Анизотропные решения для модели R^2 гравитации со скалярным полем

Научная сессия секции ядерной физики ОФН РАН

Иванов В. Р.
Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

03.04.2024

По результатам работы V. R. Ivanov and S. Yu Vernov, Physics of Atomic Nuclei, 86(6):1526–1532, 2023

Введение

- $F(R)$ — один из способов обобщения ОТО:

$$S_{GR} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R + S_m \longrightarrow S_F = \int d^4x\sqrt{-g}F(R) + S_m;$$

- $F(R)$ модели гравитации используются для описания ускоренного расширения Вселенной на различных стадиях эволюции (инфляционная стадия, современная стадия);
- Хорошо известна процедура перехода от действия $F(R)$ модели к действию эквивалентной модели в фрейме Эйнштейна (ОТО с минимально связанным с гравитацией скалярным полем).

Введение

- Рассматривается модель чистой R^2 гравитации с безмассовым скалярным (обычным или фантомным) полем.
- Данная модель не имеет предела ОТО, но может служить приближением к более полной модели (например, модели Старобинского) в режиме больших кривизн R.

Модель в метрике Фридмана

- Действие рассматриваемой модели:

$$S_F = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[F_0\tilde{R}^2 - \frac{\varepsilon_\psi}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi\right], \quad \varepsilon_\psi = \pm 1.$$

- В метрике ФЛРУ,

$$ds^2 = -d\tilde{t}^{\,2} + a_J^2(\tilde{t})\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right),$$

уравнения модели имеют вид

$$18F_0\left(6H_J^2\dot{H}_J - \dot{H}_J^2 + 2H_J\ddot{H}_J\right) = \frac{\varepsilon_\psi}{4}\dot{\psi}^2,$$

$$6F_0\left(18H_J^2\dot{H}_J + 12H_J\ddot{H}_J + 9\dot{H}_J^2 + 2\dddot{H}_J\right) = -\frac{\varepsilon_\psi}{4}\dot{\psi}^2,$$

где $H_J \equiv \dot{a}_J/a_J$. Они сводятся к следующему уравнению:

$$\dddot{H}_J + 9H_J\ddot{H}_J + 18H_J^2\dot{H}_J + 3\dot{H}_J^2 = 0.$$

Модель в метрике Фридмана

- Ранее нам удалось найти точные решения этих уравнений[1].
- Среди решений есть и такие, которым соответствует меняющая знак скалярная кривизна R.
- Представляет интерес вопрос о существовании таких решений в анизотропной метрике.
- Кроме того, интересно изучить механизм изотропизации в рассматриваемой модели.

[1] Vsevolod R. Ivanov and Sergey Yu. Vernov. Integrable modified gravity cosmological models with an additional scalar field. Eur. Phys. J. C, 81:985

Модель в метрике Бьянки-I

- Вид метрики:

$$ds^2 = \, - \, dt^2 + \tilde{a}^2(t) \left[\mathrm{e}^{2\beta_1(t)} \, dx_1^2 + \mathrm{e}^{2\beta_2(t)} \, dx_2^2 + \mathrm{e}^{2\beta_3(t)} \, dx_3^2 \right].$$

- Функции $\tilde{\beta}_i(\tilde{t})$ удовлетворяют соотношению

$$\tilde{\beta}_1(\tilde{t}) + \tilde{\beta}_2(\tilde{t}) + \tilde{\beta}_3(\tilde{t}) = 0.$$

- Кроме того, полезно ввести параметр “сдвига”:

$$\tilde{\sigma}^2 \equiv \dot{\tilde{\beta}}_1^2 + \dot{\tilde{\beta}}_2^2 + \dot{\tilde{\beta}}_3^2 = 2\left(\dot{\tilde{\beta}}_1^2 + \dot{\tilde{\beta}}_1 \dot{\tilde{\beta}}_2 + \dot{\tilde{\beta}}_2^2 \right).$$

Модель в метрике Бьянки-I в исходном фрейме

- Уравнения рассматриваемой модели в метрике Бьянки-I:

$$
\begin{aligned}
&3H_J\dot{\tilde\sigma}^2-\frac{3}{4}\tilde\sigma^4-3\left(2\dot H_J+3H_J^2\right)\tilde\sigma^2\\
&+18H_J\ddot H_J-9\dot H_J^2+54H_J^2\dot H_J=\frac{\varepsilon_\psi}{8F_0}\,\dot\psi^2\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\ddot{\tilde\sigma}^2-2H_J\dot{\tilde\sigma}^2-\frac{1}{4}\tilde\sigma^4-\left(2\dot H_J+3H_J^2\right)\tilde\sigma^2\\
&+\left(6\dot H_J+12H_J^2+\tilde\sigma^2\right)\ddot{\tilde\beta}_i\\
&+\left(6\ddot H_J+42H_J\dot H_J+36H_J^3+3H_J\tilde\sigma^2+\dot{\tilde\sigma}^2\right)\dot{\tilde\beta}_i\\
&-3\left(2\dddot H_J+12H_J\ddot H_J+9\dot H_J^2+18H_J^2\dot H_J\right)=\frac{\varepsilon_\psi}{8F_0}\,\dot\psi^2\,,\qquad i=1,2,3.
\end{aligned}
$$

