

Научная сессия секции ядерной
физики ОФН РАН



О квантовании скалярного и спинорного полей в пространстве-времени Шварцшильда

И.П. Волобуев, В.О. Егоров, М.Н. Смоляков
(НИИЯФ МГУ)

4.04.2024

План

- Введение
- Скалярное поле. Спектр
- Квазисостояния рассеяния
- Каноническое квантование
- Спинорное поле
- Заключение

Введение

Квантование полей в присутствии черных дыр обсуждается уже давно, однако пробелы все еще остаются. Так, не все вопросы такого квантования рассмотрены с достаточной математической строгостью.

- Не проверено выполнение коммутационных соотношений, что является необходимым шагом при каноническом квантовании.
- Детально не обсуждаются наличие подходящей полной системы собственных функций, по которым будет раскладываться квантованное поле, и свойства этих функций.

- Является спектр состояний дискретным или непрерывным? Разные авторы противоречат друг другу даже в простейшем случае скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда в рамках релятивистской квантовой механики. См., например, работы
 - N. Deruelle, R. Ruffini, Phys. Lett. B **52** (1974) 437,
 - A. Zecca, Nuovo Cim. B **124** (2009) 1251.
- Наличие «белой дыры» в координатах Крускала-Секереша (максимальное аналитическое расширение координат Шварцшильда) приводит к проблемам с физической интерпретацией получающейся теории.

В недавней работе

- G. 't. Hooft, arXiv:2206.04608 [gr-qc]

была сделана попытка решить последнюю проблему путем «квантового клонирования» внешних областей черной и белой дыр.

Внутренние области обеих дыр в этом подходе оказываются лишь математическими артефактами, которые не имеют прямой физической интерпретации и не играют никакой роли в эволюции системы.

Таким образом, актуальным остается вопрос, возможно ли построить последовательную квантовую теорию поля в пространстве-времени Шварцшильда только над горизонтом.

Скалярное поле. Спектр

Действие действительного скалярного поля $\phi(x)$ в произвольных криволинейных координатах:

$$S = \int L d^4x = \int \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2 \right) \sqrt{-g} d^4x.$$

Метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где $r_0 = 2GM_{\text{ВН}}$ — гравитационный радиус.

Важно: физические состояния квантовых систем всегда нормируемы. Для удаленного наблюдателя волновые функции таких состояний над горизонтом есть элементы гильбертова пространства функций с конечной нормой.

Т.о., мы рассматриваем функции, для которых

$$\int_{r>r_0} \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}} \phi^2(t, r, \theta, \varphi) < \infty.$$

Следовательно, ϕ стремится к нулю на горизонте и на бесконечности достаточно быстро.

Тогда поверхностные члены не дают вклада, и мы получаем уравнение движения в форме

$$\sqrt{-g} g^{00} \ddot{\phi} + \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \phi) + M^2 \sqrt{-g} \phi = 0.$$

Будем искать стационарные состояния в виде

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{\pm iEt} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}(E, r, \theta, \varphi) = e^{\pm iEt} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l(E, r) Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Получаем радиальное уравнение:

$$E^2 \frac{r}{r-r_0} f_l - M^2 f_l + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r(r-r_0) \frac{df_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_l = 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\rho = r/r_0, \quad \varepsilon = Er_0, \quad \mu = Mr_0, \quad u_l(\varepsilon, \rho) = r_0 f_l(E, r),$$

затем к «черепашьей» координате

$$z = \rho(z) + \ln(\rho(z) - 1),$$

и, наконец, произведем замену

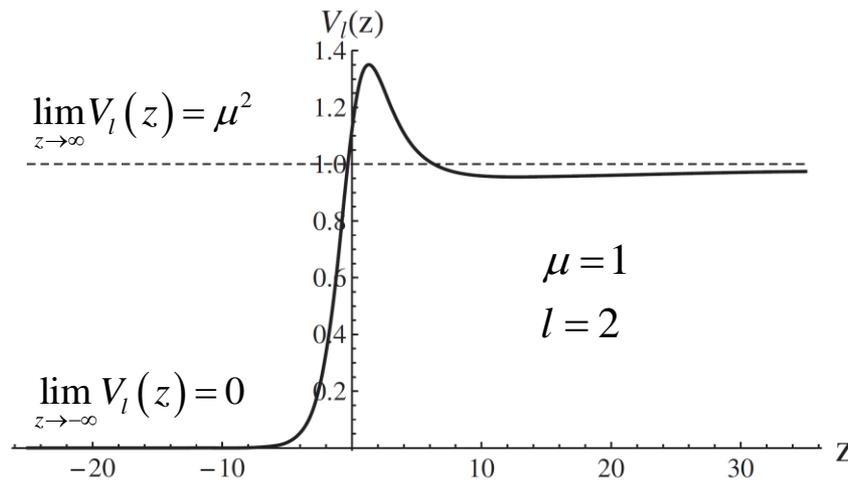
$$u_l(\varepsilon, z) = \frac{\psi_l(\varepsilon, z)}{\rho(z)}.$$

