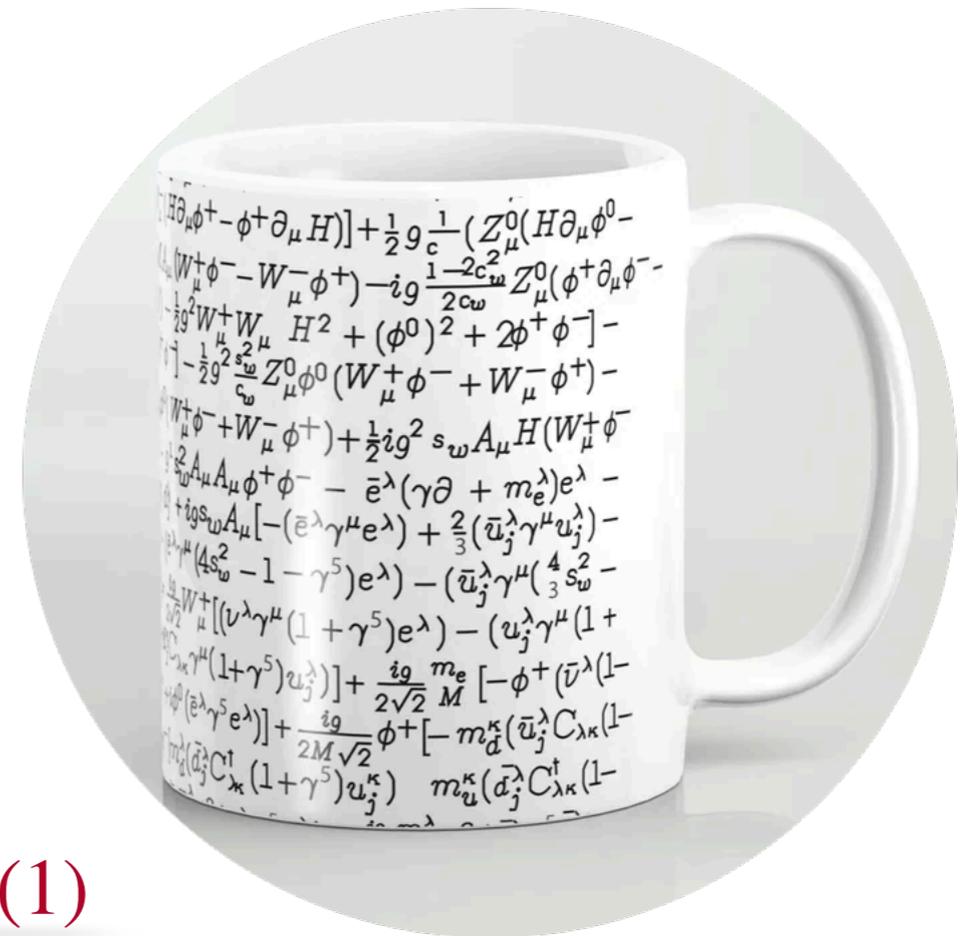
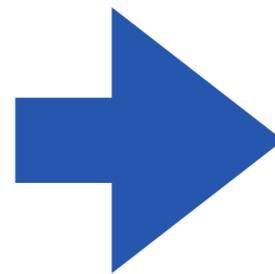
# СМ на языке КТП

Все взаимодействия описываются **лагранжианом**

CERN Mug



$$\mathcal{L} = ?$$



$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$$

Уникальность  $\mathcal{L}_{\text{СМ}}$  в том, что он построен на основе принципов

- **Симметрии (лоренцевой, калибровочной)**
- **Перенормируемости**

# Квантовая теория поля

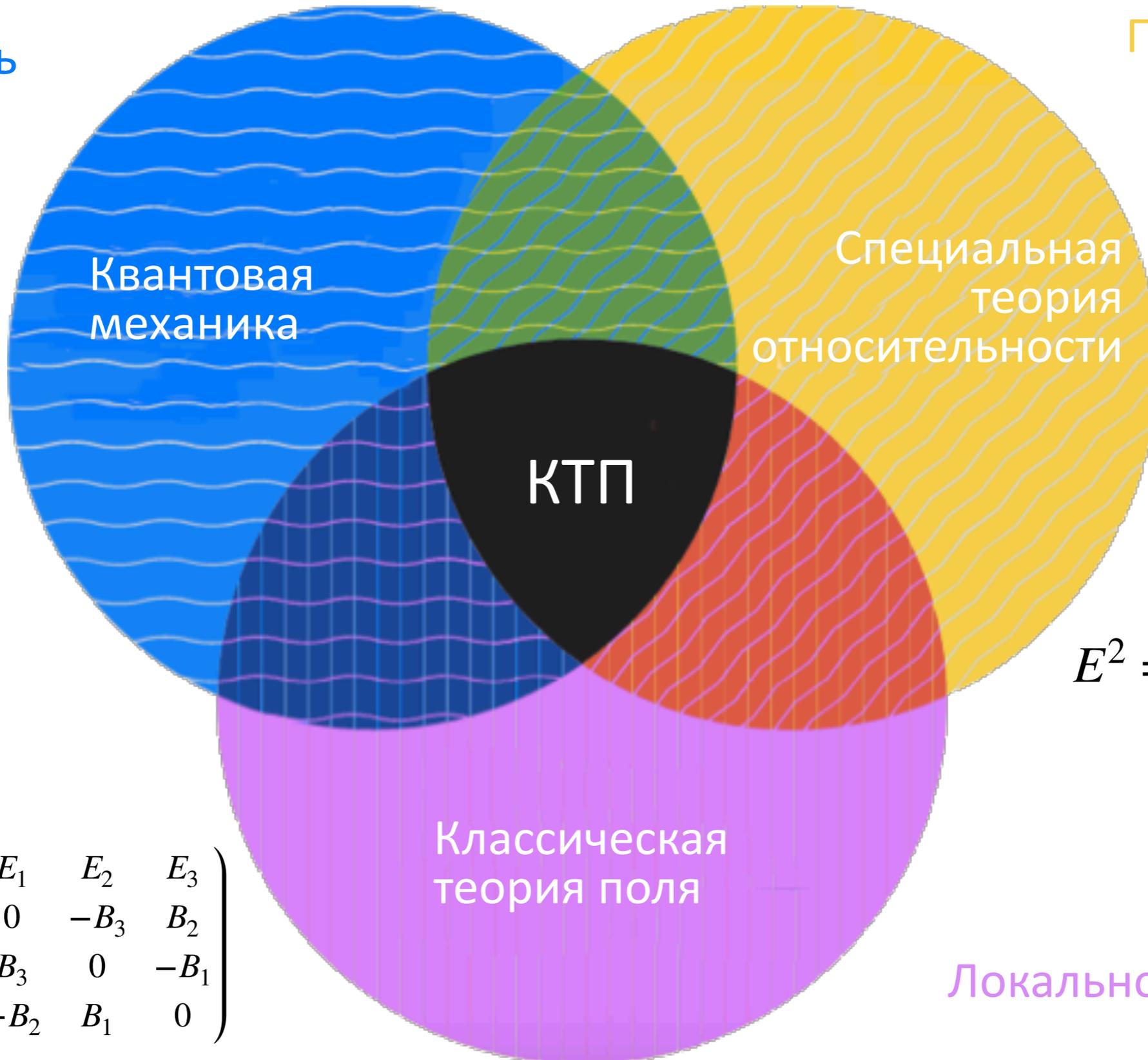
Унитарность

$$|\psi\rangle, H$$

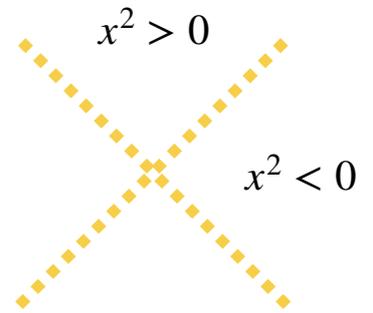
Квантовая  
механика

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$



Причинность



$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Локальность

# На завтрак...

Единицы, размерности и пр.

- Естественные единицы  $\hbar = c = 1$ . Все измеряем в единицах энергии:



$$[x] = [t] = -1$$

$$[p] = [E] = [m] = 1$$



$$\hbar \approx 6.6 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}$$

$$\hbar c \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ ГэВ} \cdot \text{см}$$

$$\hbar c \approx 200 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}$$

- Преобразование Фурье: “производная по координате”  $\approx$  “импульс”

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp f(p) e^{-ipx}$$

$$\partial_x f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp [-ip] f(p) e^{-ipx}$$

# На затравку...

## Преобразования Лоренца и лоренцевы инварианты

- Мы рассматриваем 4-х мерное пространство-время Минковского:

$$x_\mu = \{x_0, \mathbf{x}\}, \text{ где } x_0 = t - \text{ время}$$

$$p_\mu = \{p_0, \mathbf{p}\}, \text{ где } p_0 = E - \text{ энергия}$$

- Скалярное произведение двух 4-векторов (суммирование по индексам)

$$px = p_\mu x_\mu = g_{\mu\nu} p_\mu x_\nu = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, \text{ где } g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu, \text{ причем } x_\mu x_\mu = x'_\mu x'_\mu, \text{ откуда } \Lambda_{\mu\alpha} \Lambda_{\mu\beta} = g_{\alpha\beta}$$

- Квадрат 4х импульса свободной массивной частицы - инвариант

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 = \text{инвариант}$$

# (Очень) кратко о Теории Поля

Свободное скалярное поле: действие, лагранжиан....

- Простейшее скалярное поле - функция  $\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$ . Для описание динамики удобно использовать функционал (“функция”  $\rightarrow$  “число”)

действия = интеграл от лагранжиана (лоренцева инварианта)

$$S[\phi(x)] = \int d^4x \underbrace{\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}_{\text{лагранжиан}} = \int d^4x \underbrace{\left( \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \right)}_{\phi^\dagger \cdot K \cdot \phi}$$

- Аналогия с классической механикой - “матрас с бесконечным числом зависимых пружин”:  $\phi(t, \mathbf{x})$  - “отклонение от положения равновесия”

$$S[\phi(x)] = \int dt L(t), \text{ где } L = T - U, \text{ и } H = T + U$$

$$\text{Кинетическая энергия: } T = \int d\mathbf{x} |\partial_t \phi|^2$$

$$\text{Потенциальная энергия: } U = \int d\mathbf{x} \left( |\partial_x \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 \right)$$



# (Очень) кратко о Теории Поля

Что же можно “делать” с действием?

