Поправки высших порядков к спектру распада мюона

Научная сессия секции ядерной физики ОФН РАН

У.Е. Возная, А.Б. Арбузов

ЛТФ ОИЯИ, Государственный университет "Дубна"

4 апреля 2024 г.

Мотивация

- Для процессов с мюоном можно поставить эксперименты с высокой точностью и чувствительностью
- Изучение слабого взаимодействия, возможен поиск новых взаимодействий за пределами СМ
- При высокой точности можно изучать свойства нейтрино (дираковская или майорановская природа)
- Для предсказания и описания результатов таких экспериментов необходимы точные теоретические предсказания
- Процессы с τ описываются такими же диаграммами

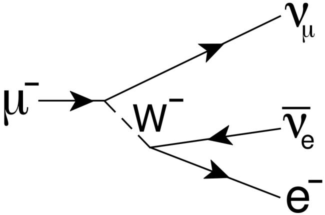
История

- Поправки к распаду мюона порядка $\mathcal{O}(\alpha^1)$ известны с 1950-х годов *(Behrends, Finkelstein, Sirlin (1956), Berman, Sirlin (1962), Kinoshita, Sirlin (1959), Berman (1958))*;
- Поправки $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ (*Arbuzov et al., 2002*)
- В работе *A. Arbuzov, K. Melnikov, Phys.Rev.D 66 (2002) 093003* были получены поправки к спектру неполяризованного мюона до порядка $\alpha^2 L$, и в работе *A. Arbuzov, JHEP 03 (2003) 063* и к спектру поляризованного мюона до порядка $\alpha^3 L^3$ в ВЛП и до $\alpha^2 L$ СВЛП;
- Эксперимент TWIST измерял параметры Мишеля с точностью до 10^{-4}, что требовало выхода за $\mathcal{O}(\alpha^1)$-приближения.

Эксперименты

- TWIST (TRIUMF Weak Interaction Symmetry Test) – проверка симметрии слабого взаимодействия
- Fermilab Muon g-2 – магнитный момент мюона
- MUonE – сечение рассеяния мюона на электроне
- Mu2E – распад μ с излучением электрона *e* radiation, возможный безнейтринный распад – 2026
- Mu3e – распад μ на 3 электрона (поиск запрещенных СМ распадов) (планируется)
- MEG, MEG II - проверка нарушения лептонной универсальности $\mu^+ \to e^+\gamma$

Распад мюона



$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

- Распад мюона - чисто слабый процесс, V-A взаимодействие
- Параметры Мишеля определены для него с большой точностью

Возможная новая физика - запрещенные в СМ распады:

$\mu^- \to e^-\gamma \qquad \mu^- \to e^-e^-e^+ \qquad \mu^- \to e^-\gamma\gamma$

$\mu^- \to e^-$, $\mu^- \to e^+$ в мюонных атомах, $\mathrm{Mu} \to \mathrm{Mu}^-$

и вклады взаимодействий не V-A типа

Энергетический спектр электрона при распаде мюона

$$\frac{d^2\Gamma}{dcdz} = \sum_{j=e,\gamma} \int\limits_z^1 \frac{dx}{x} \frac{d^2\hat{\Gamma}_j}{dcdx}(x, c, \mu_F, \mu_R) D_{ej}\left(\frac{z}{x}, \mu_F, \mu_R\right)$$

$$\frac{d^2\Gamma}{dcdz} = \Gamma_0 (F(z) \pm c P_\mu G(z))$$

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \quad z = \frac{2 m_\mu E_e}{m_\mu^2 + m_e^2},$$

$$z_0 \leq z \leq 1, \quad z_0 = \frac{2 m_\mu m_e}{m_\mu^2 + m_e^2}$$

Энергетический спектр электрона при распаде мюона

Поправки к излучению из конечного состояния

$$H(z) = \left(h_e^{(0)}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} h_e^{(1)}(z) \right) \otimes \left[D_{ee} \right]_T +$$
$$+ \left(h_\gamma^{(0)}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} h_\gamma^{(1)}(z) \right) \otimes \left[D_{e\gamma} \right]_T \equiv h_0(z) + \sum_{i,j} \alpha^i L^j H_{ij}(z)$$