Тогда радиальное уравнение примет вид одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2 \psi_l(\varepsilon, z)}{dz^2} + V_l(z) \psi_l(\varepsilon, z) = \varepsilon^2 \psi_l(\varepsilon, z)$$

с потенциалом

$$V_l(z) = \frac{\rho(z) - 1}{\rho(z)} \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{\rho^2(z)} + \frac{1}{\rho^3(z)} \right).$$



Потенциал представляет собой 1D потенциал типа «ступенька», как в нерелятивистской квантовой механике. Следовательно,

уравнение с этим потенциалом имеет такой же непрерывный спектр энергий $0 < \varepsilon < \infty$. Можно показать, что состояния с $\varepsilon = 0$ нет.

Для $\varepsilon < \mu$ и $z \rightarrow \infty$ существуют две асимптотики $\sim e^{\pm \sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2} z}$, но нормируемо только решение с «-». Т.о., $\forall l$ и $0 < \varepsilon < \mu$ существует только одно физически осмысленное решение. При $\varepsilon > \mu$ все асимптотики конечны, и $\forall l$ имеется два линейно независимых решения, $\psi_{lp}(\varepsilon, z)$, где $p = 1, 2$.

Квазисостояния рассеяния

Для энергий $E > M$ удобно ввести состояния

$$\phi_p(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(\frac{\pi l}{2} + \delta_{lp}(k))} P_l\left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{kr}\right) \left(\frac{\sqrt{k}}{(k^2 + M^2)^{\frac{1}{4}}} f_{lp}\left(\sqrt{k^2 + M^2}, r\right) \right).$$

Можно показать, что при больших r

$$\phi_p(\vec{k}, \vec{x}) \sim e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} + A_p(\vec{k}, \vec{x}) \frac{e^{ikr}}{r},$$

