Кварковый газ при высоких температурах: эффекты конечного объёма

Р. Н. Рогалёв, Н. В. Герасименюк, А. А. Корнеев

НИЦ “Курчатовский институт” - ИФВЭ

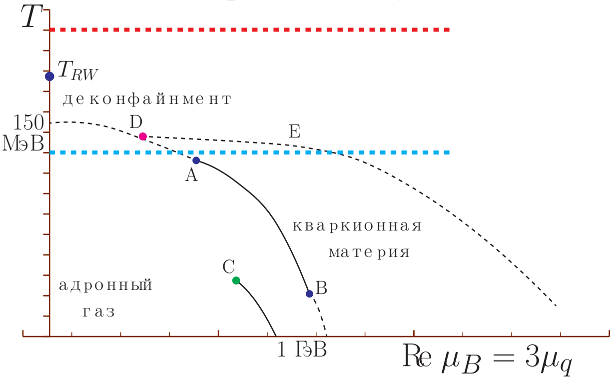
05.04.2024

План

1. Мотивация работы: изучение распределений файерболов по барионному числу
2. Проблема отрицательных вероятностей
3. Статсумма одномерного газа свободных безмассовых фермионов
4. Зависимость канонических статсумм от малых вариаций давления
5. Нули Ли-Янга для различных приближений
6. Заключение

Вклад Н.В.Герасименюка поддержан грантом РНФ 23-12-00072 «Изучение теории сильных взаимодействий в экстремальных условиях методами решёточного моделирования», вклад А.А.Корнеева — Государственным заданием Минобрнауки России по проекту №FZNS-2024-0002 "Решение передовых проблем в физике конденсированных сред и элементарных частиц методами вычислительной теории поля".

Фазовая диаграмма КХД



AB - киральный ф.п.; DE - переход к деконфайнменту;
Изучаем давление, барионную плотность и распределение по барионному числу на красной пунктирной линии.

Большая каноническая статсумма

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_j \langle j| \exp\left(\frac{-\hat{H} + \mu\hat{B}}{T}\right) |j\rangle$$

может быть разложена в ряд Лорана по фугитивности $\xi = e^{\theta}$ ($\theta = \mu/T = \theta_R + \imath\theta_I$):

$$Z_{GC}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n) e^{n\theta},$$

она периодична по θ_I с периодом 2π. Обратное преобразование имеет вид:

$$Z_C(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{-in\theta_I} Z_{GC}(\theta)\Big|_{\theta_R=0} .$$

Феноменологические аспекты

$\mathcal{P}_n = \dfrac{Z_C(n)\xi^n}{Z_{GC}(\theta)}$ - вероятность того, что

$\boxed{\text{барионный заряд системы при данных } T \text{ и } \mu_B \text{ равен } n}$.

В силу сохранения C- чётности, $Z_C(n) = Z_C(-n)$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{-n}} = \xi^{2n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_B = \frac{T}{2n} \ln\left(\frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{-n}}\right)$$

Эта формула даёт:

- Указание на процедуру измерения μ_B
- Критерий ТД равновесия:
  химпотенциалы, полученные по разным n, совпадают

$$Z_{GC}(\theta) = \sum_j \langle j| \exp\left(\frac{-\hat{H} + \mu\hat{B}}{T}\right)|j\rangle$$
$$= \int \mathbf{D}U e^{-S_G} (\det \mathcal{D}(\mu_q))^{N_f}$$

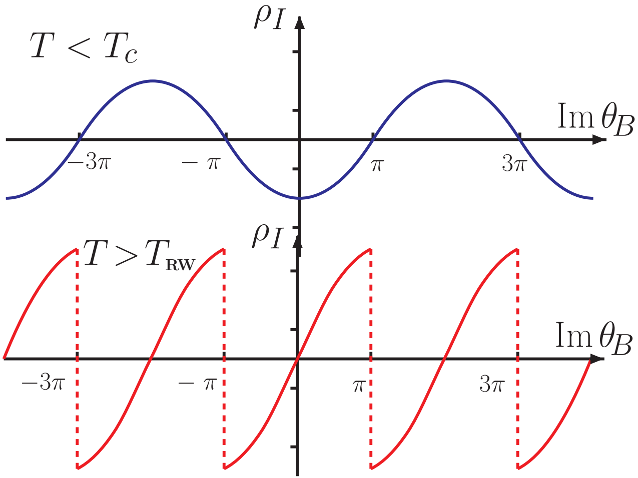
$$B(\theta) = \frac{\partial \ \ln Z_{GC}}{\partial\theta} \qquad P(\theta, T) = -\frac{1}{V}\ln Z_{GC} \qquad \theta = \frac{\mu}{T}$$

