

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Габдрахманов Ильнур Рамилевич

**Партонные распределения в КХД: методы
дисперсионных соотношений и интегральной
геометрии**

Специальность: 1.3.3 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
О.В. Теряев

Дубна - 2023 г.

Цель работы

Целью данной работы является изучение аналитических свойств обобщенных партонных распределений (ОПР) (generalized parton distribution (GPD)), обобщенных амплитуд распределений (ОАР) (generalized distribution amplitude (GDA)) с применением математического аппарата интегральной геометрии, разработка аналитических и численных методов как получения новых распределений так и прикладного анализа экспериментальных данных эксклюзивных и инклюзивных процессов. А также разработка моделей на основе аналитической теории возмущений (АТВ) для правила сумм Бьеркена в области низких энергий.

Научная новизна и практическая ценность

Описание адронных процессов в области низких энергий остается трудной задачей для квантовой хромодинамики. В данной работе исследуются как феноменологические функции описывающие непертурбативную низкоэнергетическую динамику сильновзаимодействующих частиц, так и поведение самих констант связи.

Для феноменологических функций ОПР и ДР впервые получены методы восстановления из них двойных распределений (ДР) на основе обратного преобразования Радона, причем несколькими различными способами. Полученные преобразования применены на фотонных ОПР. Также для них на примере фотона впервые аналитически применено голографическое правило сумм и вычислен компонент формфактора тензора энергии-импульса, отвечающий за механическую устойчивость. Это ценно по нескольким причинам. С одной стороны данные методы можно непосредственно применять как для аналитических так и численных расчетов. С другой стороны реальный аналитический пример лучше всего подходит для разработки математического аппарата феноменологии. В то же время нельзя исключать возможность проверки полученных результатов для фотона на будущих поляризационных экспериментах на ILC и SPD@NICA.

Впервые "массивная" аналитическая теория возмущений в сочетании с правилами сумм Буркхарда-Коттингема и Герасимова-Дрелла-Хирна применена к экспериментальным данным правила сумм Бьеркена для продолжения до $Q^2 = 0$. Проведено сравнение модификаций АТВ и их устойчивость.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена общая картина описания факторизационного представления эксклюзивных жестких процессов, сочетающая методы интегральной геометрии и исследование аналитических свойств. Получено новое представление для обратного преобразования Радона, справедливое во всей

области аналитичности амплитуды, описывающей глубоконеупругое комптоновское рассеяние и электророждение адронов.

2. Данные преобразования применены на аналитическом примере фотонных ОПР и получены ДР для фотона. Также для них получено голографическое правило сумм с конечным вычитанием, связанным с гравитационным формфактором адрона. Полученные результаты находятся в согласии с критерием механической устойчивости облака виртуальных фермионных (кварк-антикварковых) пар. Константное вычитание успешно применено к описанию сечения электророждения векторных мезонов на примере ρ_0 мезона. Однако, не удалось обобщить данный результат на все флейворы.
3. Построены новые численные модели спектральных функций высших твистов правила сумм Бьеркена. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными вплоть до околонулевых Q^2 . Проведено сравнение различных модификаций АТВ.

Содержание диссертации

Во введении рассматривается современное состояние КХД и подходы к вычислению амплитуд.

Квантовая хромодинамика является на сегодняшний день, наиболее успешной теорией для описания сильных взаимодействий.

Согласно партонной модели [1] адрон в высокоэнергетичных соударениях эффективно состоит из точечных центров рассеяния - партонов. В совокупности с открытием асимптотической свободы [2; 3] данная модель позволила практически исследовать внутреннюю структуру адронов и свойства составляющих их партонов, впоследствии отождествленных с кварками и глюонами. Асимптотическая свобода подразумевает, что в глубоконеупругом рассеянии (ГНР) константа сильного взаимодействия α_S при больших значениях квадрата переданного импульса Q^2 (т.е. на малых пространственных масштабах) асимптотически стремится к нулю и кварки можно считать асимптотически свободными. Таким образом, возможно получить пертурбативную (с применением теории возмущений) амплитуду партонного процесса. Однако на малых энергетических масштабах теория возмущений становится неприменимой из-за неограниченного роста константы связи, что физически выражается в нахождении кварков только в связанных адронных состояниях. И, следовательно, необходимо учитывать крупномасштабную (непертурбативную) динамику сильных взаимодействий, ответственных за удержание партонов. Стандартным подходом к решению данной проблемы является факторизация амплитуды процесса на пертурбативную (описывающую процессы на малых пространственно-временных масштабах и вычисляемую по тео-

рии возмущений) и непертурбативную (описывающую процессы на больших масштабах) компоненты. Факторизационные теоремы выражают амплитуды жестких адронных процессов в виде свертки пертурбативных (жестких) и непертурбативных (мягких) множителей. Мягкие множители определяются как матричные элементы соответствующих партонных операторов между адронными состояниями и, как правило, рассматриваются феноменологически, т.к. на текущий момент нет способа вычислять их аналитически в теории возмущений.

Альтернативный подход к изучению процессов при высоких энергиях, предложенный Редже [4], основан на общих аналитических и кроссинг свойствах амплитуды рассеяния. В нем амплитуда рассеяния рассматривается как функция комплексного углового момента t -канальных парциальных волн, и полная амплитуда однозначно определяется набором их полюсов.

Существуют также подходы расширяющие область применения теории возмущений в инфракрасную область, как, например, аналитическая теория возмущений (АТВ) [5] (также см. обзоры [6],[7]), на которой мы сосредоточимся в дальнейшем. Ключевой идеей подхода является объединение метода ренормгруппы с требованием аналитичности по квадрату переданного импульса, что приводит к переходу от степенного ряда по константе связи к ряду по аналитическим образам соответствующих степеней константы связи.

Основным объектом исследования данной работы являются феноменологические кварковые распределения для эксклюзивных процессов, поэтому остановимся на них более подробно.

ОПР были введены для описания процессов глубоконеупругого комптоновского рассеяния (ГНКР, DVCS) [8–10] и глубоконеупругого рождения мезонов (DVMP) [11; 12]. В лидирующем приближении для больших Q^2 эти процессы факторизуются на вычисляемую по теории возмущений часть отвечающую жесткому рассеянию, и универсальные непертурбативные ОПР [12; 13]. Обширный интерес к ОПР вызван тем, что они описывают непертурбативную динамику партонных на уровне амплитуд. В частности, первые моменты ОПР по x непосредственно связаны со спиновой структурой протона [14], с гравитационным формфактором кварков и глюонов [15; 16] а также с распределением давления и вязких сил [17], что недавно было применено к вычислению давления в протоне [18].

Обширные обзоры, посвященные ОПР, их интерпретации и феноменологии даны в [19; 20].

ОПР и ОАР были введены [19–21] как феноменологические функции, описывающие непертурбативную динамику эксклюзивных жестких адронных процессов и не имеющие известного аналитического выражения. Однако, в работах [22; 23] были вычислены ОПР и ОАР, соответственно, исключительно в рамках квантовой электродинамики путем вычисления амплитуд ГНКР виртуального фотона на фотоне в лидирующем приближении и коллинеарной кинематике. Позднее были получены обобщения для ненулевого прицельного

	Спиральность адрона	
	сохраняется	меняется
Сумма по спиральностям партонов	$H(x, \xi, t)$	$\tilde{H}(x, \xi, t)$
Разность по спиральностям партонов	$E(x, \xi, t)$	$\tilde{E}(x, \xi, t)$

Таблица 1: Спиральные ОПР

параметра [24; 25]. Это позволяет аналитически проверять имеющийся математический аппарат КХД на игрушечной фотонной модели.

