

Эксклюзивное рождение адронов при электрон-позитронной аннигиляции и метод структурных функций

В.С. Фадин

Институт ядерной физики СО РАН

Научная сессия секции ядерной физики ОФН РАН
1–5 апр. 2024г.
Дубна, ОИЯИ

- Введение
- Погрешности метода
 - Общие
 - Специфические для эксклюзивных сечений
- Модифицированный метод квазиреальных электронов
 - Одно-петлевые поправки
 - Двух-петлевые поправки
- Заключение

Мотивировка:

противоречия в величине МАММ

– между экспериментально измеренной величиной

Bennett, G. W. and others, "Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL"Phys. Rev. D73 (2006) 072003,

Abi, V. and others, "Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm"Phys. Rev. Lett. 126 (2021) 14, 141801,

Aguillard, D. P. and others, "Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm"Phys. Rev. Lett. 131 (2023) 16, 161802,

–и "теоретическим" предсказанием

Aoyama, T. and others, "The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model"2020 Phys. Rept. , Vol. 887 p. 1-166

- между "теоретическим" предсказанием и "решеточными" вычислениями

S. Borsanyi, Z. Fodor, J. N. Guenther, C. Hoelbling, S. D. Katz, L. Lellouch, T. Lippert, K. Miura, L. Parato and K. K. Szabo, et al. "Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD," Nature 593 (2021) no.7857, 51-55

B. C. Toth, S. Borsanyi, Z. Fodor, J. Guenther, C. Hoelbling, S. D. Katz, L. Lellouch, T. Lippert, K. Miura and L. Parato, et al. "Muon $g-2$: BMW calculation of the hadronic vacuum polarization contribution," PoS LATTICE2021 (2022), 005 doi:10.22323/1.396.0005

- между результатами экспериментальных измерений величины $R(s)$

CMD-3 Collaboration, Measurement of the pion formfactor with CMD-3 detector and its implication to the hadronic contribution to muon $(g-2)$ arXiv:2309.12910 [hep-ex]

Для извлечения $R(s)$ нужны знать
рад-поправки к $\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons})$.

Метод структурных функций

Е. А. Kuraev and V. S. Fadin,

“On Radiative Corrections to e^+e^- Single Photon Annihilation
at High-Energy,”

Sov. J. Nucl. Phys. 41 (1985), 466-472

был развит для их вычисления.

Этот метод приобрел большую популярность
(на 27 марта 2024г. **986 цитирований в базе данных INSPIRE**)
и получил дальнейшее развитие во множестве работ.

Метод был развит для вычисления рад-поправок к
инклюзивному сечению
 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{anything}$.

Сечение $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{anything}$ с учетом рад-поправок в методе структурных функций представляется в виде

$$\sigma(s) = \sum_{a=e^-,e^+} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 D_{e^-}^a(x_1, s) D_{e^+}^{\bar{a}}(x_2, s) \tilde{\sigma}(x_1 x_2 s) \theta(x_1 x_2 s - s_0),$$

где $D_{e^-}^a(x_1, s)$ – функция распределения партонов сорта a с поперечным импульсом до \sqrt{s} в электроне, $\tilde{\sigma}(s)$ – сечение однофотонной аннигиляции с учетом эффектов поляризации вакуума и взаимодействия в конечном состоянии, но без учета взаимодействия в начальном состоянии.

Единственным ограничением на кинематику испущенных в процессе e^+e^- столкновения частиц (фотонов и возможных пар заряженных частиц) является в этом случае минимально допустимая масса $\sqrt{s_0}$ виртуального фотона

γ^* .

Впоследствии метод стал широко применяться к эксклюзивным сечениям и активно использоваться для создания Монте-Карло генераторов событий. При этом ограничения, накладываемые на кинематику испущенных частиц, определяются критериями отбора событий и не сводятся уже к $\sqrt{s_0}$.

Точность этого представления определяется двумя факторами. Первый – величина вкладов, не ухватываемых этим представлением. Второе – точность входящих в это представление величин.