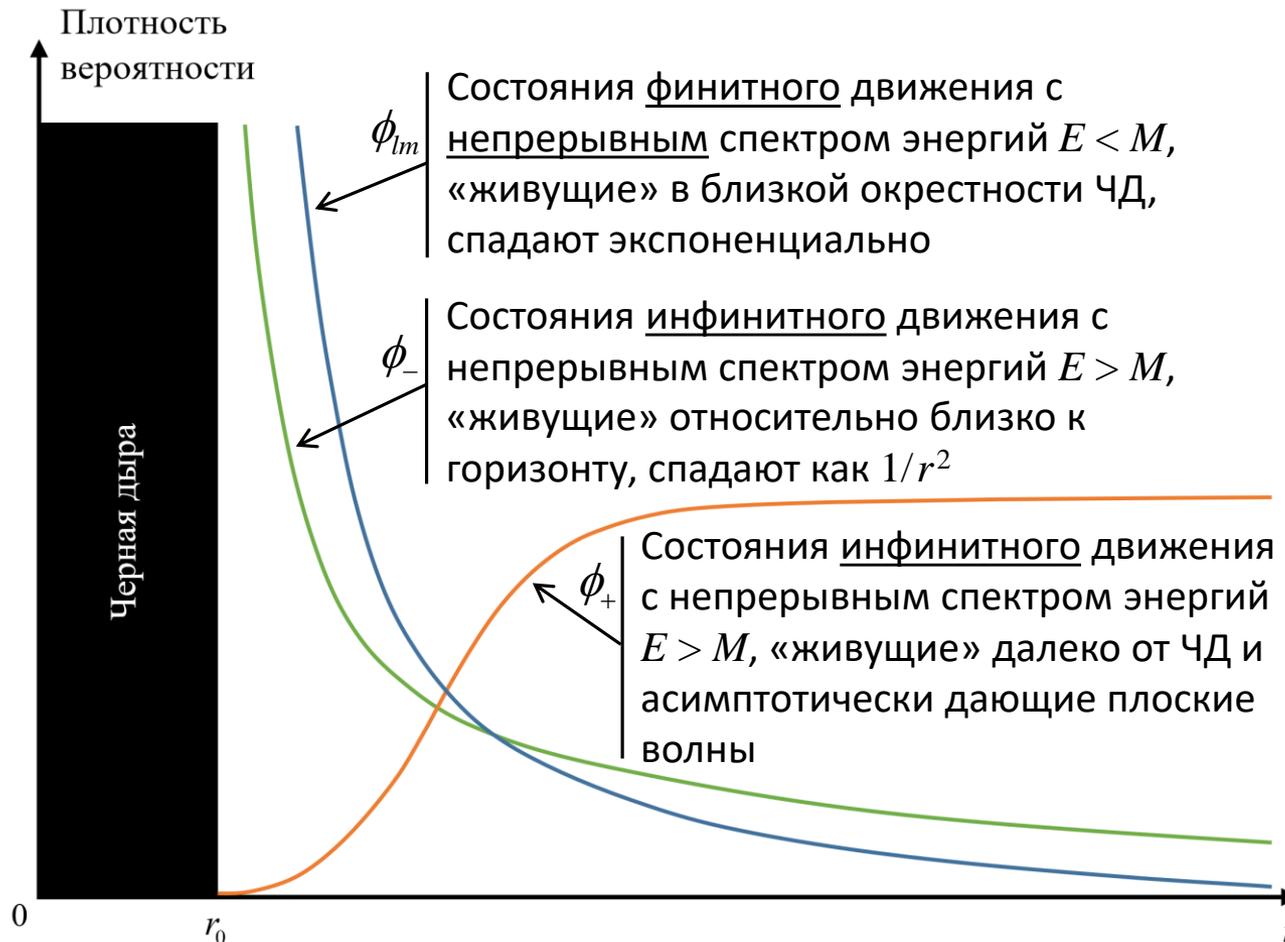
Квазиамплитуда
рассеяния

$$A_p(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l\left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{kr}\right) \left(e^{i\left(2\delta_{lp}(k) + \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} - e^{-i\frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)} \right).$$

Еще раз: для данного \vec{k} можно построить два квазисостояния рассеяния, отличающихся A_p .

Введем новые состояния

$$\phi_+ (\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 (\vec{k}, \vec{x}) + \phi_2 (\vec{k}, \vec{x})), \quad \phi_- (\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 (\vec{k}, \vec{x}) - \phi_2 (\vec{k}, \vec{x})).$$



Состояния финитного движения с непрерывным спектром энергий $E < M$, «живущие» в близкой окрестности ЧД, спадают экспоненциально

Состояния инфинитного движения с непрерывным спектром энергий $E > M$, «живущие» относительно близко к горизонту, спадают как $1/r^2$

Состояния инфинитного движения с непрерывным спектром энергий $E > M$, «живущие» далеко от ЧД и асимптотически дающие плоские волны

Поведение всех полевых состояний можно качественно проиллюстрировать рисунком слева.

Проведя довольно громоздкие вычисления, можно показать, что условия ортогональности для всех полевых состояний имеют вид

$$\int_{r>r_0} \sqrt{-g} g^{00} \phi_{lm}^* (E, \vec{x}) \phi_{l'm'} (E', \vec{x}) d^3x = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E'),$$

$$\int_{r>r_0} \sqrt{-g} g^{00} \phi_{lm}^* (E, \vec{x}) \phi_{\pm}(\vec{k}, \vec{x}) d^3x = 0,$$

$$\int_{r>r_0} \sqrt{-g} g^{00} \phi_{\pm}^*(\vec{k}, \vec{x}) \phi_{\pm}(\vec{k}', \vec{x}) d^3x = 0,$$

$$\int_{r>r_0} \sqrt{-g} g^{00} \phi_{\pm}^*(\vec{k}, \vec{x}) \phi_{\pm}(\vec{k}', \vec{x}) d^3x = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'),$$

а условие полноты системы таких функций дается выражением

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^M \phi_{lm}^* (E, \vec{x}) \phi_{lm} (E, \vec{y}) dE + \sum_{p=\pm} \int \phi_p^* (\vec{k}, \vec{x}) \phi_p (\vec{k}, \vec{y}) d^3k = \frac{\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})}{\sqrt{-g} g^{00}}.$$