В контексте переменных на световом конусе

$$v^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3), \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2) \quad (1)$$

кварковые обобщенные партонные распределения (ОПР) в случае барионов определяются через матричные элементы кварковых операторов [26]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle p' | \bar{q}(-z) \gamma^+ q(z) | p \rangle \Big|_{z^+=0, \mathbf{z}=0} \\ &= \frac{1}{2P^+} \left[H^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \gamma^+ u(p) + E^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \frac{i\sigma^{+\alpha} \Delta_\alpha}{2m} u(p) \right], \\ & \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle p' | \bar{q}(-z) \gamma^+ \gamma_5 q(z) | p \rangle \Big|_{z^+=0, \mathbf{z}=0} \\ &= \frac{1}{2P^+} \left[\tilde{H}^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \gamma^+ \gamma_5 u(p) + \tilde{E}^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \frac{\gamma_5 \Delta^+}{2m} u(p) \right], \quad (2) \end{aligned}$$

где ОПР, зависящие от коллинеарных компонент импульса (x, ξ) , определяют следующие спиральные компоненты (спиральность кварков в данном примере сохраняется), см Таб.1.

Иными словами, ОПР определяют амплитуду вероятности адрону испустить кварк с коллинеарной долей импульса $(x + \xi)$ и поглотить соответственно $(x - \xi)$, как изображено на Рис.1

ОПР должны удовлетворять множеству ограничений [27], в частности, т.н. полиномиальность. Для их удовлетворения была разработана параметризация т.н. двойных распределений (ДР) [8; 28]

$$F(x, \eta, t) = \int_{-1}^1 dy \int_{-1+|y|}^{1-|y|} dz \delta(x - y - \eta z) f(y, z, t), \quad (3)$$

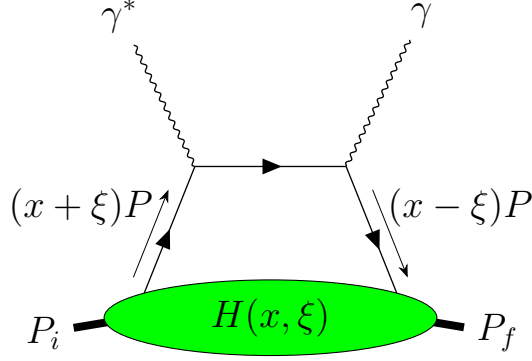


Рис. 1: Диаграмма глубоконеупругого рассеяния

которые математически являются ничем иным как преобразованием Радона [29] (преобразование широко применяемое в задачах томографии), как было показано в [30; 31]. Существует альтернативный хотя и менее удобный вариант параметризации в форме представления перекрытия волновых функций на световом конусе (LFWF) [32].

Из дисперсионных соотношений следует [33; 34] голографическое правило сумм ОПР, согласно которому вся физическая информация (в лидирующем приближении) в плоскости переменных партонной доли импульса x и параметра асимметрии η содержится на линии $|x| = \eta$ с точностью до вычитания, связанного с механическими свойствами [17], использованными экспериментально в работе [18].

В первой главе исследуются аналитические свойства фотонных ОПР, расширение их в нефизическую область с помощью ОАР. Разрабатываются новые способы обратного преобразования Радона для ОПР, а также исследуется их связь с дисперсионными соотношениями.

Параметризация в форме ДР для зарядово четных ОПР H и E определено не однозначно. Однако "калибровочным" преобразованием [30] всегда можно привести его к стандартному виду

$$F(x, \eta, t) = \int_{-1}^1 dy \int_{-1+|y|}^{1-|y|} dz \delta(x - y - \eta z) f(y, z, t) + D_F(x, \eta, t), \quad (4)$$

где ДР четно по z $f(y, z, t) = f(y, -z, t)$. Момент по x выражается полиномом по η . Чтобы гарантировать данное свойство был введен D -член в правой части (4) [35]

$$D_F(x, \eta, t) = \theta(1 - |x/\eta|) \text{sign}(\eta) d_F(x/\eta). \quad (5)$$

Он входит в ОПР в виде нечетной функции $d_F(x)$, $d_F(x) = -d_F(-x)$. Из (4) и (5) следует, что D -член можно вычислить как предел

$$d_F(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F(x\eta, \eta, t) \quad \text{for} \quad |x| \leq 1. \quad (6)$$

В дальнейшем по умолчанию будем считать, что D-член уже вычтен, и ДР ограничено неотрицательными y , таким образом

$$F(x, \eta, t) - D_F(x, \eta, t) \Rightarrow F(x, \eta, t) = \int_0^1 dy \int_{-1+y}^{1-y} dz \delta(x - y - \eta z) f(y, z, t), \quad (7)$$

где ДР имеет компактную область определения $0 \leq y \leq 1$ and $|z| \leq 1 - y$. Так, что для ОПР $|\eta| \leq 1$ и $-\eta \leq x \leq 1$,

$$F(x, \eta, t) = \theta(x + \eta) \mathfrak{f}(x, \eta, t) + \theta(x - \eta) \mathfrak{f}(x, -\eta, t), \quad (8)$$

выражено через функции

$$\mathfrak{f}(x, \eta, t) = \frac{1}{\eta} \int_0^{\frac{x+\eta}{1+\eta}} dy f(y, (x - y)/\eta, t). \quad (9)$$

Они, в свою очередь, обращаются в ноль на границе $x = -\eta$, но могут быть не аналитичны при $\eta = 0$. Здесь и далее примем, что η *положительна*.

Преобразование Радона (7) также гарантирует, что ОПР можно однозначно расширить на всю плоскость (x, η) (вследствие того, что это Фурье образ аналитической функции[8; 36] как будет показано далее).

Следует заметить, что обратное преобразование Радона является некорректно поставленной задачей, в нашем случае, ДР не является непрерывной функцией от ОПР. На текущий момент обратное преобразование Радона применялось для обращения ОПР в работах [37–40].

В литературе хорошо известны 2 способа обратного преобразования Радона: через преобразование Фурье и т.н. фильтрованное обратное проецирование. В последнем случае термин возникший в обработке сигналов означает следующее. Производная по доле импульса вместе интегралом Гильберта служат фильтром, а последующее интегрирование по η - обратным проецированием. Как будет показано далее в комплексной плоскости для ОПР фильтр не требуется, и достаточно одного интеграла.

Чтобы вычислить ДР на основе ОПР совершим обратное преобразование Фурье, где ограничимся $|\eta| < 1$,

$$\mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \eta, t) = \int_{-1}^1 dx e^{-i\kappa x} F(x, \eta, t). \quad (10)$$

Подставив определение параметризации ДР 4 получаем двойное обратное преобразование Фурье от ДР

$$\mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \eta, t) = \mathfrak{F}_2^{-1}[f](\kappa, \eta\kappa, t) \equiv \int_0^1 dy \int_{-1+y}^{1-y} dz e^{-i\kappa y - i\kappa\eta z} f(y, z, t), \quad (11)$$

оно является аналитической функцией по κ и η . Следовательно можно убрать ограничение $|\eta| < 1$ аналитическим продолжением (АС) по η . Проведя прямое преобразование Фурье получим ОПР, расширенное на всю область определения

$$F(x, \eta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{i\kappa x} \text{АС} \mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \eta, t). \quad (12)$$

Т.о. ДР можно получить двойным прямым преобразованием Фурье,

$$f(y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\kappa y + i\lambda z} \mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \lambda/\kappa, t), \quad (13)$$

обратного преобразования Фурье от

$$\mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \eta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\kappa x} F(x, \eta, t) \quad (14)$$

расширенного ОПР F или аналитического продолжения

$$\mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \eta, t) = \text{АС} \mathfrak{F}^{-1}[F](\kappa, \eta, t)$$

непосредственно ОПР.