В этом представлении опущены вклады диаграмм аннигиляции через два и более фотонов и их интерференции с однофотонной, так же как интерференции при рождении реальных частиц в начальном и конечном состояниях.

Интерференция двухфотонной аннигиляции с однофотонной обращается в ноль для зарядово-симметричных сечений. Поэтому для таких сечений неохватываемые этим представлением вклады начинаются с квадрата диаграмм двухфотонного обмена и интерференции трех-фотонного с одно-фотонным.

Хорошим обстоятельством является здесь то, что эти вклады не содержат больших коллинеарных логарифмов $\ln\left(\frac{s}{m^2}\right)$ и можно надеяться на их малость.

Плохим – то, что их нельзя вычислить модельно-независимым образом.

Для зарядово-ассимметричных сечений интерференция одно-фотонного и двух-фотонного обмена дает основной вклад и величина ее модельно зависима.

F. Ignatov and R. N. Lee, Charge asymmetry in $e^-e^+ \rightarrow \pi^-\pi^+$ process, Phys. Lett. B 833 (2022) 137283.

Устранимый недостаток – точность партонных распределений и коэффициентных функций (жестких сечений).

Неустранимый недостаток метода структурных функций в применении к вычисления радиационных поправок к эксклюзивным сечениям: отсутствие ограничений на кинематические параметры частиц сопровождающего излучения, накладываемых критериями отбора событий в проводимых экспериментах.

На этот недостаток косвенно указывает отмеченное в

[CMD-3 Collaboration](#), Measurement of the pion formfactor with CMD-3 detector and its implication to the hadronic contribution to muon (g-2) arXiv:2309.12910 [hep-ex] vspace1mm обстоятельство, что Монте-Карло генератор MCGPJ

A. B. Arbuzov, G. V. Fedotov, F. V. Ignatov, E. A. Kuraev and A. L. Sibidanov, "Monte-Carlo generator for e^+e^- annihilation into lepton and hadron pairs with precise radiative corrections," Eur. Phys. J. C 46 (2006), 689-703

хуже описывает дифференциальные распределения, чем

G. Balossini, C. M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini and F. Piccinini, "Matching perturbative and parton shower corrections to Bhabha process at flavour factories," Nucl. Phys. B 758 (2006), 227-253

Конечно, создатели генераторов Монте-Карло понимали этот недостаток и старались исправить его.

Генератор событий MCGPJ

добавляя в одно-петлевом приближении точное "жесткое" сечение для излучения фотонов с углом расколлинearности большим θ_0 , $1 \gg \theta_0 \gg 1/\gamma$

и "компенсатор убирающий из партонных распределений вклад излучения с такими углами.

Генератор событий BABAYAGA

вводя "поправочные множители"

$$FSV = 1 + C_1 - C_{1,LL}, \quad F_H = 1 + \frac{|M_1|^2 - |M_{1,LL}|^2}{|M_{1,LL}|^2}.$$

из сравнения приближенного

$$d\sigma_{LL}^{(1)} = [1 + C_{1,LL}] |M_0|^2 d\Phi_0 + |M_{1,LL}|^2 d\Phi_1$$

и точного

$$d\sigma^{(1)} = [1 + C_1] |M_0|^2 d\Phi_0 + |M_1|^2 d\Phi_1$$

сечений в одно-петлевом приближении, так чтобы с этими множителями

$$d\sigma^{(1)} = FSV[1 + C_{1,LL}]|M_0|^2 d\Phi_0 + F_H|M_{1,LL}|^2 d\Phi_1$$

приближенное сечение совпадало с точным, и представляя сечение с излучением любого числа фотонов в виде

$$d\sigma^\infty = FSV\Pi(Q^2, \epsilon) \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^n F_{H,i} |M_{n,LL}|^2 d\Phi_n .$$

В приближении квазиреальных электронов и фотонов

V. N. Baier, V. S. Fadin and V. A. Khoze, "Quasireal electron method in high-energy quantum electrodynamics," Nucl. Phys. B 65 (1973), 381-396