Каноническое квантование

Разложим поле следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^M \frac{dE}{\sqrt{2E}} \left(e^{-iEt} \phi_{lm}(E, \vec{x}) a_{lm}(E) + e^{iEt} \phi_{lm}^*(E, \vec{x}) a_{lm}^\dagger(E) \right) \\ & + \sum_{p=\pm} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\sqrt{k^2 + M^2}}} \left(e^{-i\sqrt{k^2 + M^2}t} \phi_p(\vec{k}, \vec{x}) a_p(\vec{k}) + e^{i\sqrt{k^2 + M^2}t} \phi_p^*(\vec{k}, \vec{x}) a_p^\dagger(\vec{k}) \right). \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[a_{lm}(E), a_{l'm'}^\dagger(E') \right] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E'),$$

$$\left[a_{\pm}(\vec{k}), a_{\pm}^\dagger(\vec{k}') \right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'),$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Используя условие полноты системы собственных функций, можно показать, что канонические коммутационные соотношения выполняются точно:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= 0, \quad [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0, \end{aligned}$$

где

$$\pi(t, \vec{x}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(t, \vec{x})} = \sqrt{-g(\vec{x})} g^{00}(\vec{x}) \dot{\phi}(t, \vec{x})$$

есть канонически сопряженный импульс, соответствующий канонической координате $\phi(t, \vec{x})$. Точное выполнение этих коммутационных соотношений необходимо для последовательной процедуры канонического квантования.

Спинорное поле

Действие спинорного поля $\psi(x)$ в произвольных криволинейных координатах:

$$S = \int L d^4x = \int \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^{(v)} e_{(v)}^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} e_{(v)}^\mu \gamma^{(v)} \psi) - M \bar{\psi} \psi \right] \sqrt{-g} d^4x.$$

Ковариантная производная: $\nabla_\mu \psi = \left(\partial_\mu \psi + \frac{1}{8} g_{\sigma\tau} e_{(v)}^\tau (\partial_\mu e_{(\rho)}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma e_{(\rho)}^\lambda) [\gamma^{(v)}, \gamma^{(\rho)}] \psi \right)$

Тетрада

Получаем обобщенное уравнение Дирака:

$$i \gamma^{(v)} e_{(v)}^\mu \nabla_\mu \psi - M \psi = 0, \quad (\|\psi\| < \infty).$$

В координатах Шварцшильда оно выглядит так:

$$\begin{aligned} i \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{(0)} \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{(1)} \left[\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{3r_0}{4r}\right) \right] \psi + \\ + \frac{i}{r} \gamma^{(2)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg } \theta}{2} \right] \psi + \frac{i}{r \sin \theta} \gamma^{(3)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - M \psi = 0. \end{aligned}$$

Будем искать решение в виде:

$$\psi_{Ejlm}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} f_{jl}(E, r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi) \\ ig_{jl'}(E, r) \Omega_{jl'm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} e^{-iEt}.$$

Радиальные функции (действительные)

$$\Omega_{jlm}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} C_{l, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{jm} Y_l^{m - \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ C_{l, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{jm} Y_l^{m + \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

Коэффициенты Клебша-Гордана

Шаровые спиноры. Образуют полную и ортогональную систему функций в пространстве комплексных спиноров на сфере S^2

$$l = j \pm \frac{1}{2}, \quad l' = j \mp \frac{1}{2}.$$

Получим радиальное уравнение:

$$\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \left(-i\sigma_2 \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{\kappa}{r} + \sigma_3 M \right) \begin{pmatrix} f_{jl} \\ g_{jl'} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_{jl} \\ g_{jl'} \end{pmatrix}, \quad \kappa = l(l+1) - j(j+1) - \frac{1}{4}.$$

Его решения образуют полную ортогональную систему функций.

Аналогично случаю скалярного поля, можно показать, что:

- спектр энергий спинорных состояний непрерывен во всем диапазоне $-\infty < E < \infty$,
- при $|E| > M$ решения также удваиваются,
- канонические антикоммутиационные соотношения выполняются точно,
- гамильтониан спинорного поля на фоне ЧД Шварцшильда может быть записан в виде

$$H = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j\pm\frac{1}{2}} \left[\int_0^M E \left(a_{jlm}^{\dagger}(E) a_{jlm}(E) + b_{jlm}^{\dagger}(E) b_{jlm}(E) \right) dE + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^2 \int_M^{\infty} E \left(a_{jlm}^{(p)\dagger}(E) a_{jlm}^{(p)}(E) + b_{jlm}^{(p)\dagger}(E) b_{jlm}^{(p)}(E) \right) dE \right].$$

Удвоение числа состояний при $E > M$

Заключение

- Показано, что согласованные квантовые теории скалярного и спинорного полей на фоне ЧД Шварцшильда вне горизонта могут быть построены без учета внутренней ЧД.
- Спектр состояний имеет две ветви:
 - непрерывный при $E < M$, что соответствует частицам, запертым в окрестности горизонта (финитное движение);
 - непрерывный при $E > M$, что соответствует инфинитному движению частиц.
- Состояния в ветви $E > M$ дважды вырождены, чего нет в плоском пространстве-времени. Это топологический эффект.