- Уравнения движения: принцип наименьшего действия

$$\underbrace{\mathcal{S}[\phi'(x)] - \mathcal{S}[\phi(x)]}_{\delta\mathcal{S}[\phi(x)]=0} = \int d^4x \left[ \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) \right]$$

Ищем конкретное  $\phi(x)$ , удовлетворяющее уравнениям движения; малое, но произвольное\* его изменение  $\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$  не меняет действия.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \Rightarrow \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right) = 0 \Rightarrow (\partial_\mu^2 + m^2) \phi = 0$$

Уравнение Клейна-Гордона-Фока для свободного скалярного поля

# (Очень) кратко о Теории Поля

Что же можно “делать” с действием?

- **Симметрии:**

Ищем такие преобразование  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$ , что для любых  $\phi(x)$

$$\mathcal{S}[\phi'(x)] = \mathcal{S}[\phi(x)]$$

- **Дискретные** преобразования:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(-\mathbf{x}, t) \quad - \text{четности (P)}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, -t) \quad - \text{обращение времени (T)}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi^\dagger(\mathbf{x}, t) \quad - \text{зарядового сопряжения (C)}$$

- **Непрерывные** преобразования:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

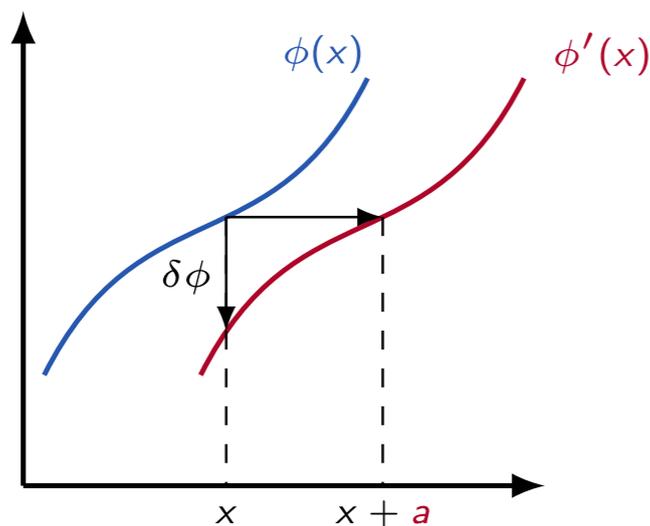
- **Законы сохранения:** глобальные симметрии и (первая) теорема Нётер

# (Очень) кратко о Теории Поля

Что же можно “делать” с **действием**?

- **Законы сохранения:** глобальные симметрии и (первая) теорема Нётер

Пространственно-временные



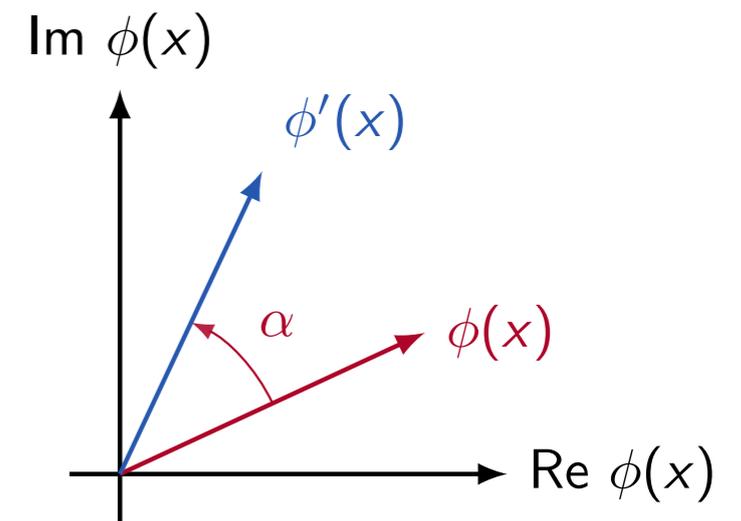
$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x+a) = \phi(x)$$

$$\delta\phi = -a_\mu \partial_\mu \phi$$

“Внутренние”



$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x)$$

$$\delta\phi = i\alpha\phi$$

# (Очень) кратко о Теории Поля

Что же можно “делать” с **действием**?

- **Законы сохранения:** глобальные симметрии и (первая) теорема Нётер  
Ищем конкретное  $\delta\phi(x)$ , являющееся преобразованием симметрии, которое для произвольного  $\phi(x)$  меняет действия на

$$\mathcal{S}[\phi'(x)] - \mathcal{S}[\phi(x)] = \int d^4x \partial_\mu K_\mu, \text{ сравнивая с}$$

$$\mathcal{S}[\phi'(x)] - \mathcal{S}[\phi(x)] = \int d^4x \left[ \left( \cancel{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) \right]$$

на уравнениях движения  $\phi(x) \rightarrow \phi(x)$  имеем

локальный закон сохранения:  $\partial_\mu J_\mu = 0$ , где  $J_\mu \equiv K_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi$

Глобальный закон сохранения:  $\frac{d}{dt} Q = 0 \quad Q = \int d\mathbf{x} J_0$

# Квантовое скалярное поле

Все еще свободное...

Релятивистский  
закон дисперсии

- Уравнения движения (Клейна - Гордона):

$$(\partial_\mu^2 + m^2)\phi = 0 \rightarrow (p^2 - m^2)\phi(p) = 0 \rightarrow p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm \omega_p$$

- Общее решение (линейная комбинация плоских волн)

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[ a^-(\mathbf{p})e^{-i(\omega_p t - \mathbf{p}\mathbf{x})} + b^+(\mathbf{p})e^{+i(\omega_p t - \mathbf{p}\mathbf{x})} \right]$$

содержит вклады как от “положительных” ( $E = +\omega_p$ ), так и от “отрицательных” ( $E = -\omega_p$ ) энергий.

нумерует  
“пружинки”

- **Квантовое поле**
  - динамическая переменная  $x_i(t) \rightarrow \phi(t, \mathbf{x})$
  - оператор  $\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \hat{\phi}(t, \mathbf{x})$
- “Проквантуем” каждый осциллятор: операторы рождения/уничтожения

$$[a_{\mathbf{p}}^-, a_{\mathbf{p}'}^+] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad [a_{\mathbf{p}}^\pm, a_{\mathbf{p}'}^\pm] = 0, \quad [a_{\mathbf{p}}^\pm, b_{\mathbf{p}'}^\pm] = 0, \dots$$

# Квантовое скалярное поле

## Как набор осцилляторов

- Гамильтониан набора осцилляторов:

$$\mathcal{H}_{osc} = \sum_j (\hat{p}_j^2 + \omega_j^2 \hat{x}_j^2), \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}, \quad [x_j, x_k] = [p_j, p_k] = 0$$

может быть выражен через **лестничные** операторы  $\sqrt{\omega} a^\pm = (\omega \hat{x} \mp \hat{p})$

$$\mathcal{H}_{osc} = \sum_j \frac{\omega_j}{2} (a_j^+ a_j^- + a_j^- a_j^+) = \sum_j \omega_j \left( \hat{n}_j + \frac{1}{2} \right)$$

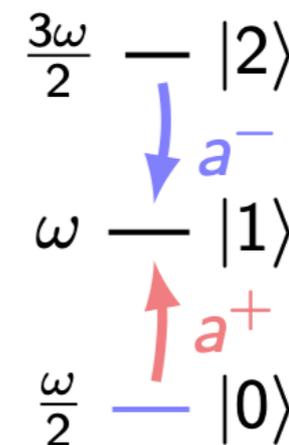
$\hat{n}_j = a_j^+ a_j^-$ ,  $[a_j^-, a_k^+] = \delta_{jk}$

Нулевые колебания

Оператор  $\hat{n}_j$  считает количество

квантов  $j$ -го осциллятора  $\hat{n}_j |n_j\rangle = n_j |n_j\rangle$

**Низшее состояние**  $|0\rangle$  :  $a_j^- |0\rangle = 0$



# Квантовое скалярное поле

Все еще свободное...но уже квантованное

- Пространство состояний: вакуум  $|0\rangle$

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad a_{\mathbf{p}}^- |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^- |0\rangle = 0, \quad a_{\mathbf{p}}^+ |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^+ |0\rangle = 0$$

+ возбуждения поля = частицы и античастицы

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_p} a_{\mathbf{p}}^+ |0\rangle, \quad |\bar{\mathbf{p}}\rangle \equiv (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_p} b_{\mathbf{p}}^+ |0\rangle, \quad |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle, |\mathbf{p}_1\bar{\mathbf{p}}_2\rangle, \dots$$

- Эти состояния являются собственными для операторов (базис)

$$\hat{H} = \int d\mathbf{p} \omega_p \cdot (n_{\mathbf{p}} + \bar{n}_{\mathbf{p}}) - \text{гамильтониана, где } n_{\mathbf{p}} \equiv a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}^-, \quad \bar{n}_{\mathbf{p}} \equiv b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}^-$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \cdot (n_{\mathbf{p}} + \bar{n}_{\mathbf{p}}) - \text{импульса, и заряда } \hat{Q} = \int d\mathbf{p} (n_{\mathbf{p}} - \bar{n}_{\mathbf{p}})$$

по аналогии с системой квантовых осцилляторов, но

$$\hat{Q}|0\rangle = \hat{H}|0\rangle = \hat{\mathbf{P}}|0\rangle = \dots = 0$$

# Квантовое скалярное поле

Все еще свободное...связь с **разными типами симметрий**

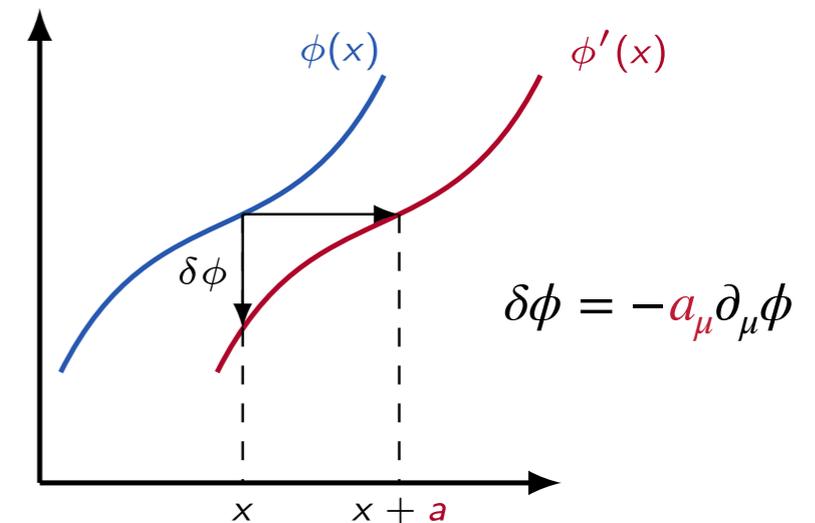
- Пространственно-временные (**скаляр**):

$$\hat{H} = \int d\mathbf{p} \omega_p \cdot (n_{\mathbf{p}} + \bar{n}_{\mathbf{p}}) - \text{нетеровский заряд}$$