сечение $\sigma_{i \rightarrow f}$ процесса с ультрарелятивистской частицей сорта \mathbf{a} представляется в виде

$$d\sigma_a(\vec{p}) = dn_a^b(z, \vec{q}_\perp) d\sigma_b(z\vec{p}),$$

где \vec{p} – импульс частицы \mathbf{a} , $z\vec{p} + \vec{q}_\perp$ – импульс частицы \mathbf{b} , $d\sigma_b(z\vec{p})$ – сечение ее взаимодействия,

$$dn_a^b(z, \vec{q}_\perp) = \frac{1}{2\epsilon_a} \sum \frac{|M_a^{bc}|^2}{(\Delta\epsilon)^2} \frac{d^3p_b}{2\epsilon_b(2\pi)^3} \frac{d^3p_c}{2\epsilon_c(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_a - \vec{p}_b - \vec{p}_c); ,$$

M_a^{bc} матричный элемент перехода $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{c}$. **Функции расщепления (ядра Алтарелли-Паризи) $P_a^b z$ получают как коэффициенты при логарифмическом интеграле от $n_a^b(z, \vec{q}_\perp)$ по поперечному импульсу.**

Пренебрежение поперечным импульсом частицы b в матричном элементе $d\sigma_b(x\vec{p})$ вполне правомерно. Однако оно должно учитываться в законе сохранения энергии-импульса при достаточно жестких ограничениях на кинематику конечных частиц.

$$d\sigma_a(\vec{p}) = dn_a^b(z, \vec{q}_\perp) d\sigma_b(z\vec{p} + \vec{q}_\perp)$$

$$dn_a^b(z, \vec{q}_\perp) = \rho_a^{bc}(z, (p_b + p_c)^2) \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2\epsilon_c}$$

$$d\sigma_a(\vec{p}) = \rho_a^{bc}(z, (p_b + p_c)^2) \frac{|M_b(x\vec{p})|^2}{4I} d\rho_f$$

$$d\rho_f = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_f) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2\epsilon_f}$$

$$\rho_e^\gamma = \left(\frac{1 + (1-x)^2}{2x\kappa} - \frac{m^2(1-x)}{2\kappa^2} \right), \quad \kappa = (kp), \quad \vec{k} = x\vec{p} + \vec{q}_\perp, \quad x = 1-z.$$

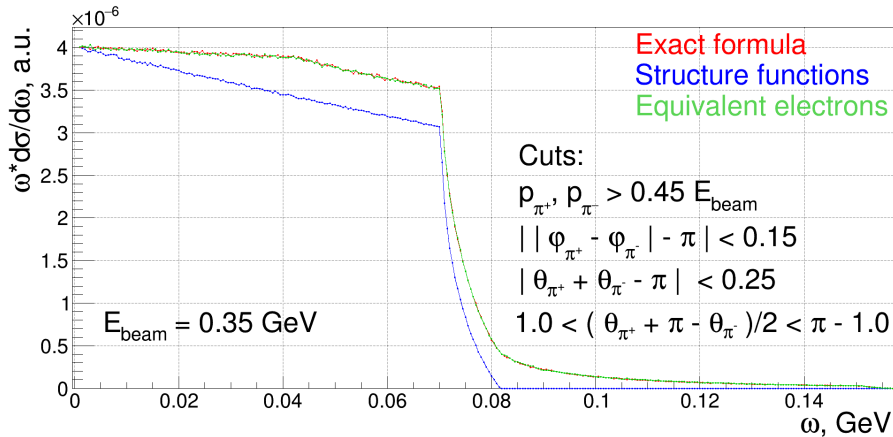
Модифицированный метод квазиреальных электронов

Сравнение результатов вычислений для типичных энергий и критериев отбора событий, используемых в эксперименте КМД-3с использованием метода партонных распределений, модифицированного метода квази-реальных электронов и фотонов и с использованием точных матричных элементов.