Далее не сложно получить обращение в виде фильтрованного обратного проецирования [41]

$$f(y, z, t) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\partial}{\partial y} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} F(x + y + \eta z, \eta, t), \quad (15)$$

Проведя преобразование координат для нефизической части ОПР, соответствующей ОАР, и учтя четность по η получим выражение для ДР, причем с разделением по вкладам различных каналов (s и t , соответственно из ОПР и ОАР) [41]

$$f(y, z, t) = \int_0^1 d\eta f(y, z, t|\eta), \quad (16)$$

$$f(y, z, t|\eta) = f_{\text{GPD}}(y, z, t|\eta) + f_{\text{GDA}}(y, z, t|\eta), \quad (17)$$

$$f_{\text{GPD}}(y, z, t|\eta) = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \text{PV} \int_{-\eta}^1 dx \frac{2(x-y)}{(x-y)^2 - \eta^2 z^2} F(x, \eta, t), \quad (18)$$

$$f_{\text{GDA}}(y, z, t|\eta) = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \text{PV} \int_{-1}^1 dx \frac{2(x-\eta y)}{(x-\eta y)^2 - z^2} F(x, \eta, t). \quad (19)$$

В работе [38] было показано, что для ОПР, обладающих LFWF представлением, ДР можно получить однократным интегрированием в комплексной плоскости "внешней" ($x > \eta$) ОПР $F^{\text{out}}(x, \eta, t)$

$$f(y, z, t) = \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-i\infty}^{i\infty} dr \frac{1-y+z}{(1+z+rz)^2} F^{\text{out}}\left(\frac{y+rz}{1+z+rz}, \frac{r-(1+r)y}{1+z+rz}, t\right), \quad (20)$$

где $|z| \leq 1 - y$ и $0 \leq y \leq 1 - y$. Мы повторно получили данный результат в общем случае, для ОПР не обязательно обладающим LFWF представлением [41].

Амплитуду глубоконеупругого Комптоновского рассеяния можно разложить по тензорному базису [42]

$$T^{\mu\nu\alpha\beta}(\Delta_T = 0) = \frac{1}{4} g_T^{\mu\nu} g_T^{\alpha\beta} A_1 + \frac{1}{8} \left(g_T^{\mu\alpha} g_T^{\nu\beta} + g_T^{\nu\alpha} g_T^{\mu\beta} - g_T^{\mu\nu} g_T^{\alpha\beta} \right) A_2 + \frac{1}{4} \left(g_T^{\mu\alpha} g_T^{\nu\beta} - g_T^{\mu\beta} g_T^{\alpha\nu} \right) A_3$$

Следует отметить, что для фотона $A_2 = 0$, а соответствующие амплитуды определяются свертками:

$$A_1(\xi) = \int_{-1}^1 dx C_V(x, \xi) H_1(x, \xi, 0), \quad A_3(\xi) = \int_{-1}^1 dx C_A(x, \xi) H_3(x, \xi, 0) \quad (21)$$

где

$$C_{V/A}^q(x, \xi) = -2e_q^2 \left(\frac{1}{x - \xi + i\eta} \pm \frac{1}{x + \xi - i\eta} \right) \quad (22)$$

Опуская здесь и далее $\frac{N_C e_q^2}{4\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2}$ (т.к. исследуется зависимость только от x, ξ), фотонные ОПР соответствующие амплитудам (21) равны [22]:

$$H_1^q(x, \xi, 0) = \theta(x - \xi) \frac{x^2 + (1 - x)^2 - \xi^2}{1 - \xi^2} + \theta(\xi - x) \theta(x + \xi) \frac{x(1 - |\xi|)}{|\xi|(|\xi| + 1)} - \theta(-x - \xi) \frac{x^2 + (1 + x)^2 - \xi^2}{1 - \xi^2},$$

$$H_3^q(x, \xi, 0) = \theta(x - \xi) \frac{x^2 - (1 - x)^2 - \xi^2}{1 - \xi^2} - \theta(\xi - x) \theta(x + \xi) \frac{1 - |\xi|}{|\xi| + 1} + \theta(-x - \xi) \frac{x^2 - (1 + x)^2 - \xi^2}{1 - \xi^2}.$$

Тогда как GDA равны [23]:

$$\Phi_1^q(z', \zeta', 0) = \theta(z' - \zeta') \frac{\bar{z}'(2z' - \zeta')}{\bar{\zeta}'} + \theta(z' - \bar{\zeta}') \frac{\bar{z}'(2z' - \bar{\zeta}')}{\zeta'} + \theta(\zeta' - z') \frac{z'(2z' - 1 - \zeta')}{\zeta'} + \theta(\bar{\zeta}' - z') \frac{z'(2z' - 1 - \bar{\zeta}')}{\bar{\zeta}'} \quad (23)$$

$$\Phi_3^q(z', \zeta', 0) = \theta(z' - \zeta') \frac{\bar{z}'\zeta'}{\bar{\zeta}'} - \theta(z' - \bar{\zeta}') \frac{\bar{z}'\bar{\zeta}'}{\zeta'} - \theta(\zeta' - z') \frac{z'\bar{\zeta}'}{\zeta'} + \theta(\bar{\zeta}' - z') \frac{z'\zeta'}{\bar{\zeta}'} \quad (24)$$

Из соображений удобства мы используем более симметричный способ [30; 43] задания аргументов фотонных амплитуд распределения через разность импульсов:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1-z}{2}, \\ \zeta' &= \frac{1-\zeta}{2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где z', ζ' - переменные использованные, в частности, в работе [23].

Фотонные ОПР, полученные из DVCS, определены в области $|\xi| < 1$ и $|x| < 1$. Они могут быть расширены в нефизическую область $|\xi| > 1$, путем выражения ОПР через ОАР $\Phi(z, \zeta)$ в физической для них области $-1 < z < 1, -1 < \zeta < 1$.

В принятой нормировке [19; 22; 23] соотношение между ОПР и ОАР принимает вид:

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\xi) \Phi\left(\frac{x}{\xi}, \frac{1}{\xi}\right) \quad (26)$$

Применяя (26) к (23) и (24) мы получим [37] ОПР $H_1^q(x, \xi)$ при $|\xi| > 1$,

$$\begin{cases} \frac{x-x\xi}{\xi^2+\xi} & -1 < x < 1 \\ \frac{(x-\xi)(2x\xi+\xi^2-1)}{\xi(\xi^2-1)} & x > 1 \\ \frac{(x+\xi)(-2x\xi+\xi^2-1)}{\xi(\xi^2-1)} & x < -1 \end{cases} \quad (27)$$

и аналогично для $H_3^q(x, \xi)$,

$$\begin{cases} \frac{\xi-1}{\xi+1} & -1 < x < 1 \\ \frac{2(x-\xi)}{\xi^2-1} & x > 1 \\ -\frac{2(x+\xi)}{\xi^2-1} & x < -1 \end{cases} \quad (28)$$

Перейдем непосредственно к получению голографического правила сумм для фотона, проинтегрировав полученные ОПР получим [37]

$$\int_{-1}^1 \frac{H_1(x, \xi) - H_1(x, x)}{x - \xi} dx = 2 \ln 2 \quad \text{при } |\xi| < 1 \quad (29)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{H_3(x, \xi) - H_3(x, x)}{x - \xi} dx = 0 \quad \text{при } |\xi| < 1 \quad (30)$$

Полученный значения согласуются с (37) с правой частью (41).

Что любопытно, H_1 и H_3 удовлетворяют голографическому правилу сумм также и в нефизической области $|\xi| > 1$, [37] как и предсказывалось в [44],

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{H_1(x, \xi) - H_1(x, x)}{x - \xi} dx = 2 \ln 2 \text{ for } |\xi| > 1 \quad (31)$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{H_3(x, \xi) - H_3(x, x)}{x - \xi} dx = 0 \text{ for } |\xi| > 1 \quad (32)$$

Как видно, вычитательные константы не зависят от ξ [34], для любых конечных ξ .

Во второй главе исследуется голографическое правило сумм в применении к ОПР, а также связь ОПР с тензором энергии-импульса, и вытекающие из нее механические свойства адронов.