для **трансляций** по **времени**  $a^0$

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \cdot (n_{\mathbf{p}} + \bar{n}_{\mathbf{p}}) - \text{нетеровский заряд}$$

для **трансляций** по **координатам**  $\mathbf{a}$

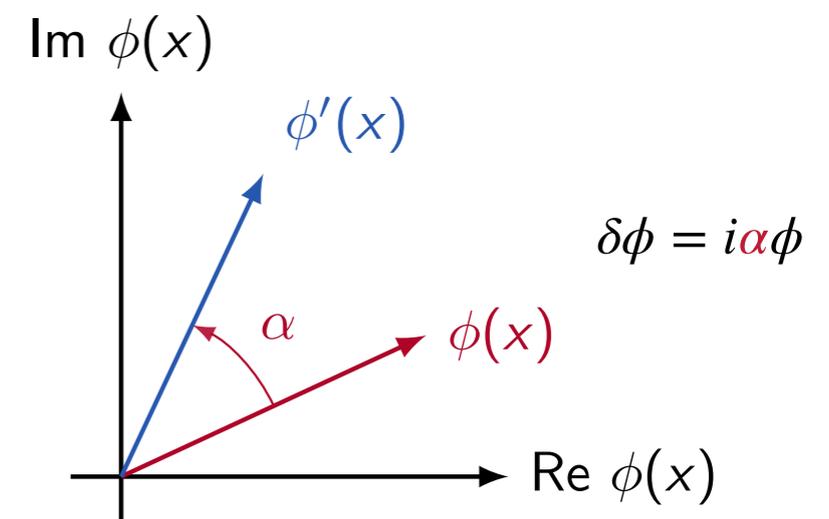


$$\partial_{\mu} J_{\mu}^a = 0 \quad \frac{d}{dt} Q^a = 0 \quad Q^a = \int d\mathbf{x} J_0^a$$

- Внутренние (**комплексное поле**):

$$\hat{Q} = \int d\mathbf{p} (n_{\mathbf{p}} - \bar{n}_{\mathbf{p}}) - \text{нетеровский заряд}$$

для **вращений** на угол  $\alpha$   
во **внутреннем** пространстве



\*бесконечные вклады удалены “нормальным упорядочиванием” при замене классических полей на квантовые

# Квантовое скалярное поле

Все еще свободное...маленькие, но важные замечания

- Вакуумное среднее квантового поля по (нашему) построению:

$$\langle \hat{\phi}(x) \rangle \equiv \langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = 0$$

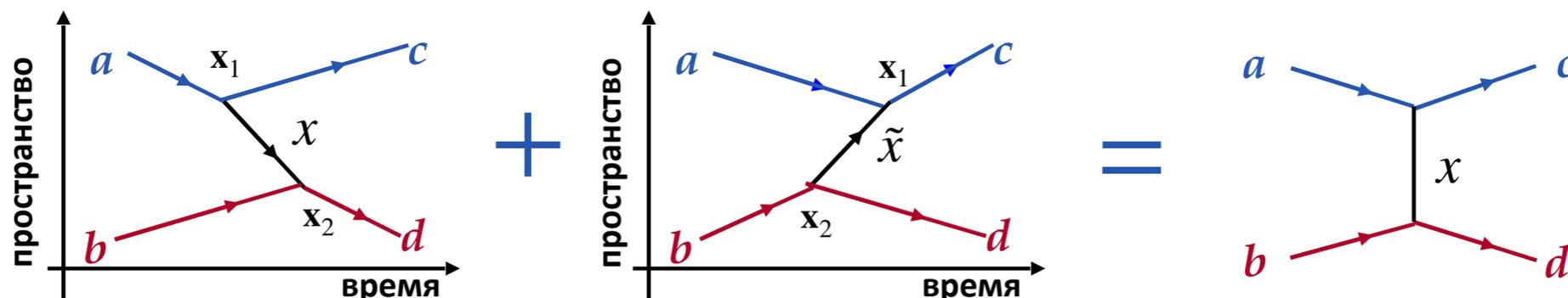
- “Волновая функция” 1ч-состояния с фиксированным  $\mathbf{x}$  в  $p$ -представлении:

$$\langle \mathbf{p} | \phi^\dagger(0, \mathbf{x}) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3(2\omega_q)} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$$

- Фейнмановский пропагатор:

$$\langle T \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) \rangle = \theta(t_1 - t_2) \langle \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle \phi^\dagger(x_1) \phi(x_2) \rangle$$

Одновременно описывает распространение **частицы из  $\mathbf{x}_1$  в  $\mathbf{x}_2$** , если  $t_2 > t_1$ , и **античастицы из  $\mathbf{x}_2$  в  $\mathbf{x}_1$**  при  $t_1 > t_2$

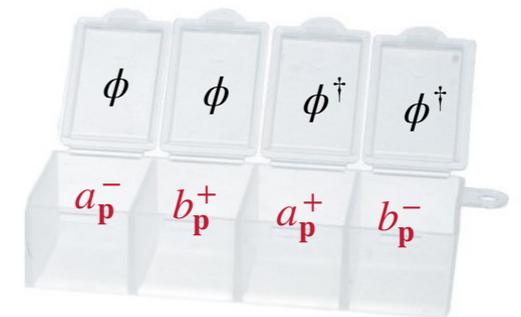


# Предварительные итоги...

- Мы рассмотрели общее решение уравнений движения для **невзаимодействующего комплексного** скалярного поля и **проквантовали** его как **бесконечный** набор **гармонических осцилляторов**

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[ a_{\mathbf{p}}^- e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^+ e^{+ipx} \right]$$

$$\hat{\phi}(x)^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[ b_{\mathbf{p}}^- e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^+ e^{+ipx} \right]$$



- Мы почти показали, что **операторы**, соответствующие **сохраняющимся** величинам (таким как  $\hat{H}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}$  и  $\hat{Q}$ ), можно получить из **нетеровских зарядов** подстановкой вместо классического поля его квантового аналога\*
- Мы **не** показали, что эти **операторы** являются **генераторами** соответствующих симметрий. Например, **унитарный оператор трансляций во времени и пространстве** задается в виде:

$$U(\mathbf{a}) \equiv e^{i\hat{H}a_0 - i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{a}} = e^{i\hat{P}_\mu a_\mu} : \hat{\phi}(x + \mathbf{a}) = U(\mathbf{a})\hat{\phi}(x)U^\dagger(\mathbf{a})$$

# Квантовые поля (обобщение)

Поля, описывающие сразу **несколько степеней свободы** (спин, цвет, ...), можно получить “добавляя индексы”  $\phi(x) \rightarrow \Phi_{\alpha}^j(x)$ , которые делятся на

пространственно-временные ( $\alpha$ ) и “внутренние” ( $j$ )

оператор уничтожения

гарантирует, что  $(\partial^2 + m^2)\Phi_{\alpha}^j = 0$

$$\Phi_{\alpha}^j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[ u_{\alpha}^s(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^-)^j e^{-ipx} + v_{\alpha}^s(\mathbf{p}) (b_{\mathbf{p}}^+)^j e^{+ipx} \right]$$

сумма по всем “поляризациям”

вектор “поляризации” для состояния  $s$

Преобразования Лоренца с параметрами  $\Lambda_{\mu\nu}$ :  $\Phi_{\alpha}^j(\Lambda x) = S_{\alpha\beta}(\Lambda)\Phi_{\beta}^j(x)$

“Внутренние” преобразования с параметрами  $a$ :  $\Phi_{\alpha}^j(x) = U^{jk}(a)\Phi_{\alpha}^k(x)$

**Пример:** кварки - **цветные фермионы**  $\Psi_{\alpha}^j(x)$ :  $(a_{\mathbf{p}}^-)^b$  уничтожает **синий** кварк в состоянии со спином  $s$ , которое характеризуется  $u_{\alpha}^s(\mathbf{p})$ .

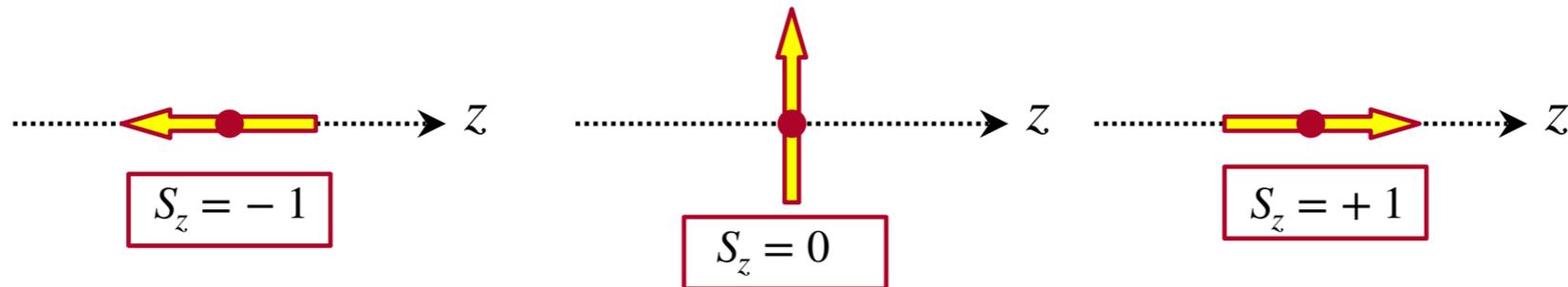
# (Массивные) векторные поля

- Заряженное векторное поле (например, W-бозон)

$$W_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[ \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) (a_\lambda^-(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_\lambda^+(\mathbf{p}) e^{+ipx}) \right]$$