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}^{mmqe} = \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{\omega^2 d\Omega}{\pi} \frac{(2\pi\alpha)^2}{q^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_- + p_+ - q_- - q_+ - k)$$
$$(q_- - q_+)^{\nu} (q_- - q_+)^{\mu} \left[\left(-g^{\mu\nu} - \frac{4p_+^{\mu} p_+^{\nu}}{q^2} \right) \left(\frac{1 + (1-x)^2}{2x\kappa_-} - \frac{m^2(1-x)}{2\kappa_-^2} \right) \right.$$
$$\left. + \left(-g^{\mu\nu} - \frac{4p_-^{\mu} p_-^{\nu}}{q^2} \right) \left(\frac{1 + (1-x)^2}{2x\kappa_+} - \frac{m^2(1-x)}{2\kappa_+^2} \right) \right] \frac{d^3q_-}{(2\pi)^3 2\omega_-} \frac{d^3q_+}{(2\pi)^3 2\omega_+}$$
$$x = 2\omega/\sqrt{s}.$$

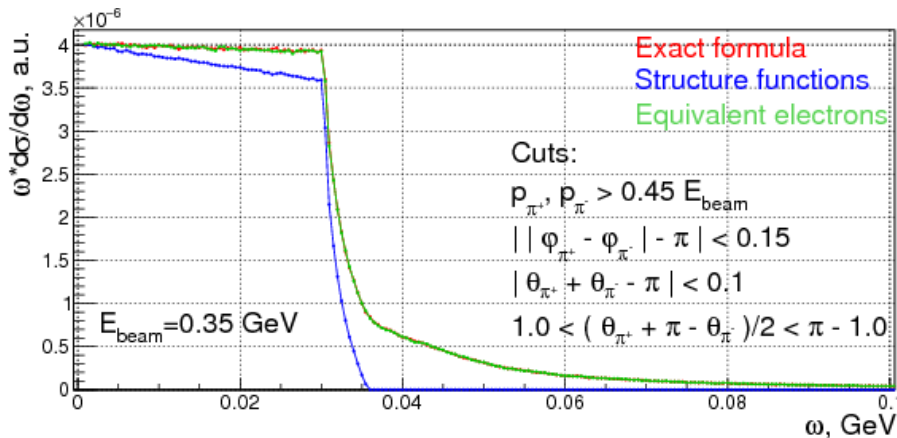
$$\begin{aligned}
 d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}^{exact} = & \frac{(4\pi\alpha)^3}{2q^4s} \left[- \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \left(\frac{(s - 2\kappa_-)^2 + (s - 2\kappa_+)^2}{4\kappa_- \kappa_+} \right. \right. \\
 & - \frac{m^2 q^2}{2\kappa_-^2} - \frac{m^2 q^2}{2\kappa_+^2} \Big) - \left(p_- - q \frac{(p_- q)}{q^2} \right)^\mu \left(p_- - q \frac{(p_- q)}{q^2} \right)^\nu \\
 & \times \left(\frac{q^2}{\kappa_- \kappa_+} - 2 \frac{m^2}{2\kappa_+^2} \right) - \left(p_+ - q \frac{(p_+ q)}{q^2} \right)^\mu \left(p_+ - q \frac{(p_+ q)}{q^2} \right)^\nu \\
 & \left. \times \left(\frac{q^2}{\kappa_- \kappa_+} - 2 \frac{m^2}{2\kappa_-^2} \right) \right] (q_- - q_+)^\nu (q_- - q_+)^\mu d\Phi_3 .
 \end{aligned}$$