$h \equiv f$, $H \equiv F$ для неполяризованной или $h \equiv g$, $H \equiv G$ для поляризованной части
h_0 - борновское приближение

$$f_0(z) = f_e^{(0)}(z) = z^2(3 - 2z), \quad g_0(z) = g_e^{(0)}(z) = z^2(1 - 2z)$$

$$f_e^{(0)}(z) = z^2(3-2z), \quad f_\gamma^{(0)}(z) = 0,$$

$$f_e^{(1)}(z) = 2z^2(2z-3)\big(4\zeta(2) - 4\mathrm{Li}_2(z) + 2\ln z^2 - 3\ln z\ln(1-z) - \ln(1-z)^2\big)$$

$$+\left(\frac{5}{3} - 2z - 13z^2 + \frac{34}{3}z^3\right)\ln(1-z) + \left(\frac{5}{3} + 4z - 2z^2 - 6z^3\right)\ln z$$

$$+\frac{5}{6} - \frac{23}{3}z - \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{3}z^3,$$

$$f_\gamma^{(1)}(z) = \ln z\left(-\frac{10}{3} + \frac{2}{z} + 4z\right) + \ln(1-z)\left(-\frac{5}{3} + \frac{1}{z} + 2z - 2z^2 + \frac{2}{3}z^3\right)$$

$$+\frac{1}{3} - \frac{1}{z} + \frac{35}{12}z - 2z^2 - \frac{1}{4}z^3,$$

$$g_e^{(0)}(z) = z^2(1-2z), \quad g_\gamma^{(0)}(z) = 0,$$

$$g_e^{(1)}(z) = 2z^2(1-2z)\left(\ln(1-z)^2 - 4\mathrm{Li}_2(1-z) - \ln(z)\ln(1-z) - 2\ln(z)^2\right)$$

$$+\left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3z} - 6z - \frac{17}{3}z^2 + \frac{34}{3}z^3\right)\ln(1-z) + \left(-\frac{1}{3} - 6z^2 - 6z^3\right)\ln(z)$$

$$-\frac{7}{6} + 3z + \frac{7}{6}z^2 + 3z^3,$$

$$g_\gamma^{(1)}(z) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3z} - \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{3}z^3\right)\ln(1-z) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3z}\right)\ln z - \frac{2}{3} + \frac{2}{3z} + \frac{11}{12}z - \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3$$

Уравнение эволюции партонных распределений в КЭД

Подход структурных функций КЭД *(E.Kuraev and V.Fadin 1985)*

$$D_{ba}(x, \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2}) = \delta(1-x)\delta_{ba} +$$

$$\sum_{i=e,\bar{e},\gamma} \int\limits_{\mu_R^2}^{\mu_F^2} \frac{dt\alpha(t)}{2\pi t} \int\limits_x^1 \frac{dy}{y} D_{ia}(y, \frac{\mu_R^2}{t}) P_{bi}\left(\frac{x}{y}, t\right)$$

$$L = \ln \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2} = \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \approx 10.66$$

Для решения уравнения эволюции использовалась программа на FORM

Для вычисления сверток использовались пакеты HPL и MT Wolfram Mathematica

Функции партонных распределений

$$[D_{ee}^{(\mathrm{III})}]_T = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_{ee}^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{2\pi} L P_{ee}^{(0)} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \Big(\mathbf{d_{\gamma e}^{(1)}(x)} \otimes \mathbf{P_{e\gamma}^{(0)}} + P_{ee}^{(1)}$$

$$- \frac{10}{9} P_{ee}^{(0)} + P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)}(x) \Big) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2 \Big(\frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \Big)$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^2 \Big(\frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(1)T} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{\bar{e}e}^{(0)} \otimes P_{e\bar{e}}^{(1)T} + \frac{1}{3} d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2} d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{\gamma\gamma}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)}$$

$$+ \frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(1)T} - \frac{10}{9} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{2}{3} P_{ee}^{(1)T} + \frac{1}{2} d_{ee}^{(1)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} - \frac{13}{54} P_{ee}^{(0)} +$$

$$\frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(1)T} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)} - \frac{10}{9} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)}$$