рассмотрим дисперсионные соотношения, связывающие действительную и мнимую части амплитуды DVCS [33; 34] применительно к фотону. Вклад ОПР в жесткую эксклюзивную амплитуду (в частности в DVCS как показано в формуле (21)) в лидирующем порядке определен (опуская множители $-2e_q^2$) как

$$A_{1,3}(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx H_{1,3}(x, \xi, t) \left[\frac{1}{x + \xi - i\epsilon} \pm \frac{1}{x - \xi + i\epsilon} \right] \quad (33)$$

или компактно

$$A_{1,3}(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx \frac{H_{1,3}(x, \xi, t)}{x + \xi - i\epsilon} \quad (34)$$

$$Im A_{1,3}(x, t) = -\pi H_{1,3}(x, x, t). \quad (35)$$

Заметим, что мнимые части амплитуд A_1 и A_3 в области $x > 0$ отличаются лишь знаком, т.к.

$$H_1(x, x) = -H_3(x, x) = \frac{1 - x}{1 + x} \quad (36)$$

Согласно голографическому правилу сумм для ОПР [33; 34] в лидирующем приближении вся информация о коллинеарной структуре адрона с точностью до вычитательной константы содержится в одномерной области:

$$P \int_{-1}^1 \frac{H(x, \xi) - H(x, x)}{x - \xi} dx = \Delta = \int_{-1}^1 d\beta \int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|} d\alpha \frac{G(\beta, \alpha)}{\alpha - 1}, \quad (37)$$

где $P \int$ обозначает главное значение несобственного интеграла, и Δ не зависит от ξ , следовательно,

$$ReA(\xi) = \frac{P}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ImA(x)}{x - \xi} dx + \Delta \quad (38)$$

Моменты ОНР тесно связаны с механическими свойствами адрона [17].

$$\begin{aligned} \langle P' | \hat{T}_{\mu\nu}(0) | P \rangle &= \bar{N}(p') \left[M_2(t) \frac{\bar{P}_\mu \bar{P}_\nu}{m_N} + J(t) \frac{i \bar{P}_{\{\mu} \sigma_{\nu\} \rho} \Delta^\rho}{m_N} \right. \\ &\quad \left. + d(t) \frac{1}{5m_N} (\Delta_\mu \Delta_\nu - g_{\mu\nu} \Delta^2) \pm \bar{c}(t) g_{\mu\nu} \right] N(p). \end{aligned} \quad (39)$$

Формфактор $d(t)$ связан с D-членом адрона $D(\alpha, t)$. А именно является первым коэффициентом в разложении D-члена по полиномам Гегенбауэра $C_n^{3/2}(\alpha)$.

Найдем D-члены фотонных ОНР (H_1 и H_3) основываясь [44] на

$$D(\alpha) = \Phi(\alpha, 0), \quad (40)$$

отсюда, подразумевая здесь и далее коэффициент $\frac{N_C e_q^2}{4\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2}$, получаем [37]

$$\begin{aligned} D_1(\alpha) &= (|\alpha| - 1)(2|\alpha| + 1) \text{sgn}(\alpha) \\ D_3(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Из разложения $D_1(\alpha)$ по полиномам Гегенбауэра $d_1 = -\frac{5}{6}$ [37].

Любопытно заметить, что отрицательный знак (при положительных α) D-члена, как и d_1 соответствует критериям механической устойчивости, полученных для ядер в вакууме [35], ядерной материи [45] и Q-balls [46].

Было бы интересно оценить качественное влияние вычитательной константы на инклюзивные сечения рождения векторных мезонов, в особенности с учетом их отклонения от предсказанных. Исследуем недавние данные на средних энергиях в с.ц.м. W (CLAS [47], CORNELL, HERA [48; 49], E-665 [50] и HERMES [51])

Типичная диаграмма для вклада кварков в амплитуду DVMP изображена на Рис. (2).

Вклад валентных кварков в коллинеарную амплитуду электророждения продольного ρ^0 с сохранением спиральности определяется [52]:

$$A_{collinear}^{val} = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{\sqrt{2}} (e_u H^u(x, \xi) - e_d H^d(x, \xi)) \left\{ \frac{1}{x + \xi - i\epsilon} + \frac{1}{x - \xi + i\epsilon} \right\} \quad (42)$$

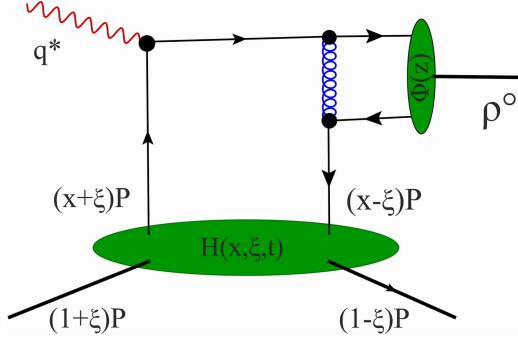


Рис. 2: Leading order ρ^0 handbag quark contribution

Применим стандартный анзац ДР:

$$f_i(\beta, \alpha) = h_i(\beta) \frac{\Gamma(2n_i + 2)}{2^{2n_i+1} \Gamma^2(n_i + 1)} \frac{[(1 - |\beta|)^2 - \alpha^2]}{(1 - |\beta|)^{2n_i+1}}, \quad (43)$$

где в качестве $h_i(\beta)$ возьмем параметризацию Голоскокова-Кролла (ГК) [53]:

$$h_i(\beta) = \beta^{-\delta_i} (1 - \beta)^{2n_i+1} \sum_{j=0}^3 c_{ij} \beta^{j/2} \quad (44)$$

Обе широко применяемые параметризации GK и VGG (M. Vanderhaeghen, P. A. Guichon, M. Guidal [54]) в приложении к ρ^0 , ρ^+ и ω обеспечивают хорошее согласие с экспериментальными данными на высоких энергиях, но демонстрируют снижение сечений при уменьшении $W \lesssim 10$ GeV тогда как экспериментальные данные напротив показывают значительный рост. Было предложено [55] добавлять обобщенный вклад на основе D-члена в ОПР в форме параметризации VGG в целях устранить указанное расхождение.

В текущей работе [56] мы применяем параметризацию GK со вкладом D-члена. А именно, используем первый коэффициент его разложения по полиномам Гегенбауэра:

$$D^q(\alpha) = (1 - z^2) \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_{2i+1}^{3/2} \quad (45)$$

полученным из киральной кварк-солитонной модели [57]:

$$d_1^{CQM} = d_1^u = d_1^d = -\frac{4.0}{N_f} \quad (46)$$

Для простоты пренебрежем влиянием поперечных импульсов:

$$A_{collinear}(W) = A_{collinear}^{val}(W) + A_{collinear}^{sea}(W) + A_{collinear}^g(W), \quad (47)$$

где валентный вклад имеет добавку связанную с D–членом:

$$A_{collinear}^{val}(W) \rightarrow A_{collinear}^{val}(W) + \Delta(W), \quad (48)$$

где

$$\Delta(W) = \int_{-\xi}^{\xi} dx \frac{1}{\sqrt{2}} (e_u - e_d) D\left(\frac{x}{\xi}\right) \left\{ \frac{1}{x + \xi} + \frac{1}{x - \xi} \right\}, \quad (49)$$

Вышеупомянутое голографическое правило сумм подразумевает независимость вычитательного вклада от W . В то же время было показано[34], что вычитание также слабо зависит от виртуальности фотона Q^2 .

$$\sigma(W) \approx \sigma_0(W) \left| \frac{A_{Collinear}(W) + a \cdot \Delta}{A_{Collinear}(W)} \right|^2, \quad (50)$$

Т.к. зависимость вычитания от поперечных степеней свободы неизвестна, мы добавили фактор a , характеризующий возможную зависимость от поперечной динамики и t . Известно, что учет поперечных степеней свободы может повышать сечение на порядок. Поэтому разумно ожидать коэффициент около $\sqrt{10} \approx 3$.