Результаты вычислений, выполненных В.Л. Ивановым



Модифицированный метод квазиреальных электронов

Результаты вычислений, выполненных В.Л. Ивановым



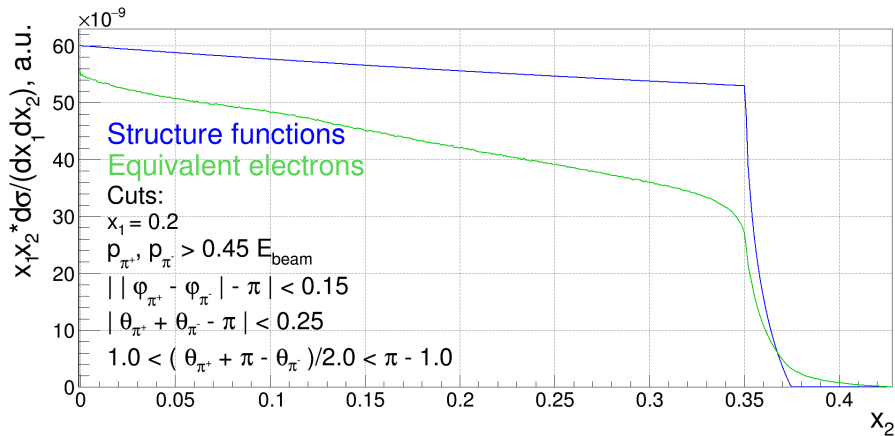
Как видно из рисунков, спектр ММКЭ практически не отличается от точного для стандартных критериев отбора КМД-3. Для полных поправок отличие составляет $\leq 210^{-4}$

Излучение двух фотонов в противоположных направлениях
Метод партонных распределений

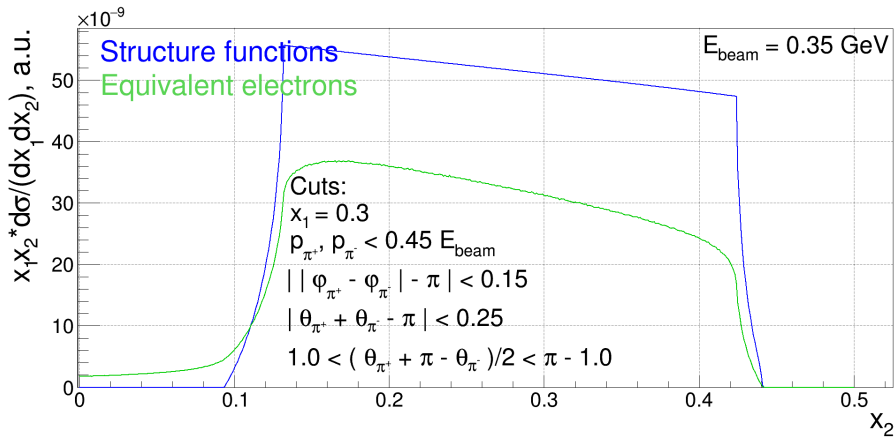
$$\begin{aligned}
 d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma}^{pd} &= \int \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dx_1}{x_1} \left(1 + (1-x_1)^2\right) \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dx_2}{x_2} \left(1 + (1-x_2)^2\right) \\
 &\frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{4E^2}{m^2} \right) - 1 \right)^2 \frac{(4\pi\alpha)^2}{4q^4} \frac{d^3q_-}{(2\pi)^3 2\omega_-} \frac{d^3q_+}{(2\pi)^3 2\omega_+} (q_- - q_+)^\nu (q_- - q_+)^\mu \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}((1-x_1)p_- + (1-x_2)p_+ - q_- - q_+) \\
 &\quad \left[-g_{\mu\nu} - \frac{1}{q^2} ((1-x_1)p_- - (1-x_2)p_+)_\mu ((1-x_1)p_- - (1-x_2)p_+)_\nu \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma}^{mmqe} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{d\Omega_1}{2\pi} \left(\frac{1 + (1 - x_1)^2}{(1 - \beta_e \cos \theta_1)} - \frac{m^2(1 - x_1)}{E^2(1 - \beta_e \cos \theta_1)^2} \right) \\
 &\frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{dx_2}{x_2} \frac{d\Omega_2}{2\pi} \left(\frac{1 + (1 - x_2)^2}{(1 + \beta_e \cos \theta_2)} - \frac{m^2(1 - x_2)}{E^2(1 + \beta_e \cos \theta_2)^2} \right) \frac{(2\pi\alpha)^2}{q^4} \\
 &\times (q_- - q_+)^{\nu} (q_- - q_+)^{\mu} \left(-g^{\mu\nu} - \frac{1}{q^2} (p_- - k_1 - p_+ + k_2)^{\mu} (p_- - k_1 - p_+ + k_2)^{\nu} \right) \\
 &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_- + p_+ - q_- - q_+ - k_1 - k_2) \frac{d^3 q_-}{(2\pi)^3 2\omega_-} \frac{d^3 q_+}{(2\pi)^3 2\omega_+}
 \end{aligned}$$