$$+ \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^3 \Big(\frac{4}{27} P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{6} P_{\gamma\bar{e}}^{(0)} \otimes P_{\bar{e}e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} \Big) + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} \mathbf{P_{\gamma e}^{(0)}} \otimes \mathbf{P_{e\gamma}^{(0)}}$$

$$+ \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{6} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \Big)$$

$$[D_{e\gamma}^{\mathrm{II}}]_T = \frac{\alpha}{2\pi} d_{e\gamma}^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} L (P_{e\gamma}^{(0)}) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \Big(P_{e\gamma}^{(1)T} - \frac{10}{9} P_{e\gamma}^{(0)} +$$

$$+ P_{ee}^{(0)} \otimes d_{e\gamma}^{(}1) \Big) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2 \Big(\frac{1}{3} P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{\gamma\gamma}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} \Big)$$

A.B. Arbuzov, U.V., J.Phys.G 50 (2023) 12, 125004

Результаты

A.B. Arbuzov, U.V., Phys.Rev.D 109 (2024) 5, 053001

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h_e^{(0)}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} h_1 + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \Big\{ \Big[h_2^{(0,\gamma)} + h_2^{(0,NS)} \\
&+ h_2^{(0,S)} \Big] L^2 + \Big[h_2^{(1,\gamma)} + h_2^{(1,NS)} + h_2^{(1,S)} + h_2^{(1,int)} \Big] L \Big\} \\
&+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \Big\{ \Big[h_3^{(0,\gamma)} + h_3^{(0,NS)} + h_3^{(0,S)} \Big] L^3 + \Big[h_3^{(1,\gamma)} + h_3^{(1,NS)} \\
&+ h_3^{(1,S)} + h_3^{(1,int)} \Big] L^2 \Big\} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4 \Big\{ \Big[h_4^{(0,\gamma)} + h_4^{(0,NS)} + h_4^{(0,S)} \Big] L^4 \\
&\equiv h_0(z) + \sum_{i,j} \alpha^i L^j H_{ij}(z)
\end{aligned}
$$

Были рассчитаны поправки порядков $\alpha^3 L^2,\ \alpha^4 L^4$
Уточнены результаты для порядков $\alpha^2 L,\ \alpha^3 L^3$
Рассчитаны отдельно чисто фотонные поправки $+\alpha^4 L^3$, согласие с
P. Banerjee et. al., SciPost Phys. 15, 021 (2023)

Выбор масштаба факторизации

Старый масштаб факторизации:

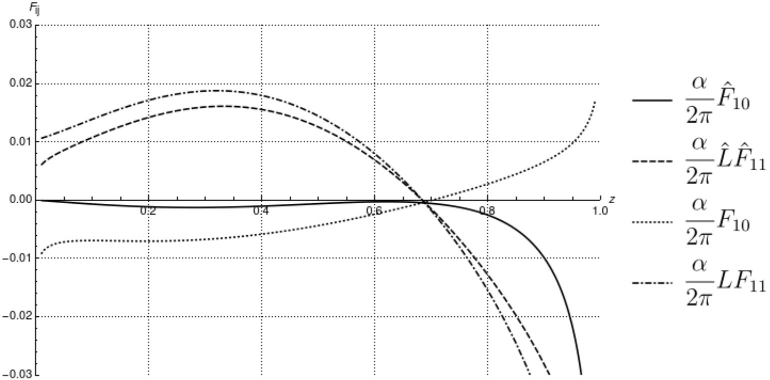
$$\mu_F^2 = m_\mu^2$$

Новый масштаб факторизации:

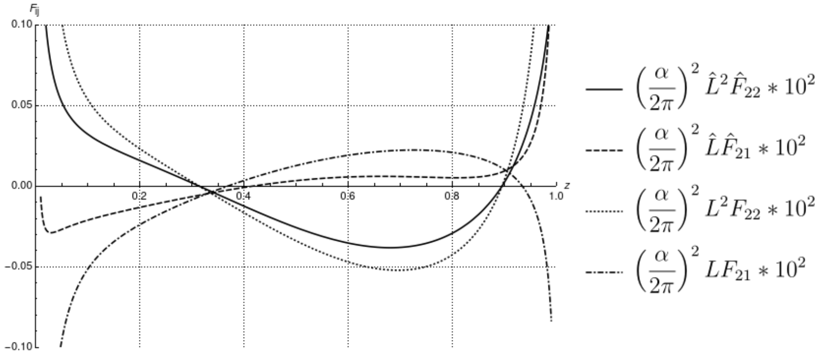
$$\mu_F^2 = m_\mu^2 z(1-z)$$

Новый "большой логарифм":