- Произведено разложение скалярного поля в терминах состояний, похожих на обычные состояния рассеяния. Они удобны вдали от ЧД и напоминают там плоские волны. Из-за двукратного вырождения каждому импульсу соответствует два таких состояния.
- Полученные результаты важны для описания квантовых явлений вблизи ЧД, например эффекта Хоккинга, и могут влиять на сечения процессов СМ в гравитационном поле ЧД.

- Основные публикации:
 - V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, Phys. Rev. D **107** (2023) 025001;
 - M. Smolyakov, Phys. Rev. D **108** (2023) 105006;
 - V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, Class. Quant. Grav. **41** (2024) 045002.
- Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология».

Спасибо за внимание!

Запасные слайды

Условия полноты для радиальных функций спинорного поля:

$$\int_0^M dE \left(f_{jl}(E, r) f_{jl}(E, r') + g_{jl}(E, r) g_{jl}(E, r') \right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^2 \int_M^\infty dE \left(f_{jl}^{(p)}(E, r) f_{jl}^{(p)}(E, r') + g_{jl}^{(p)}(E, r) g_{jl}^{(p)}(E, r') \right) = \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \delta(r - r'),$$

$$\int_0^M dE \left(f_{jl}(E, r) g_{j'l'}(E, r') + g_{jl}(E, r) f_{j'l'}(E, r') \right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^2 \int_M^\infty dE \left(f_{jl}^{(p)}(E, r) g_{j'l'}^{(p)}(E, r') + g_{jl}^{(p)}(E, r) f_{j'l'}^{(p)}(E, r') \right) = 0.$$

Условие ортогональности:

$$\int_{r_0}^\infty \frac{dr}{1 - \frac{r_0}{r}} \left(f_{jl}(E, r) f_{jl}(E', r) + g_{j'l'}(E, r) g_{j'l'}(E', r) \right) = \delta(E - E').$$

Форма квазипотенциалов:

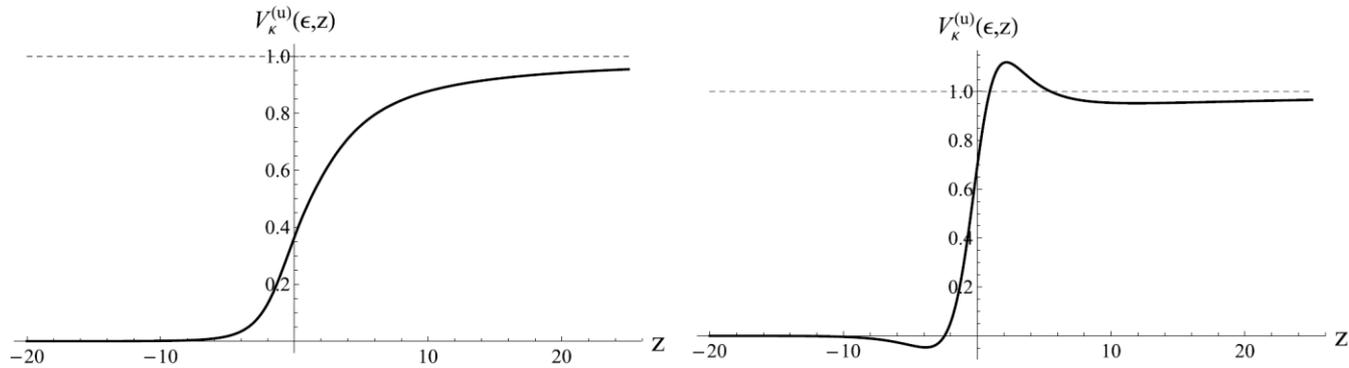


Figure 1. $V_{\kappa}^{(u)}(\epsilon, z)$ for $\mu = 1$, $\kappa = -1$, $\epsilon = 0.5$ (left plot) and $\mu = 1$, $\kappa = 2$, $\epsilon = 2$ (right plot). The dotted line corresponds to $\lim_{z \rightarrow \infty} V_{\kappa}^{(u)}(\epsilon, z) = \mu^2$.