Результаты вычислений, выполненных В.Л. Ивановым



Результаты вычислений, выполненных В.Л. Ивановым



Излучение двух фотонов в направлении электрона
 Метод партонных распределений

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma}^{2a,LL} = \int \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dx_1}{x_1} \left(1 + (1 - x_1)^2\right) \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dx_2}{x_2(1 - x_2)} \frac{(1 + (1 - x_1 - x_2)^2)}{x_2(1 - x_2)}$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{4E^2}{m^2} \right) \frac{(2\pi\alpha)^2}{q^4} \frac{d^3q_-}{(2\pi)^3 2\omega_-} \frac{d^3q_+}{(2\pi)^3 2\omega_+} (q_- - q_+)^\nu (q_- - q_+)^\mu$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}((1 - x_1 - x_2)p_- + p_+ - q_- - q_+))$$

$$\left[-g_{\mu\nu} - \frac{1}{q^2} ((1 - x_1 - x_2)p_- - p_+)_\mu ((1 - x_1 - x_2)p_- - p_+)_\nu \right].$$

Излучение двух фотонов в направлении электрона
 Модифицированный метод эквивалентных электронов

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma}^{2b,LL} = \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{d\Omega_1}{2\pi} \frac{1 + (1 - x_1)^2}{(1 - \beta_e \cos \theta_1)}$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{dx_2}{x_2} \frac{d\Omega_2}{2\pi} \left(\frac{1 + (1 - x_1 - x_2)^2}{1 - x_1} \frac{1}{(1 - \beta_e \cos \theta_1) + (1 - \beta_e \cos \theta_2)} \right)$$

$$(q_- - q_+)^{\nu} (q_- - q_+)^{\mu} \left(-g^{\mu\nu} - \frac{1}{q^2} (p_- - k_1 - k_2 - p_+)^{\mu} (p_- - k_1 - k_2 - p_+)^{\nu} \right)$$

$$\frac{(2\pi\alpha)^2}{q^4} (2\pi)^{(4)} \delta(p_- + p_+ - q_- - q_+ - k_1 - k_2) \frac{d^3 q_-}{(2\pi)^3 2\omega_-} \frac{d^3 q_+}{(2\pi)^3 2\omega_+}$$

Последовательное использование метода позволяет учитывать только упорядоченную по перпендикулярному импульсу кинематка (и потому только старшую степень коллинеарных логарифмов). Улучшение, позволяющее ухватить и следующую степень, требует отдельного вычисления.

$$\begin{aligned}
 & dn_e^{\gamma_1 \gamma_2}(x_1, \vec{k}_{1\perp}; x_2, \vec{k}_{2\perp}) \\
 &= \frac{1}{2E} \sum \frac{|M_e^{e\gamma_1 \gamma_2}|^2}{(\Delta\epsilon)^2} \frac{dx_1}{2x_1} \frac{d^2 k_{1\perp}}{(2\pi)^3} \frac{dx_2}{2x_2} \frac{d^2 k_{2\perp}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E(1-x_1-x_2)} ; \\
 & \quad M_e^{e\gamma_1 \gamma_2} \\
 &= \bar{u}^{\lambda_{e'}}(p') \left[\hat{e}_2^{*\lambda_2} \frac{(\hat{p}_- - \hat{k}_1 + m)}{-2(k_1 p_-)} \hat{e}_1^{*\lambda_1} + \hat{e}_1^{\lambda_1} \frac{(\hat{p}_- - \hat{k}_2 + m)}{-2(k_2 p_-)} \hat{e}_2^{*\lambda_2} \right] u^{\lambda_e}(p),
 \end{aligned}$$