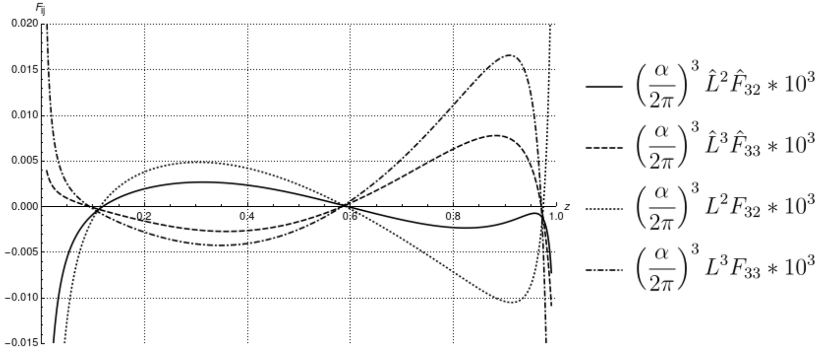
$$\hat{L} = L + \Delta L, \quad \Delta L = \ln z + \ln(1-z)$$



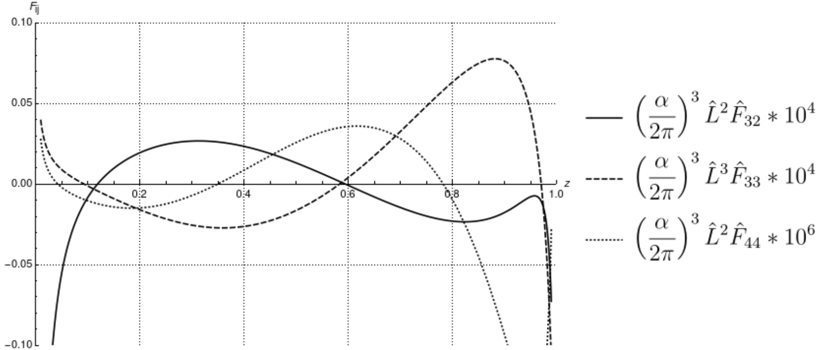
Выбор масштаба факторизации



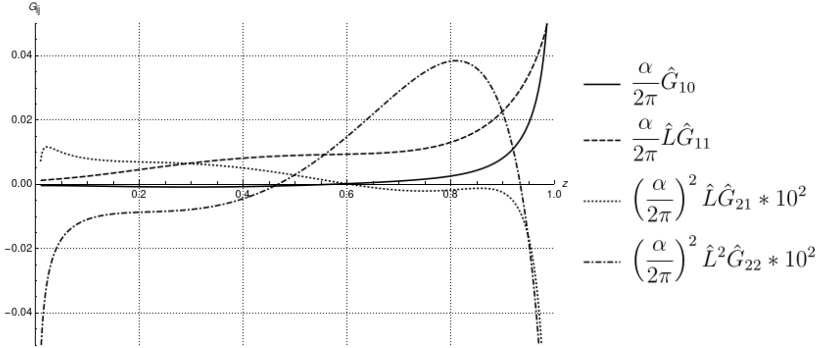
Выбор масштаба факторизации



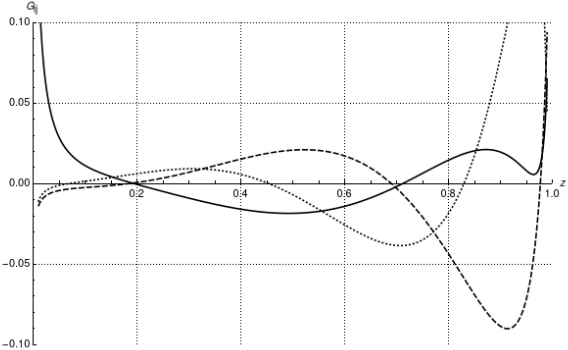
Неполяризованная часть



Поляризованная часть



Поляризованная часть

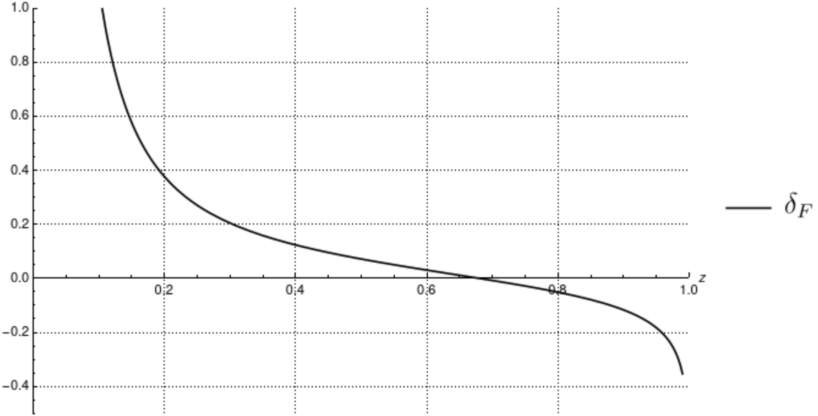


$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^2 \hat{G}_{32} * 10^4$

$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^3 \hat{G}_{33} * 10^4$

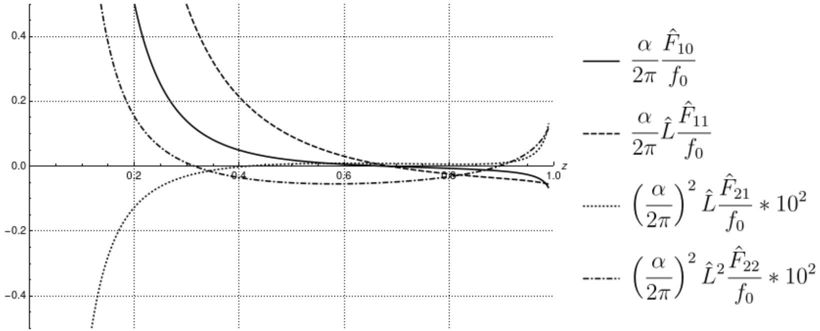
$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4 \hat{L}^4 \hat{G}_{44} * 10^6$

Относительная величина поправки