- Массивная частица (спин 1) имеет 3 независимые поляризации:

$$\epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) \epsilon_\mu^{\lambda'}(\mathbf{p}) = -\delta^{\lambda\lambda'} \qquad \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) \epsilon_\nu^\lambda(\mathbf{p}) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}$$



- Выражения для  $\epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p})$  можно найти из решения уравнений движения, получаемых из Лагранжиана:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^\dagger W_{\mu\nu} + m^2 W_\mu^\dagger W_\mu, \quad W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

# Фермионы (спин 1/2)

- **Фермионное** поле (например, лептоны или кварки) имеет вид:

$$\psi_{\alpha}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[ u_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{p}) a_{\lambda}^{-}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + v_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{p}) b_{\lambda}^{+}(\mathbf{p}) e^{+ipx} \right]$$

- **Спиноры**  $u_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{p})$  и  $v_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{p})$  удовлетворяют матричным (4x4) уравнениям

$$(\hat{p} - m)_{\alpha\beta} u_{\beta}^{\lambda}(\mathbf{p}) = 0, \quad (\hat{p} + m)_{\alpha\beta} v_{\beta}^{\lambda}(\mathbf{p}) = 0, \quad \hat{p}_{\alpha\beta} = p_{\mu}(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$$

и соответствуют **частицам** ( $u^{\lambda}$ ) или **античастицам** ( $v^{\lambda}$ ) в двух  
ВОЗМОЖНЫХ **СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЯХ**  $\lambda$

- **Нормировка** (лоренц-инвариантная):

$$\bar{u}_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{p}) u_{\alpha}^{\lambda'}(\mathbf{p}) = 2m\delta^{\lambda\lambda'} \quad \bar{v}_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{p}) v_{\alpha}^{\lambda'}(\mathbf{p}) = -2m\delta^{\lambda\lambda'}$$

- **Лагранжиан:**

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_{\alpha} (i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}, \quad \bar{\psi}_{\alpha} = \psi_{\beta}^{\dagger} (\gamma^0)_{\beta\alpha}$$

# Фермионы (спин 1/2)

- **Фермионное** поле (например, лептоны или кварки) имеет вид:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_p}} [u^\lambda(\mathbf{p}) a_\lambda^-(\mathbf{p}) e^{-ipx} + v^\lambda(\mathbf{p}) b_\lambda^+(\mathbf{p}) e^{+ipx}]$$

- **Спиноры**  $u^\lambda(\mathbf{p})$  и  $v^\lambda(\mathbf{p})$  удовлетворяют матричным (4x4) уравнениям

$$(\hat{p} - m) u^\lambda(\mathbf{p}) = 0, \quad (\hat{p} + m) v^\lambda(\mathbf{p}) = 0, \quad \hat{p} = p_\mu (\gamma^\mu)$$

и соответствуют **частицам** ( $u^\lambda$ ) или **античастицам** ( $v^\lambda$ ) в двух возможных **спиновых состояниях**  $\lambda$ .

- **Гамма-матрицы Дирака**  $\gamma^\mu$  удовлетворяют алгебре Клиффорда:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} 1$$

- **Принцип Паули:**  $[a_\lambda^-(\mathbf{p}), a_{\lambda'}^+(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ ,  $[a_\lambda^-(\mathbf{p}), a_{\lambda'}^-(\mathbf{p}')]_+ = 0$

# Левые или правые? Киральность или спиральность?

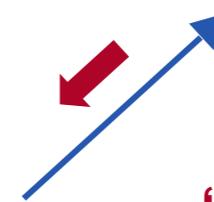
- Можно выбрать в качестве **двух независимых** решений для **частиц** спиноры  $u_{\uparrow}(\mathbf{p}), u_{\downarrow}(\mathbf{p})$  соответствующие двум возможным значениям **спиральности** - **проекции** спина  $\mathbf{s}$  на направление импульса  $\mathbf{p}$

$$h = 2 \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|, \quad h u_{\uparrow} = + u_{\uparrow}, \quad h u_{\downarrow} = - u_{\downarrow}$$

Сохраняется  
для свободной  
частицы, но **не**  
**лоренц-инвариант**



“правые”



“левые”

Массивную частицу можно “**обогнать**” и поменять направление импульса (но не спина) так что  $h \rightarrow -h$ !

- **Спиральность** для **безмассовой** частицы одинакова для всех наблюдателей и **совпадает\*** с **Киральностью**:

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \Rightarrow [\gamma_{\mu}, \gamma_5]_{+} = 0, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5^{\dagger} = \gamma_5,$$

$$\gamma_5\psi_L = -\psi_L, \quad \gamma_5\psi_R = +\psi_R \text{ - и они тоже “правые” и “левые”!}$$

# Левые или правые? Киральность или спиральность?

- В дираковском представлении матриц Дирака:)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}$$

спиноры для **массивных** частиц  $u^\lambda$  и античастиц  $v^\lambda$  с положительной  $\lambda = +1$  и отрицательной  $\lambda = -1$  **спиральностью** представимы в виде линейной комбинации **левых** и **правых киральных компонент**

$$u_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 - \lambda \frac{p}{E+m} \\ \chi_\lambda \\ -\chi_\lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \frac{p}{E+m} \\ \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

$$v_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 - \lambda \frac{p}{E+m} \\ \chi_{-\lambda} \\ \chi_{-\lambda} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \frac{p}{E+m} \\ -\chi_{-\lambda} \\ \chi_{-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\beta_+ = \sqrt{E+m}$$

$$\mathbf{p} = p(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

# Левые или правые? Киральность или спиральность?

- В дираковском представлении матриц Дирака:)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}$$

спиноры для **массивных** частиц  $u^\lambda$  и античастиц  $v^\lambda$  с положительной  $\lambda = +1$  и отрицательной  $\lambda = -1$  **спиральностью** представимы в виде линейной комбинации **левых** и **правых киральных компонент**

$$u_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 - \lambda \frac{p}{E+m} \\ \chi_\lambda \\ -\chi_\lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \frac{p}{E+m} \\ \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

$$v_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 - \lambda \frac{p}{E+m} \\ \chi_{-\lambda} \\ \chi_{-\lambda} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\beta_+ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \frac{p}{E+m} \\ -\chi_{-\lambda} \\ \chi_{-\lambda} \end{pmatrix}$$

- В безмассовом пределе  $m \rightarrow 0$

$$P_L u_\uparrow = 0, \quad P_R u_\downarrow = 0 - \text{для частицы спиральность} = \text{киральность}$$

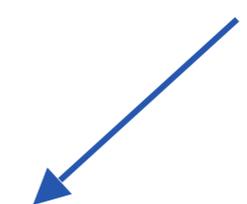
$$P_R v_\uparrow = 0, \quad P_L v_\downarrow = 0 - \text{для античастицы спиральность} = - \text{киральность}$$

# Киральность и масса...

- **Любой** спинор можно разбить на **левую и правую киральные** компоненты

$$\psi = \psi_L + \psi_R$$

масса Дирака



- **Лагранжиана дираковского поля** в компонентах

$$\mathcal{L}_D = \underbrace{i(\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R)}_{\text{“сохраняет киральность”}} - \underbrace{m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)}_{\text{“смешивает компоненты”}}$$

- При  $m = 0$  компоненты  $\psi_L$  и  $\psi_R$  - **независимые** степенями свободы.

- Существует альтернативная возможность: **масса Майорана**.

Операция **зарядового сопряжения**  $\psi \rightarrow \psi^c = i\gamma^2 \psi^*$  меняет **киральность** спинора и можно написать ( $\psi_M = \psi_L + \psi_L^c$ ):

$$\mathcal{L}_M = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^c) - \frac{m}{2}(\bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L) = \frac{1}{2} \bar{\psi}_M (i\hat{\partial} - m) \psi_M$$

Может ли майорановская частица нести заряд?

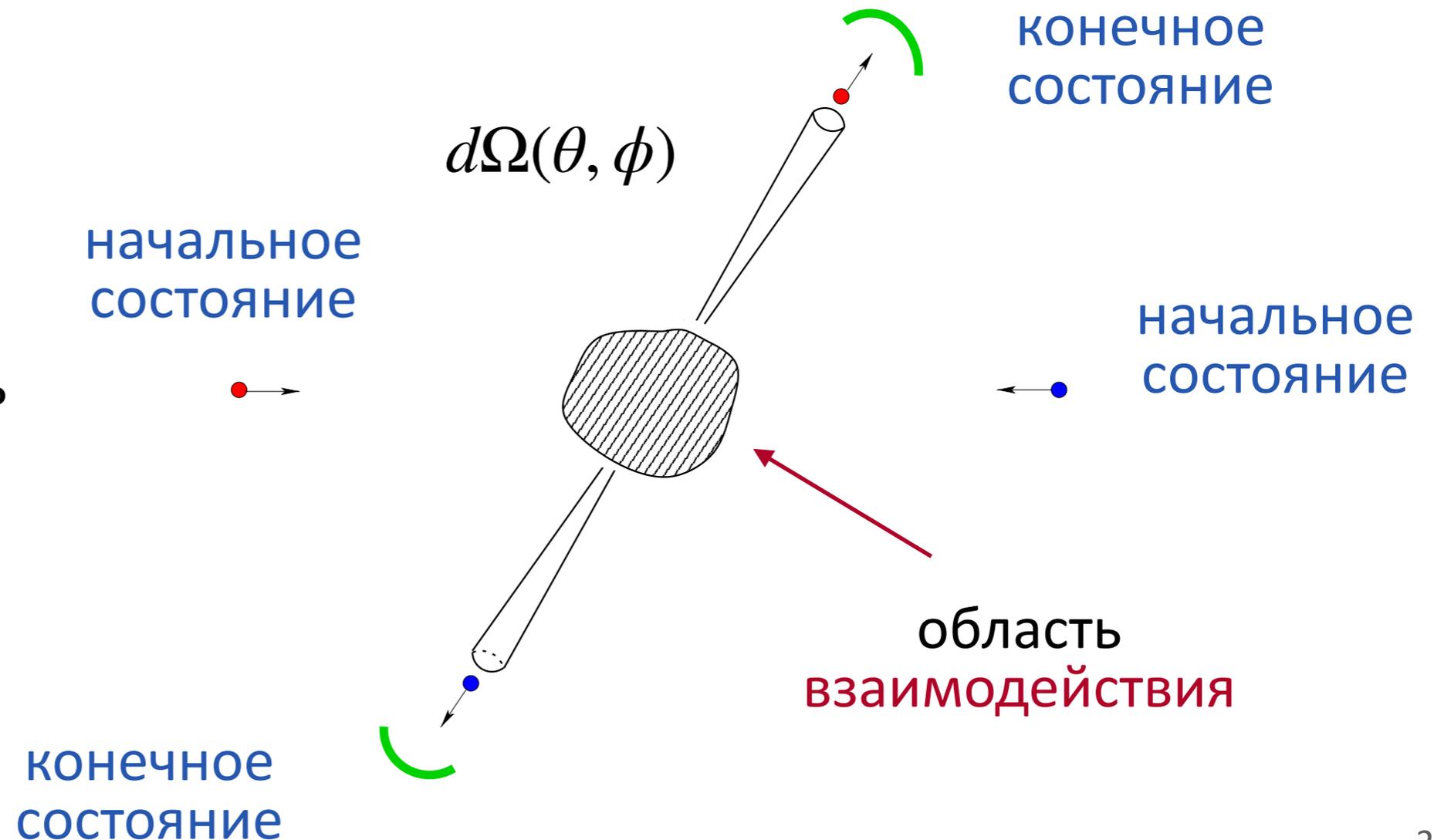
# Что дальше?