$$\Delta\epsilon = E' + \omega_1 + \omega_2 - E = \frac{(E' + \omega_1 + \omega_2 - E)(E' - \omega_1 - \omega_2 + E)}{(E' - \omega_1 - \omega_2 + E)}$$

$$= \frac{-(p_- - k_1 - k_2)^2 + m^2}{(E' - \omega_1 - \omega_2 + E)} \simeq \frac{2\kappa}{2E(1 - x_1 - x_2)}$$

$$E' = \sqrt{(\vec{p}_- - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 + m^2}, \quad \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + (k_1 k_2),$$

$$\kappa_1 = (k_1 p_-), \quad \kappa_2 = (k_2 p_-).$$

$$\overline{\sum} \frac{|M_e^{e\gamma_1\gamma_2}|^2}{(\Delta\epsilon)^2 2E(1 - x_1 x_2)} = \frac{2E(1 - x_1 - x_2)}{4\kappa^2} \left(\frac{A_{11}}{4\kappa_1^2} + \frac{A_{22}}{4\kappa_2^2} + 2 \frac{A_{12}}{4\kappa_1 \kappa_2} \right)$$

$$A_{11} = \frac{1}{2} \text{tr} [(\hat{p}'_- + m)\gamma_\nu (\hat{p}'_- - \hat{k}_1 + m)\gamma_\mu (\hat{p}'_- + m)\gamma_{\mu'} (\hat{p}'_- - \hat{k}_1 + m)\gamma_{\nu'}] \Omega_1^{\mu\mu'} \Omega_2^{\nu\nu'}$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \text{tr} [(\hat{p}'_- + m)\gamma_\nu (\hat{p}'_- - \hat{k}_2 + m)\gamma_\mu (\hat{p}'_- + m)\gamma_{\mu'} (\hat{p}'_- - \hat{k}_2 + m)\gamma_{\nu'}] \Omega_2^{\mu\mu'} \Omega_1^{\nu\nu'}$$

$$A_{12} = \frac{1}{2} \text{tr} [(\hat{p}'_- + m)\gamma_\nu (\hat{p}'_- - \hat{k}_1 + m)\gamma_\mu (\hat{p}'_- + m)\gamma_{\nu'} (\hat{p}'_- - \hat{k}_2 + m)\gamma_{\mu'}] \Omega_1^{\mu\mu'} \Omega_2^{\nu\nu'}$$

где $p' = (E', \vec{p}' = \vec{p} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)$,

$$\Omega_i^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^2 e_\lambda^{*\mu}(k_i) e_\lambda^\nu(k_i) .$$

В системе центра инерции начальной $e^+ e^-$ пары $p_- = (E, \vec{p})$. Выберем поляризации в светоконусной калибровке $(e_i n) = 0$ $n = (1, -\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})$. Тогда

$$\Omega_i^{\mu\nu} = -g_\perp^{\mu\nu} + \frac{(n^\mu k_i^\nu + k_i^\mu n^\nu)}{(k_i n)} + \vec{k}_i^{-2} \frac{n^\mu n^\nu}{(k_i n)^2} .$$

Модифицированный метод квазиреальных электронов

Будем использовать разложения

$$k_i = x_i p + \frac{\vec{k}_{i\perp}^2 - m^2 x_i^2}{2x_i} \frac{n}{(pn)} + k_{i\perp}, \quad p' = zp + \frac{(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp})^2 - m^2(z^2 - 1)}{2z} \frac{n}{(pn)} - k_{1\perp} - k_{2\perp},$$

где $z = 1 - x_1 - x_2$, и соотношения

$$\vec{k}_{i\perp}^2 = 2x_i \kappa_i - m^2 x_i^2, \quad (\vec{k}_{1\perp} \vec{k}_{2\perp}) = \kappa - \kappa_1(1 - x_2) - \kappa_2(1 - x_1) - m^2 x_1 x_2,$$

то есть

$$k_i = x_i p + (\kappa_i - m^2 x_i) \frac{n}{(pn)} + k_{i\perp},$$
$$p' = zp + \left(\frac{\kappa}{z} - \kappa_1 - \kappa_2 + m^2(x_1 + x_2) \right) \frac{n}{(pn)} - k_{1\perp} - k_{2\perp}.$$