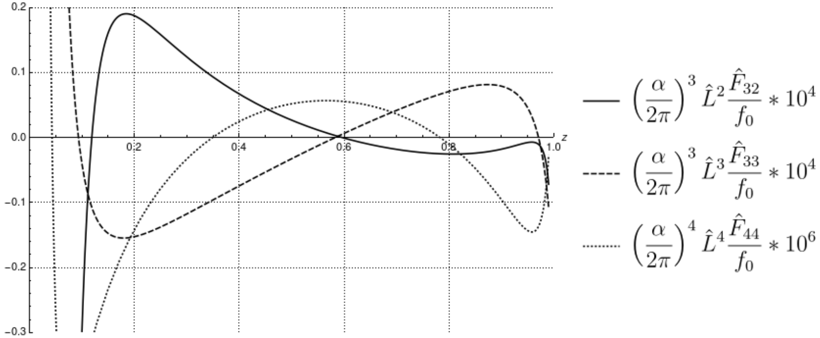


$$\delta_F = \frac{1}{f_0(z)} \sum_{i,j} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^i \hat{L}^j \hat{F}_{ij}(z)$$

Относительная величина отдельных вкладов



Относительная величина отдельных вкладов



Заключение

- Вычислены поправки к энергетическому спетру электрона при распаде мюона до порядка $\alpha^3 L^2$
- Найден масштаб факторизации, позволяющий улучшить результаты
- В распадах мюона можно найти новую физику
- Эксперименты по распаду мюона позволяют искать распады, запрещенные СМ
- Эксперименты по распаду мюона позволяют изучать слабое взаимодействие, в частности, наличие примесей других взаимодействий

Спасибо за внимание!