Численные данные для вычислений следующие: $\langle Q^2 \rangle = 4\text{GeV}$, $N_f = 5$ и $t = 0$. Экспериментальные точки и исходная зависимость $\sigma_0(W)$ взяты из [58].

Фитирование данных ρ_0 мезона дает $a \approx 4.8$.

Возможная интерпретация нашего результата может следующая. При высоких энергиях вкладом валентных кварков можно пренебречь, однако при энергиях меньше 10 GeV их вклад и, в особенности, вклад D–члена становится определяющим для сечения.

Последние экспериментальные данные демонстрируют подобное расхождение для ω и ρ^+ мезонов. Однако, объяснить поведение сечения ρ^+ той же вычитательной константой, с учетом различия коэффициентов видится возможным только если принять различие D–члена для u и d кварков.

В третьей главе модифицированная аналитическая теория возмущений (АТВ) применяется к описанию правила сумм Бьеркена в инфракрасной области.

Метод ренормгруппы (РГ) в соответствии с принципом ренормализационной инвариантности позволяет модифицировать пертурбативное разложение и улучшить поведение суммы ряда в ультрафиолетовой области. Однако в инфракрасной области, где инвариантная константа связи имеет нефизические сингулярности, применение РГ к ряду ТВ не позволяет получить стабильный результат.

В работе [59] метод РГ, дополненный требованием аналитичности по квадрату переданного импульса Q^2 , вытекающей из принципа причинности, и

применен для устранения нефизических сингулярностей в квантовой электродинамике. Для КХД данные идеи были развиты в работах [60],[61],[62] (обзоры [6; 7]). Таким образом была сформулирована аналитическая теория возмущений, в которой при вычислении физических наблюдаемых степенной ряд по константе связи заменяется функциональным $\sum_k c_k \alpha_s^k \rightarrow \sum_k c_k \mathcal{A}_k$, где каждой степени константы связи соответствует ее аналитический образ. Отличительным свойством АТВ является стабильность как по отношению к порядку ТВ так и схеме вычитания.

Для практических применений необходимы два условия. Согласие со стандартной ТВ в ультрафиолетовой области, чему АТВ полностью удовлетворяет, а также ограничить рост возникших ультрафиолетовых логарифмов в инфракрасной области. Для решения этой проблемы воспользуемся МРТ ("массивной" АРТ) [63], АТВ, модифицированной сдвигом Q^2 на эффективную массу глюона.

Правило сумм Бьеркена определяется как интеграл от разности спиновых структурных функций g_1 протона и нейтрона по переменной Бьеркена при фиксированной Q^2 :

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \int_0^1 [g_1^p(x, Q^2) - g_1^n(x, Q^2)] dx. \quad (51)$$

При больших значениях Q^2 правило сумм записывается как:

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \frac{|g_{A/V}|}{6} \left[1 - \Delta_{\text{Bj}}(Q^2) \right] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{2i}}{Q^{2i-2}}, \quad (52)$$

где $|g_{A/V}| = 1.2762 \pm 0.0005$ [64] нуклонный аксиальный заряд, Пертурбативные поправки $\Delta_{\text{Bj}}(Q^2)$ на уровне 4-х петель в безмассовом случае имеют вид[65]

$$\Delta_{\text{Bj}}(Q^2) = 0.31\alpha_s(Q^2) - 0.363\alpha_s^2(Q^2) + 0.652\alpha_s^3(Q^2) + 1.804\alpha_s^4(Q^2) \quad (53)$$

Последний член (52) - непертурбативная поправка высших твистов (НТ).

Примем естественное предельное условие

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2 = 0) = 0, \quad (54)$$

следующее из конечности сечений в пределе реальных фотонов.

Используя правило сумм Герасимова-Дрелла-Хирна [66],[67] и Буркхарда-Коттингема [68] аналогично [69], [70] получаем

$$\frac{d}{dQ^2} \Gamma_1^{p-n}(Q^2 = 0) = \frac{-(\mu_p - 1)^2 + \mu_n^2}{8M^2}, \quad (55)$$

где $\mu_p = 2.79$ и $\mu_n = -1.79$ магнитные моменты протона и нейтрона [64] соответственно, $M = 0.938$ GeV - масса нуклона.

При малых Q^2 выражение для высших твистов с конечным набором слагаемым не удовлетворительно. Применим ресуммирование вклада высших твистов, предложенное в [71]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+2}^{p-n} \left(\frac{M_{HT}^2}{Q^2} \right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)M^2}{Q^2 - xM^2} dx, \quad (56)$$

В качестве спектральной функции рассмотрим распределение Брейта-Вигнера

$$\Delta_{HT}(Q^2) = \mu_4^{p-n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{M_{HT} \sigma}{(y + M_{HT}^2)^2 + M_{HT}^2 \sigma^2} \frac{M_{HT}^2}{Q^2 - y} dy, \quad (57)$$

что приводит к:

$$\Delta_{HT}(Q^2) = \mu_4^{p-n} \frac{M_{HT}^2(M_{HT}^2 + Q^2)}{(M_{HT}^2 + Q^2)^2 + M_{HT}^2 \sigma^2} \quad (58)$$

В простейшем случае нулевой ширины:

$$\Delta_{HT} = \mu_4^{p-n} \frac{M_{HT}^2}{Q^2 + M_{HT}^2} \quad (59)$$

Профитировав данные для малых Q^2 [72–76], [77] получим [78] Таб. 2.

Порядок	M_{gl}^2, GeV^2	m_{HT}^2, GeV^2	μ_4, GeV	χ^2
<i>LO</i>	0.782	0.736	-0.170	6.24
<i>NLO</i>	0.954	0.724	-0.146	6.71
<i>N²LO</i>	0.648	0.039	-0.025	5.11
<i>N³LO</i>	0.546	0.143	-0.055	0.73

Таблица 2: Результаты фитирования при δ спектральной функции

На Рис.3 изображены фиты различных порядков МРТ, а также 4-петлевая АТВ для сравнения.

Возьмем теперь ширину распределения ρ_0 мезона, результаты [79] фитирования для μ_4^{p-n} и массовых параметров приведены в Таб. 3.

Любопытно заметить, что результаты фитирования демонстрируют слабую зависимость от ширины спектральной функции высшего твиста, что с одной стороны не исключает возможность обмена ρ_0 мезоном, в то же время говорит о том, что более простая модель дает удовлетворительное описание процесса.

Не менее важным наблюдением является нарушение стабильности с повышением порядка ТВ в МРТ, к этому вопросу мы вернемся ниже.

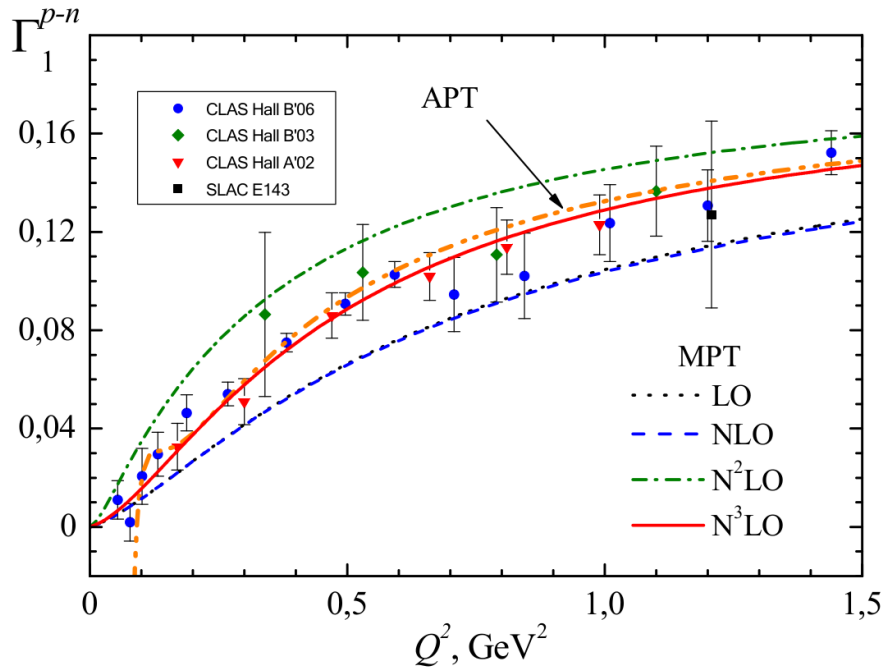


Рис. 3: Фит данных Γ_1^{p-n} в различных порядках МРТ и 4-петлевая АРТ.