При этом

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = -2, \quad \gamma_\mu \hat{p} \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = 2\hat{p} + \left(4 \frac{\kappa_i}{x_i} - 2m^2 \right) \frac{\hat{n}}{(pn)} + 2 \frac{\hat{k}_{i\perp}}{x_i},$$

$$\gamma_\mu \hat{n} \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = 2\hat{n}, \quad \gamma_\mu \hat{v}_\perp \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = -2 \frac{(\vec{k}_{i\perp} \vec{v}_\perp)}{x_i} \frac{\hat{n}}{(pn)},$$

$$\gamma_\mu \hat{p}' \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = 2z\hat{p} + 2 \left(\frac{\kappa(z+x_j)}{x_j z} - \frac{\kappa_j}{x_j} + \frac{\kappa_j z}{x_j} - m^2 z \right) \frac{\hat{n}}{(pn)} + 2z \frac{\hat{k}_{i\perp}}{x_i}, \quad j \neq i.$$

При вычислении A_{ij} можно положить
 $m = 0$, $p_- = p = (p, \vec{p})$, $\vec{p} \equiv \vec{p}_-$.

Представляя

$$k_i = x_i p + \frac{\vec{k}_{i\perp}^2}{2x_i} \frac{n}{(pn)} + k_{i\perp}, \quad p' = zp + \frac{(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp})^2}{2z} \frac{n}{(pn)} - k_{1\perp} - k_{2\perp}, \quad (1)$$

и используя

$$\vec{k}_{i\perp}^2 = 2x_i \kappa_i, \quad (\vec{k}_{1\perp} \vec{k}_{2\perp}) = \kappa - \kappa_1(1-x_2) - \kappa_2(1-x_1),$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = -2, \quad \gamma_\mu \hat{p} \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = 2\hat{p} + 2 \frac{\hat{k}_{i\perp}}{x_i} + 2 \frac{\vec{k}_{i\perp}^2}{x_i^2} \frac{\hat{n}}{(pn)},$$

$$\gamma_\mu \hat{n} \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = 2\hat{n}, \quad ; \gamma_\mu \hat{v}_\perp \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = -2 \frac{(\vec{k}_{i\perp} \vec{v}_\perp)}{x_i} \frac{\hat{n}}{(pn)},$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \hat{p}' \gamma_\nu \Omega_i^{\mu\nu} = & 2z\hat{p} + 2 \left[z \frac{\vec{k}_{i\perp}^2}{x_i^2} \right. \\ & \left. + \frac{(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp})^2}{2z} + \frac{(\vec{k}_{i\perp}(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}))}{x_i} \right] \frac{\hat{n}}{(pn)} + 2z \frac{\hat{k}_{i\perp}}{x_i}, \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} A_{11} = & 16\kappa_1 \left[\kappa \left(\frac{2-x_1}{x_1} \left(\frac{(1-x_1)^2}{x_2 z} + \frac{z}{x_2} \right) - \frac{1-x_1}{x_2 z} + \frac{z}{x_1 x_2} \right) \right. \\ & - \kappa_1 \left(\frac{2-x_1}{x_1} \left(z + \frac{(1-x_1)}{x_2} + \frac{z(1-x_2)}{x_2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \kappa_2 \left(\frac{2-x_1}{x_1} \left(\frac{(1-x_1)z}{x_2} - \frac{z(1-x_1)}{x_2} \right) + \frac{z}{x_2} - \frac{z(1-x_1)}{x_1 x_2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

- Как всякий приближенный метод, метод структурных функций (партонных распределений) имеет ряд недостатков.
- Специфическим для вычисления поправок к сечениям эксклюзивного рождения адронов недостатком является отсутствие ограничений на структурные функции от отбора событий.
- Учет этих ограничений требует отказа от коллинеарного приближения, используемого при вычислении партонных распределений.
- Свободным от указанного недостатка является метод квазиреальных электронов и фотонов.
- Этот метод развит в двух-петлевом приближении.