## Взаимодействия?

Будем рассматривать типичную в коллайдерных экспериментах ситуацию, когда мы “готовим” начальное состояние  $|\alpha\rangle$  ( $t = -\infty$ ), состоящие из свободных 😊 частиц, которое под действием взаимодействия может перейти в конечное состояние  $|\beta\rangle$  ( $t \rightarrow \infty$ ), также состоящее из свободных 😊 частиц.

Внимание,  
вопрос:

Какова вероятность  
такого процесса?



# Что дальше?

## Взаимодействия?

Будем рассматривать типичную в коллайдерных экспериментах ситуацию, когда мы “готовим” начальное состояние  $|\alpha\rangle$  ( $t = -\infty$ ), состоящие из свободных 😊 частиц, которое под действием взаимодействия может перейти в конечное состояние  $|\beta\rangle$  ( $t \rightarrow \infty$ ), также состоящее из свободных 😊 частиц.

Распад новых частиц



Адронизация



Это что еще такое?

Процесс на  
Большом  
Адронном  
Коллайдере?

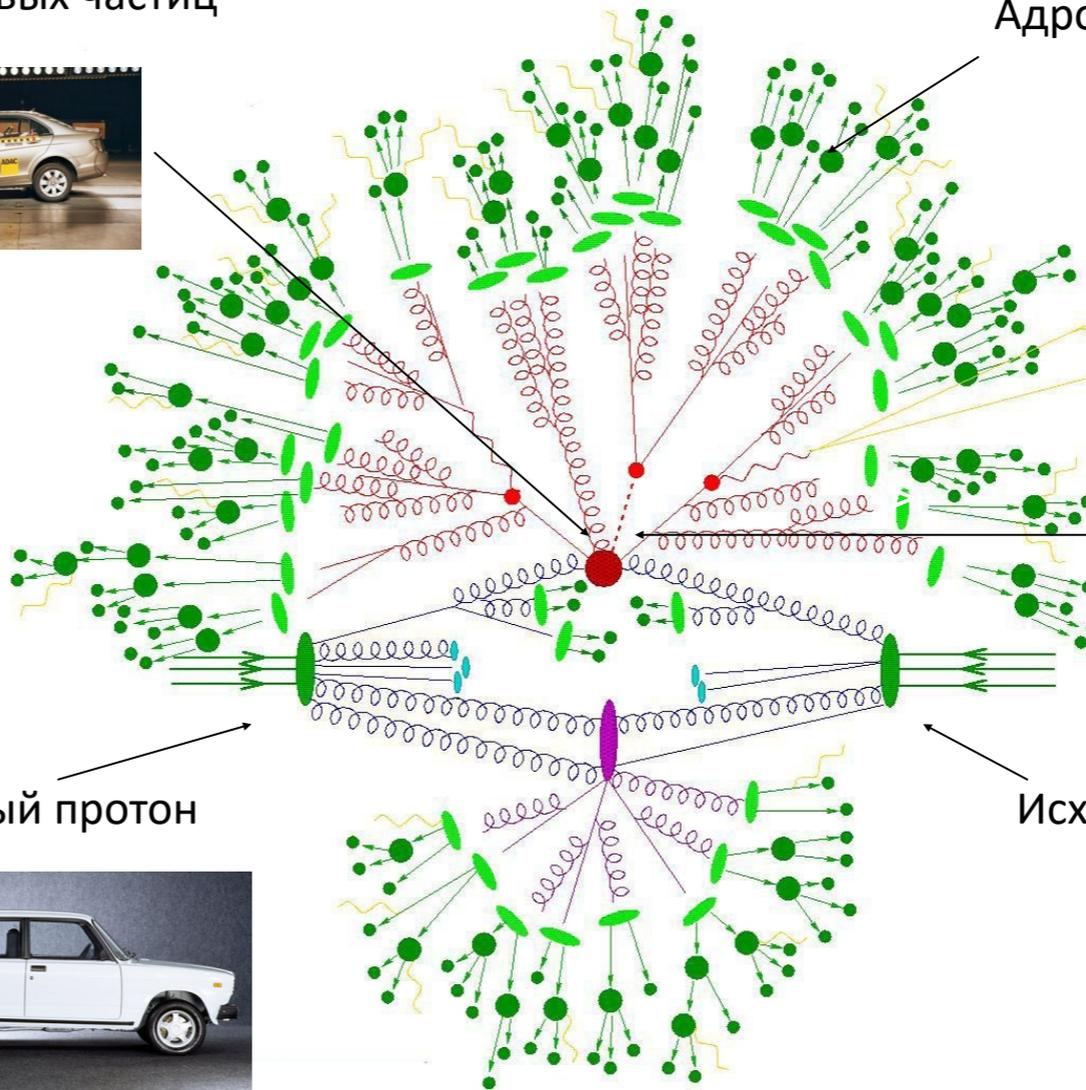
Рождение новых частиц



Исходный протон



Исходный протон



# Включаем взаимодействия..

- В КТП можно найти амплитуду вероятности перехода из  $|\alpha\rangle$  в  $|\beta\rangle$ , вычислив матричный элемент  $S$  - матрицы:

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \langle\beta|S|\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta} + (2\pi)^4\delta^4(p_\alpha - p_\beta)iM_{\alpha\beta}$$

- Типичные (дифференциальные) наблюдаемые:

$$d\Gamma = \Phi_\Gamma |M_{1\rightarrow s}|^2 d\Phi_s, \quad \Phi_\Gamma = \frac{1}{2m} \quad \text{ширина распада } 1 \rightarrow s$$

$$d\sigma = \Phi_\sigma |M_{2\rightarrow s}|^2 d\Phi_s, \quad \Phi_\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2}} \quad \text{сечение процесса } 2 \rightarrow s$$

- (Дифференциальные) фазовый объем:

$$d\Phi_s = (2\pi)^4\delta(p_\alpha - p_\beta) \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3(2\omega_{k_1})} \cdots \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^3(2\omega_{k_s})}, \quad p_\beta = k_1 + \dots + k_s$$

- Что такое  $S$ ? оператор, построенный из комбинаций  $a^\pm$  и  $b^\pm$ ?

Да, но есть существенные ограничения...



# Матрица рассеяния



- В КТП  **$S$ -матрица** задается в виде гарантирующем **лоренц-инвариантность**:

$$S = T e^{-i \int dx \mathcal{H}_I(x)} = T e^{i \int dx \mathcal{L}_I(x)}$$

- Здесь  $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$  есть гамильтониан взаимодействия, который строится из операторов **свободных\*** полей (**определенных комбинаций  $a^\pm$  и  $b^\pm$** ):

$$(x - x')^2 < 0 : [\phi(x), \phi^\dagger(x')] = 0 \Rightarrow [\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x')] = 0 \text{ (причинность)}$$

- $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{\text{полный}} - \mathcal{L}_0$  является **эрмитовым** оператором, состоящим из суммы **скаляров**, не входящих в свободный лагранжиан  $\mathcal{L}_0$  и составленных из более, чем двух\* полей  $\phi(x)$  и/или их производных  $\partial_\mu \phi(x)$ , **взятых в одной точке**

- Примеры  $\mathcal{L}_I$ :  $g\phi^3(x)$ ,  $\lambda\phi^4(x)$ ,  $y\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x)$   
 $e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$ ,  $G[\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x)\bar{\psi}_3(x)\gamma_\mu\psi_4(x) + \text{h.c.}]$

Параметры  $g, \lambda, y, e, G$  (константы связи) задают “силу” взаимодействия.