Порядок	M_{gl}^2, GeV^2	m_{HT}^2, GeV^2	μ_4, GeV	$\chi^2/(d.o.f.)$
LO	0.789	0.694	-0.180	8.133
NLO	0.915	0.681	-0.163	8.634
N^2LO	1.226	0.679	-0.125	9.071
N^3LO	0.509	0.245	-0.059	0.782

Таблица 3: Результаты фитирования МА при $\sigma = \Gamma_\rho$

Порядок	M^2	$\hat{\mu}_{MA,4}$	$\chi^2/(d.o.f.)$
LO	1.631	-0.166	0.789
NLO	1.545	-0.155	0.757
N^2LO	1.417	-0.156	0.728
N^3LO	1.429	-0.157	0.747
N^4LO	1.462	-0.157	0.754

Таблица 4: Результаты фитирования МА при $\sigma = 0$

Если пойти альтернативным путем, отказавшись от МРТ, и применить минимально аналитическое (МА) разложение из работы [80], получим [81] для нулевой ширины в Таб.4

и для ширины ρ_0 мезона в Таб.5

Следует заметить, что малый $\chi^2/(d.o.f.)$ объясняется учетом только статистических погрешностей.

Отличительным результатом нового подхода является чрезвычайная стабильность по отношению к повышению порядка ТВ. В то же время результа-

Порядок	M^2	$\hat{\mu}_{\text{MA},4}$	$\chi^2/(\text{d.o.f.})$
LO	1.592	-0.168	0.788
NLO	1.505	-0.157	0.755
N^2LO	1.378	-0.159	0.728
N^3LO	1.389	-0.159	0.747
N^4LO	1.422	-0.159	0.754

Таблица 5: Результаты фитирования МА при $\sigma = \Gamma_\rho$

ты для константы высших твистов находятся в удовлетворительном соотношении с результатами МРТ для первых двух порядков. Это с одной стороны служит кросс проверкой результата, с другой стороны может свидетельствовать о нестабильности МРТ по отношению к порядку ТВ.

Апробация работы: доклады

- Advanced Studies Institute. SPIN-Praha-2011, Карлов Унив., ОИЯИ, Прага, Чехия. **Analytic properties of photonic GPDs**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2011
- Drell-Yan Scattering and the Structure of Hadrons, *ECT**, Тренто, Италия **Finite Subtractions for Meson Electroproduction and Exclusive Drell-Yan**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2012
- XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems, JINR, Dubna, Russia **Subtractions in exclusive vector meson production**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2012
- 48th Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Institute for Theoretical Physics, Wroclaw, Ladek-Zdroj, Poland. Poster: **Analytic properties of $\gamma^*\gamma$ scattering amplitudes**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2012
- **Analytic properties of photonic GPDs** National Center for Nuclear Research, Warsaw, Poland, 2012
- DSPIN-17, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia **Infrared models for the Bjorken sum rule in the APT approach**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, V.L. Khandramai, 2017
- AYSS-2019, JINR, OMUS, Dubna, Russia, JINR, Dubna, Russia **Cross channel Radon tomography**, I.R. Gabdrakhmanov, D. Muller, O.V. Teryaev, 2019

- **Radon Tomography In QCD Phenomenology**, DSPIN-19, ОИЯИ, Дубна, Россия I.R. Gabdrakhmanov, D. Muller, O.V. Teryaev, 2019
- **Integral geometry approach to exclusive processes in QCD** Международный математический институт имени Л. Эйлера, Санкт-Петербург, 2019
- **Партонные распределения в КХД: методы дисперсионных соотношений и интегральной геометрии**, семинар по материалам диссертации, ЛТФ ОИЯИ, Дубна, 2022

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. *Gabdrakhmanov I. R., Teryaev O. V.* Analyticity and sum rules for photon GPDs // *Phys. Lett. B.* 2012. Т. 716. С. 417–424. arXiv: 1204 . 6471 [hep-ph]
2. *Gabdrakhmanov I., Teryaev O.* QCD motivated subtractions in hard photonic and mesonic reactions // *PoS.* 2012. Т. Baldin-ISHEPP—XXI. С. 035
3. *Khandramai V. L., Teryaev O. V., Gabdrakhmanov I. R.* Infrared modified QCD couplings and Bjorken sum rule // *J. Phys. Conf. Ser.* 2016. Т. 678, № 1. С. 012018. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/678/1/012018>
4. *Gabdrakhmanov I. R., Teryaev O. . V., Khandramai V. . L.* Infrared models for the Bjorken sum rule in the APT approach // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Т. 938, № 1. С. 012046. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/938/1/012046>
5. *Gabdrakhmanov I. R., Müller D., Teryaev O. V.* Inverse Radon transform at work // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2019. Т. 16, № 6. С. 625–637. arXiv: 1906.01458 [hep-ph]
6. Bjorken Sum Rule with Analytic Coupling at Low Q^2 Values / I. R. Gabdrakhmanov, N. A. Gramotkov, A. V. Kotikov, D. A. Volkova, I. A. Zemlyakov // *JETP Letters.* 2023. Т. 118. arXiv: 2307.16225 [hep-ph]. URL: <https://doi.org/10.1134/S0021364023602622>

Список литературы

1. *Feynman R. P.* Very high-energy collisions of hadrons // Phys. Rev. Lett. — 1969. — Т. 23. — С. 1415–1417. — [494(1969)].
2. *Politzer H. D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // Phys. Rev. Lett. — 1973. — Т. 30. — С. 1346–1349. — [274(1973)].
3. *Gross D. J., Wilczek F.* Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories // Phys. Rev. Lett. — 1973. — Т. 30. — С. 1343–1346. — [271(1973)].
4. *Regge T.* Bound states, shadow states and Mandelstam representation // Nuovo Cim. — 1960. — Т. 18. — С. 947–956.
5. *Solovtsov I. L., Shirkov D. V.* Analytic approach in quantum chromodynamics // Theor. Math. Phys. — 1999. — Т. 120. — С. 1220–1244. — arXiv: hep-ph/9909305 [hep-ph]. — [Teor. Mat. Fiz.120,482(1999)].
6. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Ten years of the Analytic Perturbation Theory in QCD // Theor. Math. Phys. — 2007. — Т. 150. — С. 132–152. — arXiv: hep-ph/0611229 [hep-ph].
7. *Stefanis N. G.* Taming Landau singularities in QCD perturbation theory: The Analytic approach // Phys. Part. Nucl. — 2013. — Т. 44. — С. 494–509. — arXiv: 0902.4805 [hep-ph].
8. Wave functions, evolution equations and evolution kernels from light ray operators of QCD / D. Müller, D. Robaschik, B. Geyer, F. -. Dittes, J. Hořejši // Fortsch. Phys. — 1994. — Т. 42. — С. 101–141. — arXiv: hep-ph/9812448.
9. *Radyushkin A. V.* Scaling limit of deeply virtual Compton scattering // Phys. Lett. B. — 1996. — Т. 380. — С. 417–425. — arXiv: hep-ph/9604317.
10. *Ji X.-D.* Deeply virtual Compton scattering // Phys. Rev. D. — 1997. — Т. 55. — С. 7114–7125. — arXiv: hep-ph/9609381.
11. *Radyushkin A. V.* Asymmetric gluon distributions and hard diffractive electroproduction // Phys. Lett. B. — 1996. — Т. 385. — С. 333–342. — arXiv: hep-ph/9605431.
12. *Collins J. C., Frankfurt L., Strikman M.* Factorization for hard exclusive electroproduction of mesons in QCD // Phys. Rev. D. — 1997. — Т. 56. — С. 2982–3006. — arXiv: hep-ph/9611433.