Так находим барионную плотность B и $\Longrightarrow$ большую статсумму

$$B(\theta) = \frac{\partial(T \ln Z_{GC})}{\partial\mu_B} \Longrightarrow Z_{GC}(\theta_I)|_{\theta_R=0} = \exp\left(\int_0^{\theta_I} B(x)\, dx\right)$$

и канонические статсуммы

$$Z_C\,(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{-in\theta_I} Z_{GC}(\theta_I, T, V)\ ,$$



Безразмерная кварковая плотность $\hat{\rho} = \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = \rho_R + \imath \rho_I$; $\theta \equiv \theta_B$

$$Z_{GC}(\theta) = \exp\big(-\nu\hat{p}(\theta)\big), \quad \nu = VT^3, \quad \hat{p} = \frac{P}{T^4}$$

$\hat{p}(\theta_I)$ при $T > T_{RW}$ хорошо фитируется полиномом малой степени

$$\hat{p}(\theta_I)\Big|_{\theta_R=0} = \sum_{n=1}^{N_{param}} a_{2n}\theta_I^{2n}$$

Проблема: найти $Z_C(n)$ по заданным a_n

$$\mathcal{P}_n = \frac{Z_C(n)}{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} Z_C(k)}, \qquad Z_C(n) = Z_C(-n)$$

$\boxed{\text{Нужны вычисления с высокой точностью}}$

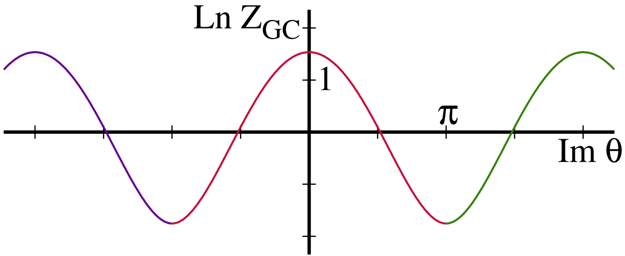
При $n > n_c$ получается $\mathcal{P}_n \sim (-1)^{n+1}$

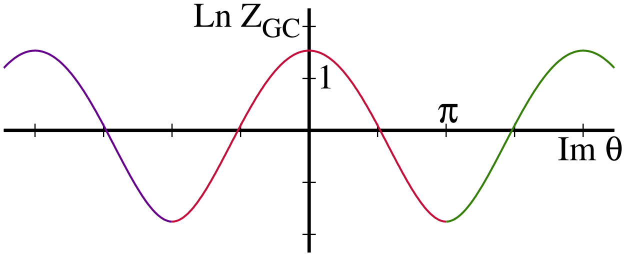
Формулы из учебников:

$$Z_{GC}(\theta) = \prod_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} \left(1+\exp\left(\frac{\mu - E_{\vec{n}}}{T}\right)\right)^{2g} \left(1+\exp\left(\frac{-\mu - E_{\vec{n}}}{T}\right)\right)^{2g} ,$$

$$g = N_F N_C N_s, \qquad E_{\vec{n}} = \frac{2\pi|\vec{n}|}{LT} = \frac{2\pi|\vec{n}|}{\sqrt[3]{\nu}}$$

$$\ln Z_{GC}(\theta) = \nu\hat{p} = \frac{\nu g}{12}\left(\frac{7\pi^2}{30} + \theta^2 + \frac{\theta^4}{2\pi^2}\right) ,$$