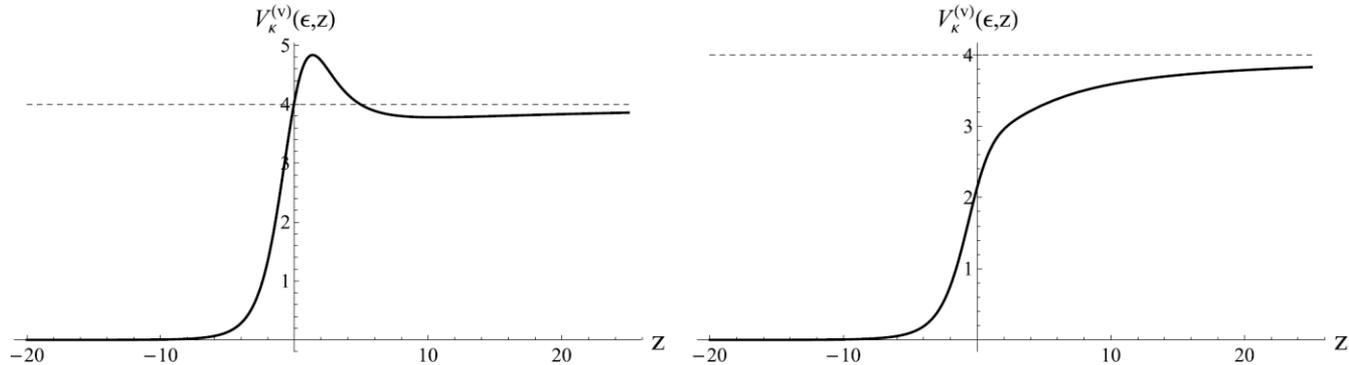


Figure 2. $V_{\kappa}^{(v)}(\epsilon, z)$ for $\mu = 2$, $\kappa = 5$, $\epsilon = -0.2$ (left plot) and $\mu = 2$, $\kappa = 3$, $\epsilon = -3$ (right plot). The dotted line corresponds to $\lim_{z \rightarrow \infty} V_{\kappa}^{(v)}(\epsilon, z) = \mu^2$.

Итак, гамильтониан имеет только непрерывный спектр от $-\infty$ до ∞ , и его СФ можно построить следующим образом. Решения с положительной энергией $0 < E < M$ даются выражением

$$\phi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} f_{jl}(E, r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi) \\ ig_{j'l'}(E, r) \Omega_{j'l'm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Решения с отрицательной энергией $-m < E < 0$ представляются как

$$\chi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} g_{jl}(E, r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi) \\ if_{j'l'}(E, r) \Omega_{j'l'm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Дважды вырожденные решения с положительной и отрицательной энергией $|E| > M$ обозначаются $\phi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi)$ и $\chi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi)$ и выражаются так же, только с функциями $f_{jl}^{(p)}$, $g_{jl}^{(p)}$, $p = 1, 2$.

Разложение спинорного поля в терминах полной системы стационарных решений уравнения Дирака имеет вид

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j\pm\frac{1}{2}} \left[\int_0^M dE \left(e^{-iEt} \phi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) a_{jlm}(E) + e^{iEt} \chi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) b_{jlm}^\dagger(E) \right) + \sum_{p=1}^2 \int_M dE \left(e^{-iEt} \phi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi) a_{jlm}^{(p)}(E) + e^{iEt} \chi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi) b_{jlm}^{(p)\dagger}(E) \right) \right].$$

Операторы рождения и уничтожения a , b , $a^{(p)}$, $b^{(p)}$ должны удовлетворять антикоммутиационным соотношениям

$$\{a_{jlm}(E), a_{j'l'm'}^\dagger(E')\} = \{b_{jlm}(E), b_{j'l'm'}^\dagger(E')\} = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E'),$$

$$\{a_{jlm}^{(p)}(E), a_{j'l'm'}^{(p)\dagger}(E')\} = \{b_{jlm}^{(p)}(E), b_{j'l'm'}^{(p)\dagger}(E')\} = \delta_{pp'} \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E').$$

Используя эти результаты, можно показать, что канонические антикоммутиационные соотношения выполняются точно,

$$\{\psi_{\alpha}(t, r, \theta, \varphi), \psi_{\beta}^{+}(t, r', \theta', \varphi')\} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ — спинорные индексы).