Модель в метрике Бьянки-I в исходном фрейме

- Эти уравнения сводятся к следующим выражениям:

$$\frac{1}{6}\left(\ddot{\tilde{\sigma}}^2 + 5H_J\dot{\tilde{\sigma}}^2 - 2\left(2\dot{H}_J + 3H_J^2\right)\tilde{\sigma}^2 - \frac{\tilde{\sigma}^4}{2}\right)$$
$$+\dddot{H}_J + 9H_J\ddot{H}_J + 3\dot{H}_J^2 + 18H_J^2\dot{H}_J = 0,$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}^2 + 2\tilde{\sigma}^2\,\frac{2\ddot{H}_J + 24H_J\dot{H}_J + 12H_J^3 + H_J\tilde{\sigma}^2}{2\dot{H}_J + 4H_J^2 + \tilde{\sigma}^2} = 0.$$

Модель в метрике Бьянки-I в исходном фрейме

- В свою очередь, из этих выражений следует

$$\dddot{H}_J = \frac{1}{2\tilde{R}}\left(r_1 - 6r_2\left[\tilde{\sigma}^2 + 2\dot{H}_J + 4H_J^2\right]\right),$$

$$\ddot{\tilde{\sigma}}^2 = \frac{3}{\tilde{R}}\left(-r_1 + 4\tilde{\sigma}^2 r_2\right),$$

где

$$r_1 = \left(\dot{\tilde{\sigma}}^2\right)^2 + \left(4H_J\tilde{\sigma}^2 + 6\ddot{H}_J + 36H_J\dot{H}_J + 24H_J^3\right)\dot{\tilde{\sigma}}^2 + 2\left(\dot{H}_J\tilde{\sigma}^2 + 14H_J\ddot{H}_J + 14\dot{H}_J^2 + 36H_J^2\dot{H}_J\right)\tilde{\sigma}^2,$$

и

$$r_2 = \frac{1}{12}\left(10H_J\dot{\tilde{\sigma}}^2 - 4\tilde{\sigma}^2\left(2\dot{H}_J + 3H_J^2\right) - \tilde{\sigma}^4\right) + 9H_J\ddot{H}_J + 3\dot{H}_J^2 + 18H_J^2\dot{H}_J,$$

Модель в метрике Бьянки-I в исходном фрейме

- Легко видеть, что полученная система уравнений имеет особую точку, соответствующую $R = 0$.
- Из этого следует, что в метрике Бьянки-I в общем случае не существует (непрерывных) решений, которым соответствует R, меняющая знак.
- Кроме того, из полученных выражений следует, что эта особая точка пропадает, если потребовать $\tilde{\sigma} \equiv 0$ (т.е. если перейти к изотропному случаю).

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- Эквивалентная модель в фрейме Эйнштейна:

$$S_{\mathrm{E}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\varepsilon_\psi}{2}K(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi - \Lambda\right],$$

где

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}}M_{\mathrm{Pl}}\ln\left[\frac{4F_0}{M_{\mathrm{Pl}}^2}\tilde{R}\right], \quad K(\phi) = \mathrm{e}^{\kappa\phi},$$

$$\kappa = -\sqrt{\frac{2}{3M_{\mathrm{Pl}}^2}}, \quad \Lambda = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^4}{16F_0}.$$

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- В метрике

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\mathrm{e}^{2\beta_1(t)}\,dx_1^2 + \mathrm{e}^{2\beta_2(t)}\,dx_2^2 + \mathrm{e}^{2\beta_3(t)}\,dx_3^2\right],$$

уравнения модели запишутся так:

$$3H^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{M_{\mathrm{Pl}}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\varepsilon_\psi}{2}K(\phi)\dot{\psi}^2 + \Lambda\right),$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 = -\frac{1}{M_{\mathrm{Pl}}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\varepsilon_\psi}{2}K(\phi)\dot{\psi}^2 - \Lambda\right),$$

$$\ddot{\beta}_i = -3H\dot{\beta}_i\,,$$

где $H = \dot{a}/a$.

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- Из этих уравнений выводятся следующие:

$$\dot{H} + 3H^2 = \frac{\Lambda}{M_{\rm Pl}^2},$$

$$\dot{\sigma^2} = -6H\sigma^2.$$

- Уравнения полей:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\varepsilon_\psi}{2}K_{,\phi}\dot{\psi}^2 = 0,$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{K_{,\phi}}{K}\dot{\phi}\dot{\psi} = 0.$$

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- Уравнения на H и β можно легко проинтегрировать:

$$H(t)=\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\left[\frac{1-C\mathrm{e}^{-2\sqrt{3\lambda}t}}{1+C\mathrm{e}^{-2\sqrt{3\lambda}t}}\right],$$

  где $\lambda\equiv\Lambda/M_{\mathrm{Pl}}^2$ и C — константа интегрирования; и

$$\dot{\beta}_i(t)=\frac{C_i\mathrm{e}^{-\sqrt{3\lambda}t}}{1+C\mathrm{e}^{-2\sqrt{3\lambda}t}},$$

  где C_i — константы интегрирования.