Если давление продолжить с сегмента $\pi \leq \theta_I \leq \pi$, где оно имеет вид

$$\hat{p}(\theta_I) = C - \frac{(\theta_I)^2}{6} + \frac{(\theta_I)^4}{12\pi^2}\,, \qquad N_C = N_F = 1$$

на всю мнимую ось периодически, то в точках $\mathrm{Im}\,\theta = \pm\pi$ оно непрерывно вместе со вторыми производными, однако

$$\hat{p}'''(\pi + 0) - \hat{p}'''(\pi - 0) = \frac{4}{\pi}$$

Коэффициенты разложения $\hat{p}(\theta_I)$ в ряд Фурье убывают как $\dfrac{1}{n^4}$:

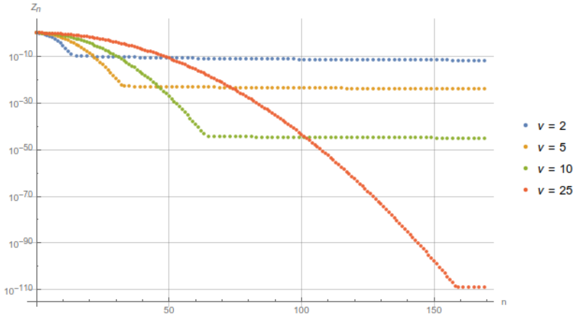
$$\hat{p}(\theta_I) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \Big(1 - \cos(n\theta_I)\Big),$$

отсюда следует аналогичное убывание канонических статсумм:

$$Z_C(n) \simeq \frac{2\nu(-1)^{n+1}}{\pi n^4} \, \exp\left(-\frac{\nu\pi^2}{12}\right), \qquad n \to \infty \, .$$

- Появляются отрицательные значения вероятностей $\mathcal{P}_n$
- Скорость убывания $Z_C(n)$ обеспечивает расходимость разложения по активности $\xi = e^{\theta}$ при $|\xi| \neq 1$
- парадоксы возникают при $n \gtrsim \nu$
  $\nu = VT^3$ - $(2\pi)^3 \times$число возбуждённых мод в объёме V при температуре T

Численное решение



библиотека
GNU MPFR
до 6000 знаков

$Z_n = Z_{nN}$

$\varrho = \dfrac{n}{\nu}, \varrho_c \approx 1.6$

$$Z_C\left(n\right) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} \exp\left(-in\theta_I + \int_0^{\theta_I} B(x)\, dx\right)$$

Для давления // здесь и далее $N_C = N_F = 1$

$$\hat{p} = \frac{1}{6}\left(\frac{7\pi^2}{30} + \theta^2 + \frac{\theta^4}{2\pi^2}\right)$$

соответствующего ему распределения вероятностей $\mathcal{P}_n$ по барионному числу НЕ СУЩЕСТВУЕТ.

При выводе этой формулы сумму по модам

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} \ln\left[1 + \exp\left(\frac{-2\pi|\vec{n}|}{\nu}\right)\right]$$

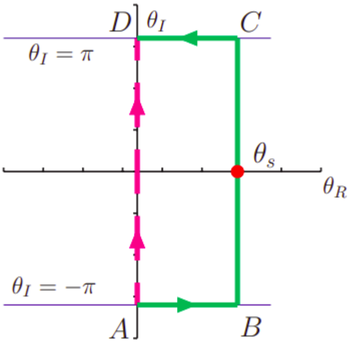
заменили на интеграл по (квази)импульсам, что и привело к неверному результату для $Z_C(n)$ при $n \gtrsim \nu$.

Результат для $Z_C(n)$ остаётся неверным и в пределе $\nu \to \infty$ при фиксированной плотности $\rho = \dfrac{n}{\nu}$

Почему это не было известно?