# Теория Возмущений

На практике  $\langle \alpha | S | \beta \rangle$  вычисляют по ТВ, разлагая  $T$ -экспоненту в ряд и учитывая конечное число слагаемых вида (для  $\mathcal{L}_I = -\lambda\phi^4/4!$ ):

$$\frac{i^n}{n!} \left[ \frac{\lambda}{4!} \right]^n \langle 0 | a_{\mathbf{k}_1}^- \dots a_{\mathbf{k}_s}^- \int dx_1 \dots dx_n T[\phi^4(x_1) \dots \phi^4(x_n)] a_{\mathbf{p}_1}^+ \dots a_{\mathbf{p}_r}^+ | 0 \rangle$$

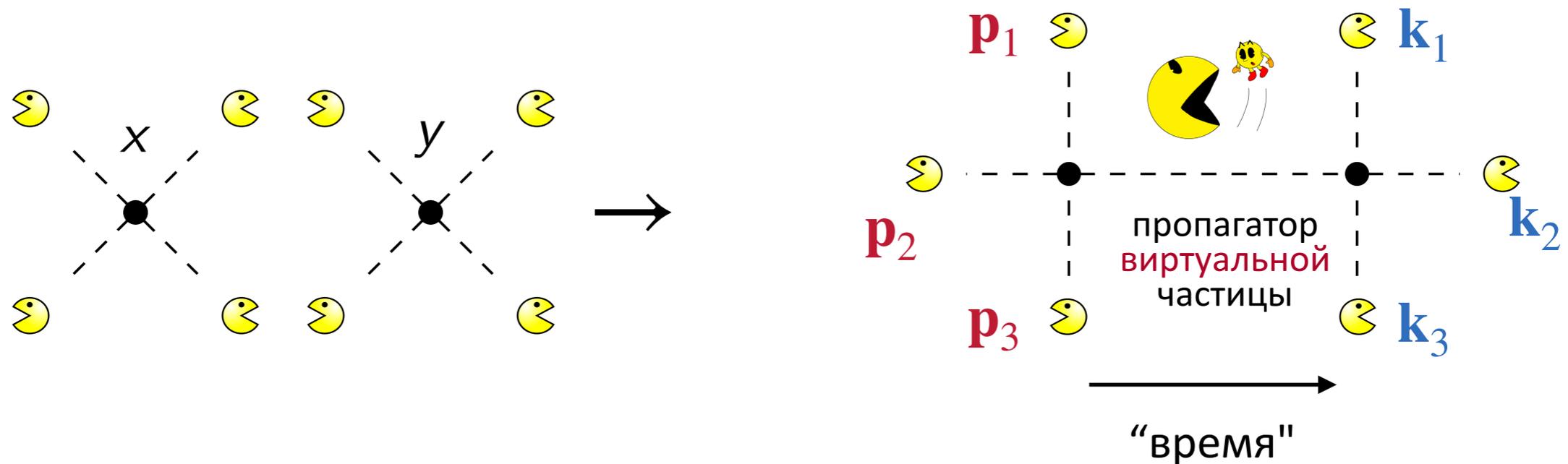
Для вычислений используют **теорему Вика**

# Теория Возмущений

На практике  $\langle \alpha | S | \beta \rangle$  вычисляют по ТВ, разлагая  $T$ -экспоненту в ряд и учитывая **конечное** число слагаемых вида (для  $\mathcal{L}_I = -\lambda\phi^4/4!$ ):

$$\frac{i^2}{2!} \left[ \frac{\lambda}{4!} \right]^2 \langle 0 | a_{\mathbf{k}_1}^- \dots a_{\mathbf{k}_3}^- \int dx dy T[\phi^4(x)\phi^4(y)] a_{\mathbf{p}_1}^+ \dots a_{\mathbf{p}_3}^+ | 0 \rangle$$

Для вычислений используют ~~теорему Вика~~



Удобные правила Фейнмана  
(в импульсном пространстве):

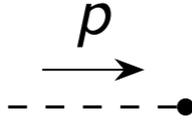
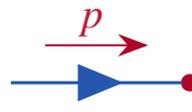
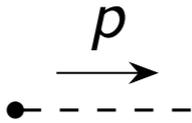
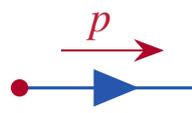
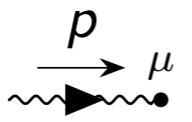
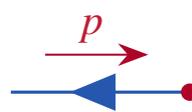
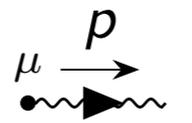
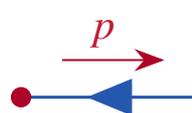
диаграмма Фейнмана  $\rightarrow$  ответ\*

$\mathcal{L}_0$ 

# Правила Фейнмана

## Пропагаторы и внешние “ноги” состояния

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \begin{array}{c} p \\ \text{---} \longrightarrow \text{---} \end{array} & \phi \\ (\hat{p} + m)_{\beta\alpha} & \begin{array}{c} p \\ \alpha \text{---} \longrightarrow \text{---} \beta \end{array} & \psi_\alpha \\ -g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu / m^2 & \begin{array}{c} p \\ \mu \text{---} \longrightarrow \text{---} \nu \end{array} & W_\mu \end{array} \right.$$

Скаляр	1		Входящий фермион	$u^\lambda(\mathbf{p})$	
	1		Исходящий фермион	$\bar{u}^\lambda(\mathbf{p})$	
Вектор	$\epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p})$		Входящий антифермион	$\bar{v}^\lambda(\mathbf{p})$	
	$\epsilon_\mu^{*\lambda}(\mathbf{p})$		Исходящий антифермион	$v^\lambda(\mathbf{p})$	

\* Пропагаторы можно находить, обращая  $K$  из свободного  $\mathcal{L}_0 = \phi \cdot K \cdot \phi$

$\mathcal{L}_I$ 

# Правила Фейнмана

## Вершины взаимодействия

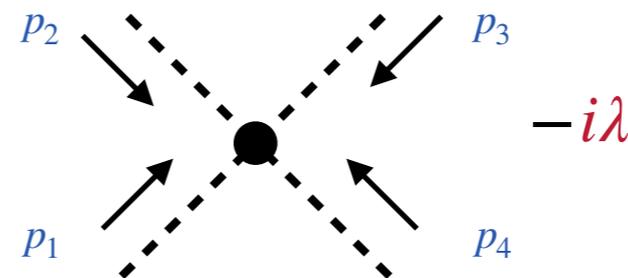
- Каждому **слагаемому** в  $\mathcal{L}_I$  соответствует своя **вершина** - **точка** в диаграмме Фейнмана, в которую входят/выходят столько **линий**, сколько **полей** в рассматриваемом слагаемом.

$$S[\phi(x)] \rightarrow S[\phi(p)]$$

$$i \frac{\delta^4 S_I[\phi]}{\delta\phi(p_1)\delta\phi(p_2)\delta\phi(p_3)\delta\phi(p_4)} \Rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \times [-i\lambda]$$

сохранение энергии-импульса

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$$



- Одна вершина может описывает **разные процессы!**

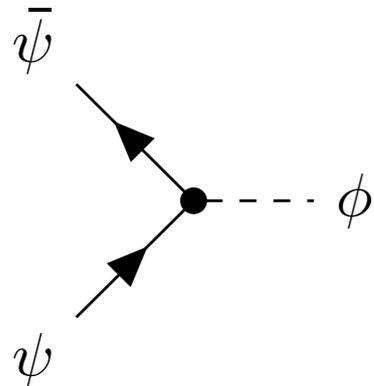
$\mathcal{L}_I$ 

# Правила Фейнмана

## Вершины взаимодействия

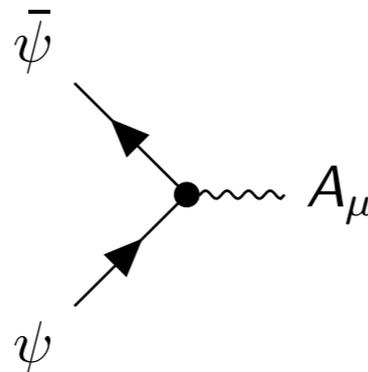
- Каждому **слагаемому** в  $\mathcal{L}_I$  соответствует своя **вершина** - **точка** в диаграмме Фейнмана, в которую входят/выходят столько **линий**, сколько **полей** в рассматриваемом слагаемом.

$$\mathcal{L}_I = -y\bar{\psi}\psi\phi$$



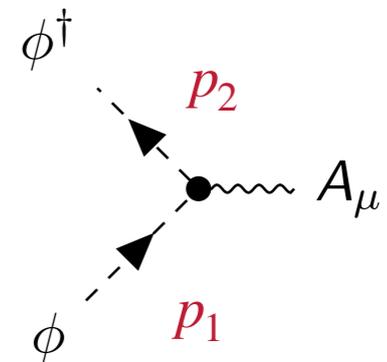
$$-iy$$

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$$



$$ie\gamma^\mu$$

$$\mathcal{L}_I = ieA_\mu(\phi^\dagger\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^\dagger)$$

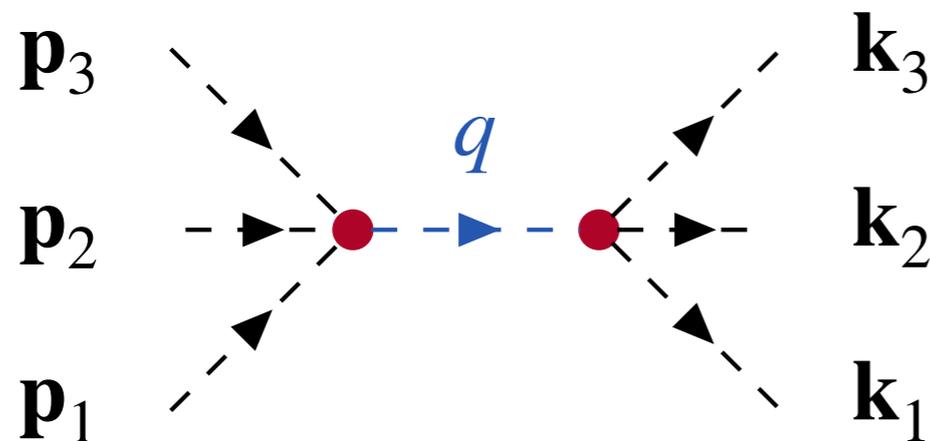


$$ie(p_1 + p_2)^\mu$$

“Вижу **производную** - пишу (нужный) **импульс** (с учетом направления)”

# От диаграмм к амплитудам

- Смотрим на  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  и получаем **правила Фейнмана**.
- Выбираем **процесс** и начинаем рисовать диаграмму(ы): слева **внешние** линии для **начальных** частиц, а (где-то) справа - линии для **конечных**.
- **Добавляем вершины** и соединяем входящие в них линии между собой или с внешними линиями (вариантов много, но ограничиваемся теми, что содержат минимальное\* число вершин)
- По построенной диаграмме(ам) и правилам Фейнмана выписываем амплитуду(ы), учитывая **закон сохранения энергии-импульса** в каждой вершине.
- **Суммируем амплитуды** (квантовые числа конечного и начального состояний фиксированы!)