- Отсюда следует, что

$$\sigma^2(t)=\frac{C_\sigma\mathrm{e}^{-2\sqrt{3\lambda}t}}{\left(1+C\mathrm{e}^{-2\sqrt{3\lambda}t}\right)^2}=\frac{C_\sigma}{4C}\left(1-\frac{3}{\lambda}H^2\right),$$

  где $C_\sigma=C_1^2+C_2^2+C_3^2=2(C_1^2+C_1C_2+C_2^2)$, т.к. $C_1+C_2+C_3=0$.

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- С учетом полученных результатов, уравнение на ϕ можно переписать в ином виде:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \kappa\left(M_{\mathrm{Pl}}^2\left(\lambda - 3H^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = 0.$$

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- Решения:
  - $C > 0$:

$$\phi(t) = -\sqrt{6}\,M_{\rm Pl}\ln\left(A\cos\left(-\frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{C_\sigma}{8C\lambda}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\arccos\left(\tanh\left(\sqrt{3\lambda}(t-t_0)\right)\right)+B\right)\right);$$

  - $C < 0$ и $|C| > C_\sigma/(8\lambda)$:

$$\phi(t) = -\sqrt{6}\,M_{\rm Pl}\ln\left(A\tanh^n\left(\frac{\sqrt{3\lambda}}{2}(t-t_0)\right)\right.$$
$$\left.+B\coth^n\left(\frac{\sqrt{3\lambda}}{2}(t-t_0)\right)\right),$$

где $n = -\sqrt{1-C_\sigma/(8|C|\lambda)}/3$;

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- $C<0$ и $|C|<C_\sigma/(8\lambda)$:

$$\phi(t) = -\sqrt{6}\,M_{\rm Pl}\ln\left(A\cos\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_\sigma}{8|C|\lambda}-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\mathrm{arcosh}\left(\coth\left(\sqrt{3\lambda}(t-t_0)\right)\right)+B\right)\right);$$

- $C=-C_\sigma/(8\lambda)$:

$$\phi(t) = -\sqrt{6}\,M_{\rm Pl}\ln\left(A\ln\left(\coth\left(\frac{\sqrt{3\lambda}}{2}(t-t_0)\right)\right)+B\right).$$

- В метрике ФЛРУ аналогов этим двум решениям нет.

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- Для постоянного H:

$$\sigma^2(t) = C_\sigma \, \mathrm{e}^{-6H_0 t},$$

$$\phi(t) = -\sqrt{6}\, M_{\rm Pl} \ln\left(A\cos\left(-\frac{\sqrt{6C_\sigma}}{18H_0}\,\mathrm{e}^{-3H_0 t} + B\right)\right).$$

Модель в метрике Бьянки-I в фрейме Эйнштейна

- Формулы, связывающие два фрейма:

$$H_J(\tilde{t}) = \mathrm{e}^{\phi/\sqrt{6M_{\rm Pl}^2}}\left[H(t(\tilde{t})) - \frac{1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\frac{d\phi}{dt}(t(\tilde{t}))\right],$$

$$\frac{d\tilde{\beta}_i(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \mathrm{e}^{\phi(t(\tilde{t}))/\sqrt{6M_{\rm Pl}^2}}\,\frac{d\beta_i(t(\tilde{t}))}{dt},$$

$$\tilde{\sigma}^2(\tilde{t}) = \mathrm{e}^{\sqrt{2/3}\,\phi(t(\tilde{t}))/M_{\rm Pl}}\,\sigma^2(t(\tilde{t})).$$

- Здесь

$$t = \int \mathrm{e}^{\phi(\tilde{t})/\sqrt{6}M_{\rm Pl}}d\tilde{t} = \int\sqrt{\frac{M_{\rm Pl}^2}{4\Lambda}}\sqrt{\tilde{R}(\tilde{t})}\,d\tilde{t},$$

$$\tilde{t}(t) = \int \mathrm{e}^{-\phi(t)/\sqrt{6M_{\rm Pl}^2}}\,dt.$$

Заключение

- Были проанализированы уравнения космологической модели чистой R^2 гравитации с безмассовым скалярным полем для случая метрики Бьянки-I, в исходном фрейме. Было показано, что для рассматриваемой модели $R = 0$ является особой точкой уравнений. Это значит, что, поскольку R не меняет знак, конформное преобразование метрики для перехода в другой фрейм хорошо определено.
- в фрейме Эйнштейна были найдены точные решения космологической модели чистой R^2 гравитации с безмассовым скалярным полем для случая метрики Бьянки-I.

Спасибо за внимание!