Точность

Учтено: $\alpha^2 L^2, \quad \alpha^2 L, \quad \alpha^3 L^3, \quad \alpha^3 L^2, \quad \alpha^4 L^4$
Не учтено: $\alpha^2 L^0$, $\alpha^3 L^1$
Наша неопределенность: $3 \cdot 10^{-5}$

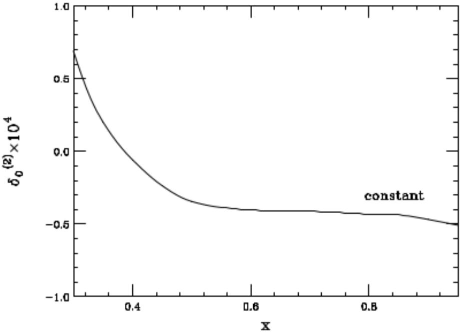


FIG. 6: The ratio of the constant NNLO coefficient relative to the tree result, $\delta_0^{(2)} = (\alpha/\pi)^2 f_0^{(2)}(x)/f^{(0)}(x)$, versus the electron energy fraction x. The y-axis has been scaled by 10^4.

Anastasiou, Melnikov, Petriello, JHEP 09 (2007), 014

Радиационные поправки в КЭД

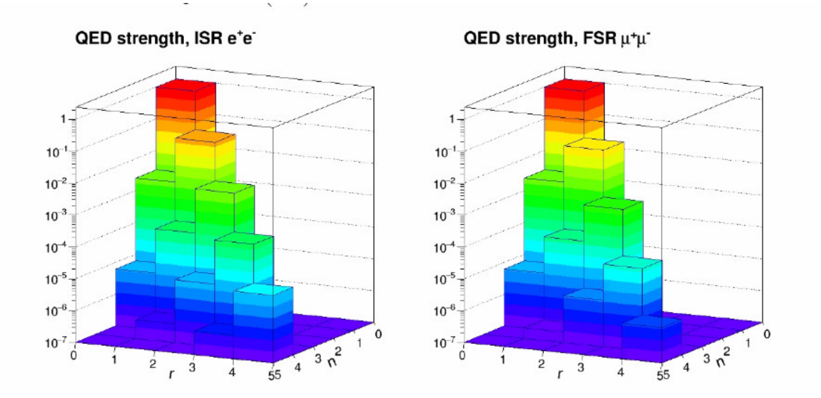


Fig. from Jadach, Skrzypek, arXiv: 1903.09895

Уравнение эволюции партонных распределений в КЭД

Операция свертки

$$(f \otimes g)(x) \equiv \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dy\ f(z)g(y)\delta(x - yz) = \int\limits_x^1 \frac{dz}{z} f(z)g(\frac{x}{z})$$

$$f(x) = \lim_{\Delta \to 0} \Bigg(f_\Theta(x)\Theta(1 - x - \Delta) + f_\Delta \delta(1 - x) \Bigg)$$

$$\int\limits_z^1 dx [f(x)]_+ g(x) = \int\limits_0^1 dx f(x) \Big[g(x)\Theta(x - z) - g(1) \Big]$$

$$f_\Delta = - \int\limits_0^{1-\Delta} f_\Theta(z) dz$$

$$\Big(f \otimes g\Big)_\Theta(z) = \lim_{\Delta \to 0} \Bigg\{ \int\limits_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} \frac{dx}{x} f_\Theta(x) g_\Theta\left(\frac{z}{x}\right) + f_\Delta g_\Theta(z) + f_\Theta(z) g_\Delta \Bigg\}$$

Уравнение эволюции партонных распределений в КЭД

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \overline{\Pi}(\frac{-q^2}{\mu^2}, \frac{\overline{m}}{\mu}, \alpha_0)}$$

$$\overline{\Pi} = 2\alpha_0 \left(\left(\frac{5}{9} - \frac{L}{3} \right) + 4\alpha_0^2 \left(\frac{55}{48} - \zeta_3 - \frac{L}{4} \right) + 8\alpha_0^3 \left(\frac{-L^2}{24} \right) \right) + \dots$$

*P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn and C. Sturm, Nucl. Phys. B **867** (2013), 182-202*
$\alpha_0 = \frac{1}{137}$