13. *Collins J. C., Freund A.* Proof of factorization for deeply virtual Compton scattering in QCD // Phys. Rev. D. — 1999. — T. 59. — C. 074009. — arXiv: hep-ph/9801262.
14. *Ji X.-D.* Gauge-Invariant Decomposition of Nucleon Spin // Phys. Rev. Lett. — 1997. — T. 78. — C. 610–613. — arXiv: hep-ph/9603249.
15. *Teryaev O. V.* Spin structure of nucleon and equivalence principle. — 1999. — App. — arXiv: hep-ph/9904376.
16. *Teryaev O. V.* Gravitational form factors and nucleon spin structure // Front. Phys. (Beijing). — 2016. — T. 11, № 5. — C. 111207.
17. *Polyakov M.* Generalized parton distributions and strong forces inside nucleons and nuclei // Phys.Lett. — 2003. — T. B555. — C. 57–62. — arXiv: hep-ph/0210165 [hep-ph].
18. *Burkert V. D., Elouadrhiri L., Girod F. X.* The pressure distribution inside the proton // Nature. — 2018. — T. 557, № 7705. — C. 396–399.
19. *Diehl M.* Generalized parton distributions // Phys.Rept. — 2003. — T. 388. — C. 41–277. — arXiv: hep-ph/0307382 [hep-ph]. — Habilitation thesis.
20. *Belitsky A., Radyushkin A.* Unraveling hadron structure with generalized parton distributions // Phys.Rept. — 2005. — T. 418. — C. 1–387. — arXiv: hep-ph/0504030 [hep-ph]. — Dedicated to Anatoly V. Efremov on occasion of his 70th anniversary.
21. *Goeke K., Polyakov M. V., Vanderhaeghen M.* Hard exclusive reactions and the structure of hadrons // Prog.Part.Nucl.Phys. — 2001. — T. 47. — C. 401–515. — arXiv: hep-ph/0106012 [hep-ph].
22. *Friot S., Pire B., Szymanowski L.* Deeply virtual compton scattering on a photon and generalized parton distributions in the photon // Phys.Lett. — 2007. — T. B645. — C. 153–160. — arXiv: hep-ph/0611176 [hep-ph].
23. *Diphoton Generalized Distribution Amplitudes / M. El Beiyad, B. Pire, L. Szymanowski, S. Wallon* // Phys.Rev. — 2008. — T. D78. — C. 034009. — arXiv: 0806.1098 [hep-ph].
24. *Mukherjee A., Nair S.* Generalized Parton Distributions of the Photon // Phys.Lett. — 2011. — T. B706. — C. 77–81. — arXiv: 1105.5299 [hep-ph].
25. *Mukherjee A., Nair S.* Generalized Parton Distributions of the Photon for Nonzero zeta // Phys.Lett. — 2012. — T. B707. — C. 99–106. — arXiv: 1110.5242 [hep-ph].
26. *Ji X.-D.* Off forward parton distributions // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. — 1998. — T. 24, № 7. — C. 1181–1205. — arXiv: hep-ph/9807358. — URL: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/24/7/002>.

27. *Pire B., Soffer J., Teryaev O.* Positivity constraints for off - forward parton distributions // Eur. Phys. J. C. — 1999. — T. 8. — C. 103–106. — arXiv: hep-ph/9804284.
28. *Radyushkin A. V.* Nonforward parton distributions // Phys. Rev. D. — 1997. — T. 56. — C. 5524–5557. — arXiv: hep-ph/9704207.
29. *Radon J.* Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Nat. Kl. — 1917. — T. 69. — C. 262–277.
30. *Teryaev O.* Crossing and radon tomography for generalized parton distributions // Phys.Lett. — 2001. — T. B510. — C. 125–132. — arXiv: hep-ph/0102303 [hep-ph].
31. Twist three analysis of photon electroproduction off pion / A. V. Belitsky, D. Mueller, A. Kirchner, A. Schafer // Phys. Rev. D. — 2001. — T. 64. — C. 116002. — arXiv: hep-ph/0011314.
32. *Pobylitsa P. V.* Solution of polynomiality and positivity constraints on generalized parton distributions // Phys. Rev. — 2003. — T. D67. — C. 034009. — arXiv: hep-ph/0210150 [hep-ph].
33. *Teryaev O.* Analytic properties of hard exclusive amplitudes // arXiv:hep-ph/0510031. — 2005. — arXiv: hep-ph/0510031 [hep-ph].
34. *Anikin I., Teryaev O.* Dispersion relations and subtractions in hard exclusive processes // Phys.Rev. — 2007. — T. D76. — C. 056007. — arXiv: 0704.2185 [hep-ph].
35. *Polyakov M. V., Weiss C.* Skewed and double distributions in pion and nucleon // Phys.Rev. — 1999. — T. D60. — C. 114017. — arXiv: hep-ph/9902451 [hep-ph].
36. *Mueller D., Schafer A.* Complex conformal spin partial wave expansion of generalized parton distributions and distribution amplitudes // Nucl. Phys. B. — 2006. — T. 739. — C. 1–59. — arXiv: hep-ph/0509204.
37. *Gabdrakhmanov I. R., Teryaev O. V.* Analyticity and sum rules for photon GPDs // Phys. Lett. B. — 2012. — T. 716. — C. 417–424. — arXiv: 1204.6471 [hep-ph].
38. *Müller D.* Double distributions and generalized parton distributions from the parton number conserved light front wave function overlap representation. — 2017. — Ноябрь. — arXiv: 1711.09932 [hep-ph].
39. Covariant Extension of the GPD overlap representation at low Fock states / N. Chouika, C. Mezrag, H. Moutarde, J. Rodriguez-Quintero // Eur. Phys. J. — 2017. — T. C77, № 12. — C. 906. — arXiv: 1711.05108 [hep-ph].

40. A Nakanishi-based model illustrating the covariant extension of the pion GPD overlap representation and its ambiguities / N. Chouika, C. Mezrag, H. Moutarde, J. Rodriguez-Quintero // Phys. Lett. B. — 2018. — T. 780. — C. 287–293. — arXiv: 1711.11548 [hep-ph].
41. *Gabdrakhmanov I. R., Müller D., Teryaev O. V.* Inverse Radon transform at work // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2019. — T. 16, № 6. — C. 625–637. — arXiv: 1906.01458 [hep-ph].
42. The Two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation / V. Budnev, I. Ginzburg, G. Meledin, V. Serbo // Phys.Rept. — 1975. — Vol. 15. — P. 181–281.
43. Probing partonic structure in gamma gamma → pi pi near threshold / M. Diehl, T. Gousset, B. Pire, O. Teryaev // Phys.Rev.Lett. — 1998. — T. 81. — C. 1782–1785. — arXiv: hep-ph/9805380 [hep-ph].
44. *Teryaev O.* Analyticity and end-point behaviour of GPDs // PoS. — 2010. — T. DIS2010. — C. 250.
45. *Kim H.-C., Schweitzer P., Yakhshiev U.* Energy-momentum tensor form factors of the nucleon in nuclear matter // arXiv:1205.5228. — 2012. — arXiv: 1205.5228 [hep-ph].
46. *Mai M., Schweitzer P.* Energy momentum tensor, stability, and the D-term of Q-balls // arXiv:1206.2632. — 2012. — arXiv: 1206.2632 [hep-ph].
47. Electroproduction of phi(1020) mesons at 1.4 $\leq Q^2 \leq 3.8 \text{ GeV}^2$ measured with the CLAS spectrometer / J. Santoro [и др.] // Phys.Rev. — 2008. — T. C78. — C. 025210. — arXiv: 0803.3537 [nucl-ex].
48. Exclusive electroproduction of ρ^0 and J/ψ mesons at HERA / J. Breitweg [и др.] // Eur.Phys.J. — 1999. — T. C6. — C. 603–627. — arXiv: hep-ex/9808020 [hep-ex].
49. Elastic electroproduction of rho mesons at HERA / C. Adloff [и др.] // Eur.Phys.J. — 2000. — T. C13. — C. 371–396. — arXiv: hep-ex/9902019 [hep-ex].
50. Diffractive production of $\rho^0(770)$ mesons in muon proton interactions at 470-GeV / M. Adams [и др.] // Z.Phys. — 1997. — T. C74. — C. 237–261.
51. Spin Density Matrix Elements in Exclusive rho0 Electroproduction on H-1 and H-2 Targets at 27.5-GeV Beam Energy / A. Airapetian [и др.] // Eur.Phys.J. — 2009. — T. C62. — C. 659–695. — arXiv: 0901.0701 [hep-ex].
52. *Vanderhaeghen M., Guichon P. A., Guidal M.* Hard electroproduction of photons and mesons on the nucleon // Phys.Rev.Lett. — 1998. — T. 80. — C. 5064–5067.