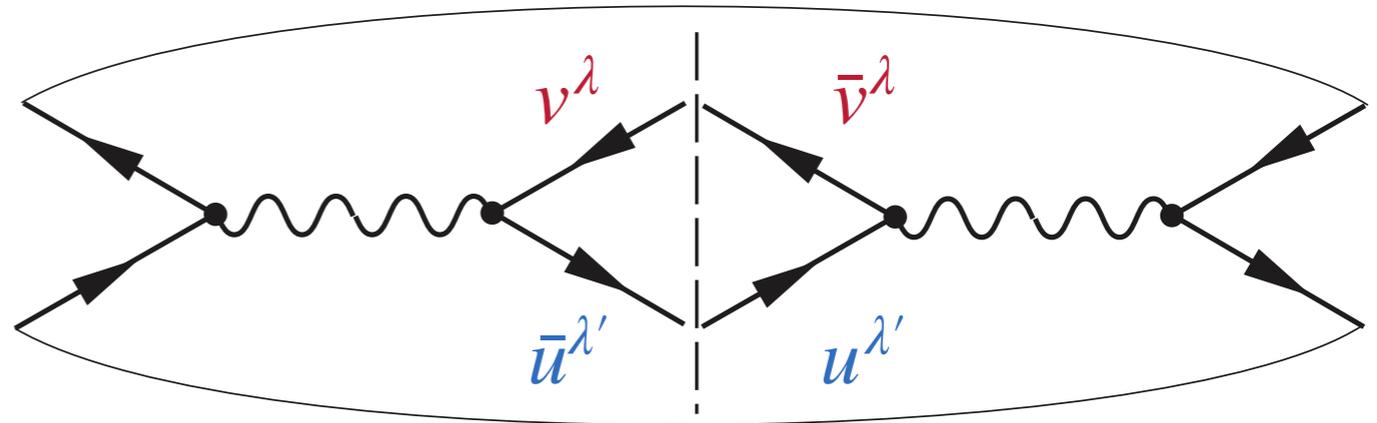
$$(-i\lambda)^2 \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$q = p_1 + p_2 + p_3 = k_1 + k_2 + k_3$$

# От амплитуд к вероятностям

- Для вычисления вероятностей **полные** амплитуды  $M$  **квадрируются**

$$|M|^2 = MM^\dagger \Rightarrow$$



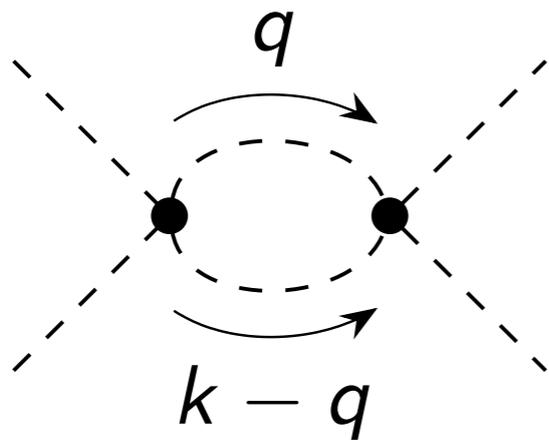
- Иногда (в эксперименте) нам **не важно**, какую поляризацию имеют начальные и/или конечные частицы. В этом случае необходимо **усреднить по начальным** и/или **просуммировать по конечным** состояниям **квадраты амплитуд**.
- В таких ситуациях помогают формулы **для сумм по поляризациям**:

$$\sum_{\lambda=1}^2 u^\lambda(\mathbf{p}_1)\bar{u}^\lambda(\mathbf{p}_1) = \hat{p}_1 + m \qquad \sum_{\lambda=1}^2 v^\lambda(\mathbf{p}_2)\bar{v}^\lambda(\mathbf{p}_2) = \hat{p}_2 - m$$

$$MM^\dagger \rightarrow \sum_{\lambda\lambda'} (\bar{u}^{\lambda'} A v^\lambda)(\bar{v}^\lambda A^\dagger u^{\lambda'}) = \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m)A(\hat{p}_2 - m)A^\dagger]$$

# Умеем все считать? Хм, есть проблемка...

- Соединяя вершины взаимодействия с помощью пропагаторов, можно натолкнуться на **петли**, соответствующие **интегралам** по импульсам, не ограниченным сохранением энергии-импульса в вершинах, например,



$$I_2(k) = \int \frac{d^4 q}{[q^2 - m^2 + i\epsilon][(k - q)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$
$$\sim \int^\infty \frac{|q|^3 d|q|}{|q|^4} \sim \ln \infty$$

- В таких амплитудах возникают **ультрафиолетовые (УФ) расходимости** (соответствующие малым расстояниям)  
Что с ними делать?
- Выход:** использовать **теорию перенормировок**, (грубо говоря:) основанную на идее, что мы **не знаем физику на бесконечно малых масштабах**: параметры в **исходном ("голом") лагранжиане не измеримы** и мы должны переформулировать (**перенормировать**) теорию в терминах **измеримых величин**.

# Регуляризация и перенормировка

- Для придания смысла формально расходящимся интегралам используется (та или иная) **регуляризация**. Например, можно ограничить область интегрирования  $|q| < \Lambda$ .
- Вместо **одной** расходящейся диаграммы рассмотрим “полную” **амплитуду**, например, для рассеяния двух скалярных частиц:

$$M(k, \dots) = \lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} + \dots \right) + \text{перестановки}$$

# Регуляризация и перенормировка

- Для придания смысла формально расходящимся интегралам используется (та или иная) **регуляризация**. Например, можно ограничить область интегрирования  $|q| < \Lambda$ .
- Вместо **одной** расходящейся диаграммы рассмотрим “полную” **амплитуду**, например, для рассеяния двух скалярных частиц:

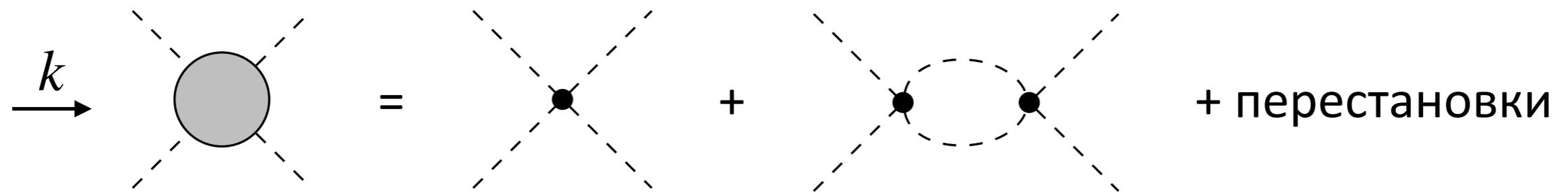
The diagram shows the decomposition of a full amplitude  $\lambda(k_0)$  into a tree-level term  $\lambda_0$  and a loop term. The loop term is represented by a bubble diagram with two vertices and two external lines. The equation is:

$$\lambda(k_0) = \lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{k_0^2} + \dots \right) + \text{перестановки}$$

- Предположим, что мы смогли “**измерить амплитуду**”, т.е., получить конечное значение  $\lambda(k_0)$ , в эксперименте при **фиксированных внешних импульсах** ( $k_0$ )
- **Следите за руками:** решим в **теории возмущений** уравнений относительно  $\lambda_0$  и подставим решение обратно в амплитуду для **произвольных импульсов!** (= вытащили из  $\lambda_0$  расходимость  $\ln \Lambda$ )

# Регуляризация и перенормировка

- Для придания смысла формально расходящимся интегралам используется (та или иная) **регуляризация**. Например, можно ограничить область интегрирования  $|q| < \Lambda$ .
- Вместо **одной** расходящейся диаграммы рассмотрим “полную” **амплитуду**, например, для рассеяния двух скалярных частиц:



The diagram shows the decomposition of a scattering amplitude  $M(k, \dots)$ . On the left, a grey circle represents a loop diagram with four external dashed lines, one of which is labeled  $k$ . This is equal to the sum of three terms: a tree-level diagram with a central black dot and four external dashed lines; a one-loop diagram with a bubble (two dashed lines forming a loop) and four external dashed lines; and the text "+ перестановки" (permutations). Below the diagrams, the corresponding mathematical expression is given:

$$M(k, \dots) = \lambda(k_0) - \frac{\lambda(k_0)^2}{2} \left( \ln \frac{k_0^2}{k^2} + \dots \right)$$

- Предположим, что мы смогли **измерить** “амплитуду” в эксперименте, т.е., получить конечное значение  $\lambda(k_0)$  при **фиксированных** внешних импульсах  $(k_0)$ .
- **Следите за руками:** расходящийся при  $\Lambda \rightarrow \infty$  кусок исчез и амплитуда стала **конечной** при произвольных значениях  $k$ !

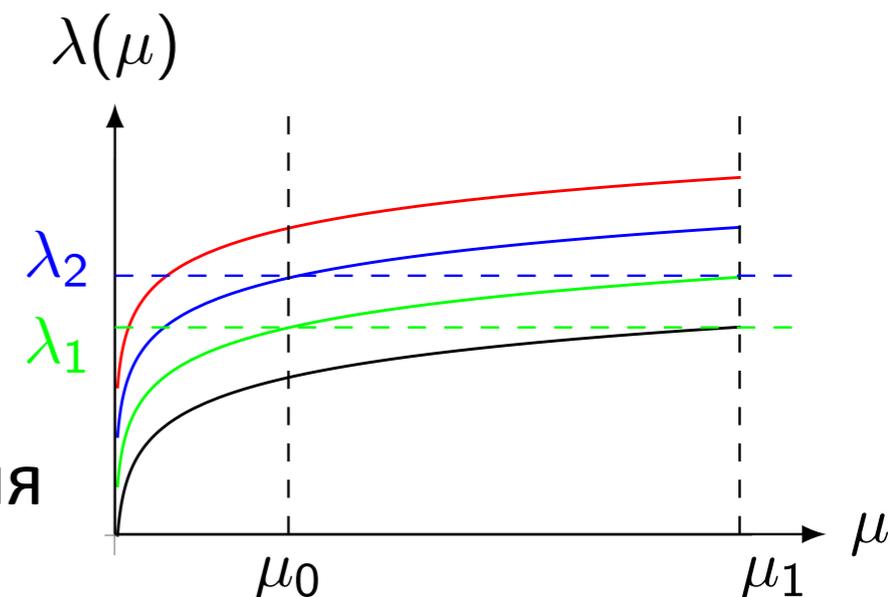
# Ренормализационная группа

- В ходе наших фокусов у нас возникла шкала (пере)нормировки  $k_0$ .
- Амплитуда (как функция внешних импульсов) не должна зависеть от выбора точки нормировки  $\mu_0 = k_0$ .
- Для этого перенормированная константа связи  $\lambda(\mu)$  должна удовлетворять уравнению ренормгруппы:

$$\frac{d\lambda(\mu)}{d \ln \mu} = \beta_\lambda, \quad \beta_\lambda = \frac{3}{2}\lambda^2 + \dots$$

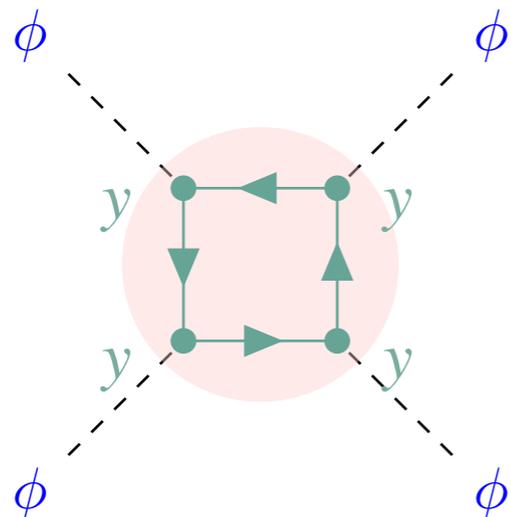
Виртуальные частицы  
“экранируют заряд”

- КТП не может предсказать (граничное) значение  $\lambda(\mu_0)$ , однако, в ТВ можно вычислить  $\beta_\lambda$  (“бета-функции”), задающие “бег константы”.
- Как следствие: мало указать значение константы связи, необходимо указать точку нормировки:
  - Различные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствуют
    - Разным теориям, если измерены на  $\mu_0$
    - Одной и той же физике, если измерения сделаны на  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , соответственно.