53. *Goloskokov S., Kröll P.* The Longitudinal cross-section of vector meson electroproduction // Eur.Phys.J. — 2007. — T. C50. — C. 829–842. — arXiv: hep-ph/0611290 [hep-ph].
54. *Vanderhaeghen M., Guichon P. A., Guidal M.* Deeply virtual electroproduction of photons and mesons on the nucleon: Leading order amplitudes and power corrections // Phys.Rev. — 1999. — T. D60. — C. 094017. — arXiv: hep-ph/9905372 [hep-ph].
55. *Guidal M., Morrow S.* Exclusive rho0 electroproduction on the proton: GPDs or not GPDs? // Eur.Phys.J. — 2007. — T. A39. — C. 5–31. — arXiv: 0711.3743 [hep-ph].
56. *Gabdrakhmanov I., Teryaev O.* QCD motivated subtractions in hard photonic and mesonic reactions // PoS. — 2012. — T. Baldin-ISHEPP—XXI. — C. 035.
57. Off - forward quark distributions of the nucleon in the large N(c) limit / V. Y. Petrov, P. Pobylitsa, M. V. Polyakov, I. Bornig, K. Goeke [и др.] // Phys.Rev. — 1998. — T. D57. — C. 4325–4333. — arXiv: 9710270 [hep-ph].
58. *Goloskokov S.* Generalized Parton Distributions in light meson production // Nucl.Phys.Proc.Suppl. — 2011. — T. 219/220. — C. 185–192. — arXiv: 1109.1695 [hep-ph].
59. *Боголюбов Н., Логунов А., Ширков Д.* Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 37, № 3. — С. 805–815.
60. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic QCD running coupling with finite IR behavior and universal alpha-s (0) value. — 1996. — Апр. — arXiv: hep-ph/9604363.
61. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic model for the QCD running coupling with universal alpha-s (0) value // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Т. 79. — C. 1209–1212. — arXiv: hep-ph/9704333.
62. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* Analytic perturbation theory and inclusive tau decay // Phys. Lett. B. — 1997. — Т. 415. — C. 104–110. — arXiv: hep-ph/9706409.
63. *Shirkov D. V.* 'Massive' Perturbative QCD, regular in the IR limit // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2013. — Т. 10. — C. 186–192. — arXiv: 1208.2103 [hep-th].
64. Review of Particle Physics / P. A. Zyla [и др.] // PTEP. — 2020. — Т. 2020, № 8. — C. 083C01.
65. *Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H.* Adler Function, Bjorken Sum Rule, and the Crewther Relation to Order α_s^4 in a General Gauge Theory // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Т. 104. — C. 132004. — arXiv: 1001.3606 [hep-ph].

66. *Gerasimov S. B.* A Sum rule for magnetic moments and the damping of the nucleon magnetic moment in nuclei // Sov. J. Nucl. Phys. — 1966. — T. 2. — C. 430—433. — [Yad. Fiz.2,598(1965)].
67. *Drell S. D., Hearn A. C.* Exact Sum Rule for Nucleon Magnetic Moments // Phys. Rev. Lett. — 1966. — T. 16. — C. 908—911.
68. *Burkhardt H., Cottingham W. N.* Sum rules for forward virtual Compton scattering // Annals Phys. — 1970. — T. 56. — C. 453—463.
69. *Soffer J., Teryaev O.* The Role of g_2 in relating the Schwinger and Gerasimov-Drell-Hearn sum rules // Phys. Rev. Lett. — 1993. — T. 70. — C. 3373—3375.
70. *Soffer J., Teryaev O.* QCD radiative and power corrections and generalized GDH sum rules // Phys. Rev. D. — 2004. — T. 70. — C. 116004. — arXiv: hep-ph/0410228.
71. *Teryaev O.* Analyticity and higher twists // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2013. — T. 245. — C. 195—198. — arXiv: 1309.1985 [hep-ph].
72. Experimental determination of the evolution of the Bjorken integral at low Q^{*2} / A. Deur [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — T. 93. — C. 212001. — arXiv: hep-ex/0407007.
73. Experimental determination of the effective strong coupling constant / A. Deur, V. Burkert, J.-P. Chen, W. Korsch // Phys. Lett. B. — 2007. — T. 650. — C. 244—248. — arXiv: hep-ph/0509113.
74. Experimental study of isovector spin sum rules / A. Deur [и др.] // Phys. Rev. D. — 2008. — T. 78. — C. 032001. — arXiv: 0802.3198 [nucl-ex].
75. Determination of the effective strong coupling constant $\alpha(s, g(1))(Q^{*2})$ from CLAS spin structure function data / A. Deur, V. Burkert, J. P. Chen, W. Korsch // Phys. Lett. — 2008. — T. B665. — C. 349—351. — arXiv: 0803.4119 [hep-ph].
76. High precision determination of the Q^2 evolution of the Bjorken Sum / A. Deur, Y. Prok, V. Burkert, D. Crabb, F. -. Girod, K. A. Griffioen, N. Guler, S. E. Kuhn, N. Kvaltine // Phys. Rev. D. — 2014. — T. 90, № 1. — C. 012009. — arXiv: 1405.7854 [nucl-ex].
77. The Spin-dependent Structure Function of the Proton g_1^p and a Test of the Bjorken Sum Rule / M. G. Alekseev [и др.] // Phys. Lett. B. — 2010. — T. 690. — C. 466—472. — arXiv: 1001.4654 [hep-ex].
78. *Khandramai V. L., Teryaev O. V., Gabdrakhmanov I. R.* Infrared modified QCD couplings and Bjorken sum rule // J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — T. 678, № 1. — C. 012018. — URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/678/1/012018>.

79. *Gabdrakhmanov I. R., Teryaev O. . V., Khandramai V. . L.* Infrared models for the Bjorken sum rule in the APT approach // J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — T. 938, № 1. — C. 012046. — URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/938/1/012046>.
80. *Kotikov A. V., Zemlyakov I. A.* Fractional analytic QCD beyond leading order // J. Phys. G. — 2023. — T. 50, № 1. — C. 015001. — arXiv: 2203.09307 [hep-ph].
81. Bjorken Sum Rule with Analytic Coupling at Low Q^2 Values / I. R. Gabdrakhmanov, N. A. Gramotkov, A. V. Kotikov, D. A. Volkova, I. A. Zemlyakov // JETP Letters. — 2023. — T. 118. — arXiv: 2307.16225 [hep-ph]. — URL: <https://doi.org/10.1134/S0021364023602622>.