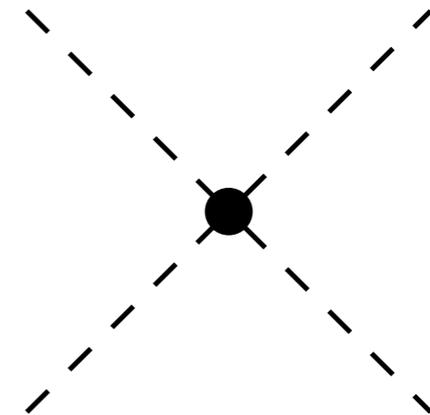


# Перенормируемые теории

- Можем **спрятать все расходимости** во всех порядках ТВ в "голые" параметры (и поля), входящие в  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ .
- Если сразу не получается, то **можно добавить в  $\mathcal{L}_I$  конечное число новых взаимодействий** (значения соответствующих констант надо фиксировать из эксперимента)



Расходимость  
в диаграмме с петлей  
**требует** введения  
самодействие скаляров  
(вдруг мы забыли:)



$$\mathcal{L}_I \ni -y\bar{\psi}\psi\phi$$

- **Критерий (ограничение):** все константы связи в  $\mathcal{L}_I$  имеют **неотрицательную размерность!**

**NB:** Так как  $[\mathcal{L}] = 4$ , то **размерность констант связи** связана с **размерностью оператора**, определяющего соответствующее взаимодействие



# Неперенормируемые теории?

- В неперенормируемых теориях требуется **бесконечное число слагаемых** в  $\mathcal{L}_I$  для того, чтобы избавиться от расходимостей во всех порядках ТВ. **На свалку?**
- Из **размерных соображений** следует что вкладом от **константы** связи  $G_i$  с **отрицательной размерностью**  $[G_i] < 0$  можно **пренебречь** в процессах при **низких энергиях**  $E$ , удовлетворяющих

$$G_i E^{-[G_i]} \ll 1$$

- При **низких энергиях** можно ограничиться **конечным числом неперенормируемых** взаимодействий, характеризуемых **операторами низших размерностей**, т.е. трактовать теорию как

## **Эффективную теорию поля**

имеющую **ограниченную область** применения!

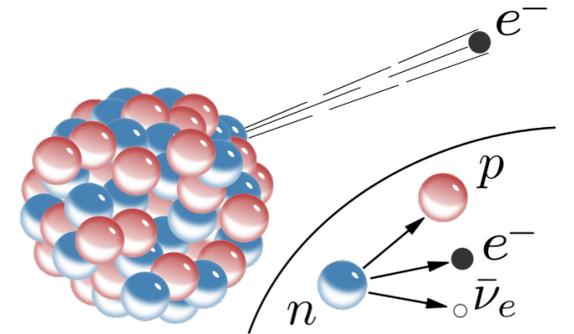
# Теория Ферми

- Пример: **неперенормируемая** модель  $\beta$  - распада:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

$$[\mathbf{G}_F] = -2$$

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \left( J_\mu^+ J_\mu^- + \text{h.c.} \right)$$

$$J_\mu^- = \bar{\Psi}_n \gamma_\mu \Psi_p + \bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_\nu + \dots$$



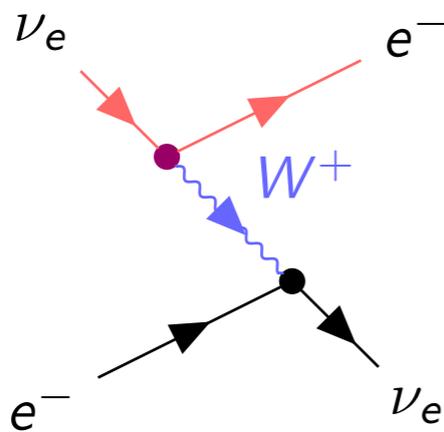
- Это же взаимодействие должно описывать рассеяние  $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$

Из **размерных соображений** сечение

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) \propto G_F^2 s, \quad s = (p_e + p_\nu)^2$$

неограниченно **растет с энергией**  $\Rightarrow$  нарушение **унитарности**

- В районе  $G_F^{-1/2} \sim 10^2 - 10^3$  ГэВ **ожидаем “Новую физику”!**



$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \left( J_\mu^+ J_\mu^- + \text{h.c.} \right)$$

$$\rightarrow -\frac{g_W}{2\sqrt{2}} (W_\mu^+ J_\mu^- + \text{h.c.})$$

# Резюме

## Лекция 1

- В КТП частицы и их взаимодействия задаются **действием**

$S = \int dx \mathcal{L}$  - функционалом от соответствующих **квантовых полей**.

- **Лагранжиан** теории  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  удовлетворяет ряду ограничений (инвариантность относительно различных **симметрий**, эрмитовость, локальность) и определяет **правила Фейнмана** для пропагаторов, векторов поляризации ( $\mathcal{L}_0$ ) и вершин взаимодействия ( $\mathcal{L}_I$ ).
- Амплитуды и вероятности вычисляются **в теории возмущений** с помощью **диаграмм Фейнмана**.
- В старших порядках ТВ используется процедуры **регуляризации** и **перенормировки**. Константы связи **“бегут”** с изменением **масштаба**.
- В зависимости от **размерности констант связи** в  $\mathcal{L}_I$  различаются **перенормируемые** (самосогласованные) и **неперенормируемые** (эффективные) теории.

# Пока все!

# Спасибо за внимание!

масса→	$\approx 2,16 \text{ МэВ}/c^2$	$\approx 1,27 \text{ ГэВ}/c^2$	$\approx 172,7 \text{ ГэВ}/c^2$	0	$\approx 125,25 \text{ ГэВ}/c^2$
заряд→	2/3	2/3	2/3	0	0
спин→	1/2	1/2	1/2	1	0
	<b>u</b> верхний	<b>c</b> очарованный	<b>t</b> истинный	<b>g</b> глюон	<b>H</b> бозон Хиггса
	$\approx 4,67 \text{ МэВ}/c^2$	$\approx 93,4 \text{ МэВ}/c^2$	$\approx 4,18 \text{ ГэВ}/c^2$	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
<b>КВАРКИ</b>	<b>d</b> нижний	<b>s</b> странный	<b>b</b> прелестный	<b>γ</b> фотон	
	$0,511 \text{ МэВ}/c^2$	$105,7 \text{ МэВ}/c^2$	$1,777 \text{ ГэВ}/c^2$	$91,19 \text{ ГэВ}/c^2$	
	-1	-1	-1	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	<b>e</b> электрон	<b>μ</b> мюон	<b>τ</b> тау-лептон	<b>Z</b> Z-бозон	
<b>ЛЕПТОНЫ</b>	$< 1,1 \text{ эВ}/c^2$	$< 0,19 \text{ МэВ}/c^2$	$< 18,2 \text{ МэВ}/c^2$	$80,38 \text{ ГэВ}/c^2$	
	0	0	0	$\pm 1$	
	1/2	1/2	1/2	1	
	<b>ν<sub>e</sub></b> электронное нейтрино	<b>ν<sub>μ</sub></b> мюонное нейтрино	<b>ν<sub>τ</sub></b> тау-нейтрино	<b>W</b> W-бозон	
					<b>КАЛИБРОВОЧНЫЕ БОЗОНЫ (ВЕКТОРНЫЕ)</b>
					<b>СКАЛЯРНЫЕ БОЗОНЫ</b>

# Немного упражнений...

- Найдите размерности:
  - скалярного  $\phi$ , векторного  $V_\mu$  и фермионного  $\psi$  поля
  - операторов рождения/уничтожения, удовл  $[a_{\mathbf{p}}^-, a_{\mathbf{p}'}^+] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$
  - Постройте из  $\phi, V_\mu, \psi$  всевозможные **лоренц-инвариантные** операторы, размерность которых не превышает 4.
- Получите выражение для Нетеровских токов, соответствующих
  - Трансляциям  $\phi'(x+a) = \phi(x)$ :  $J_\mu = -a_\mu \mathcal{L} + a_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = a_\nu \cdot T_{\mu\nu}$
  - U(1) - симметрии  $\phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x)$ :  $J_\mu = i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger) \cdot \alpha$

Найдите соответствующие заряды  $H, \mathbf{P}, Q$  и подставив вместо классического поля **квантовое** найдите выражения для операторов энергии, импульса и заряда

# Немного упражнений...

- Рассмотрите теорию с источником  $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \phi J$$

- Пусть  $J_i(x) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  - “резкий взбрык” в точках  $\mathbf{x}_j$
- Вычислите энергию взаимодействия двух источников  $\delta E_0$  за счет обмена виртуальным скалярным полем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \delta E_0 T = - \int dx dy J_1(x) D_c(x - y) J_2(y)$$

где

$$D_c(x - y) = i \langle T[\phi(x)\phi(y)] \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Притяжение или отталкивание?