Интеграл

$$Z_C^A(n) = \int_{-\imath\pi}^{\imath\pi} d\theta \exp\left[-\nu\left(\frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{12\pi^2}\theta^4\right) + n\theta\right],$$



где $\nu = VT^3$, оценивался по методу перевала при $\nu \to \infty$.
Уравнение для седловой точки:

$$\theta_s + \frac{1}{\pi^2}\theta_s^3 = 3\frac{n}{\nu}$$

Тогда при $\nu \to \infty$ и $\hat{\rho} = \dfrac{n}{\nu}$ =const :

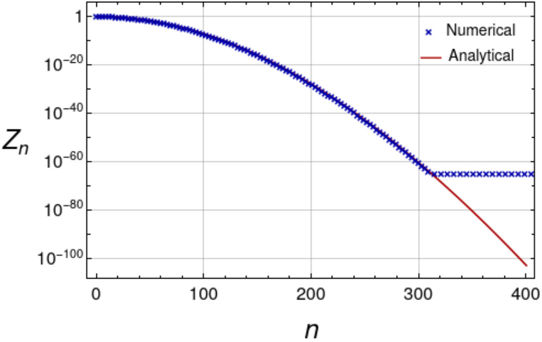
$$Z_C\,(n) \simeq \sqrt{\frac{6\pi^3}{\nu(3\pi^2+\theta_s^2)}}\exp\left[-\nu\left(\frac{1}{6}\theta_s^2 + \frac{1}{12\pi^2}\theta_s^4\right) + n\theta_s\right]$$

- $n \ll \nu$
  - $\theta_s \simeq 3\hat{\rho} - \dfrac{27}{\pi^2}\hat{\rho}^3 + \ldots$
  - $Z_C(n) \sim \exp\left(-\dfrac{3\nu\hat{\rho}^2}{2} + \ldots\right)$
- $n \gg \nu$
  - $\theta_s \simeq \sqrt[3]{3\pi^2\hat{\rho}} + \ldots$
  - $Z_C(n) \sim \exp\left(-\dfrac{\nu\,\sqrt[3]{81\pi^2\hat{\rho}^4}}{4} + \ldots\right)$

Асимптотическая формула даёт физически осмысленный результат

$$\mathcal{P}_n \sim \exp\left(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{\nu}}\, n^{4/3} + \ldots\right) > 0 \qquad \text{при} \quad n \gg \nu$$

Однако, физическая осмысленность - не гарантия истинности!



Если истинное распределение вероятностей даётся формулой

$$\varphi(\hat{\rho};\theta,\nu) = \sqrt{\nu}\exp\left(\nu\left(\theta\hat{\rho} - \hat{\mathcal{F}}(\hat{\rho}) - \hat{\boldsymbol{p}}(\theta,\nu)\right)\right)\ ,$$

то асимптотическая формула даёт

$$\varphi_A(\hat{\rho};\theta,\nu) = \sqrt{\nu}\exp\left(\nu\left(\theta\hat{\rho} - \hat{\mathcal{F}}_A(\hat{\rho}) - \hat{\boldsymbol{p}}(\theta,\nu)\right)\right)\ ,$$

$$\hat{\mathcal{F}}_A\left(\boldsymbol{x}\right) \equiv \langle\hat{\mathcal{F}}\rangle_\theta,\ \text{если}\ \theta : \langle\hat{\rho}\rangle_\theta = \boldsymbol{x}$$

(среднее значение свободной энергии $\hat{\mathcal{F}}$ при таком значении θ, при котором среднее значение плотности равно $\boldsymbol{x}$).

Можно ли по $\varphi_A(\hat{\rho};\theta,\nu)$ найти $\varphi(\hat{\rho};\theta,\nu)$?

В рассматриваемом случае - НЕТ

По теореме Марцинкевича, искомого $\varphi(\hat{\rho};\theta,\nu)$ не существует.

$$\text{Положим } \varphi(\hat{\rho};\theta,\nu) = \varphi_A(\hat{\rho};\theta,\nu)$$

Теперь, считая $\varphi_A(\hat{\rho};\theta,\nu)$, полученное преобразованием Лежандра из давления, истинным распределением по плотностям, мы восстановим давление как функцию химпотенциала. Точнее, мы определим коэффициенты $\varkappa_{2j}$, которые являются (с точностью до ν) кумулянтами распределения $\varphi_A(\hat{\rho})$

$$\hat{p}(\theta) = \hat{p}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{2j}}{(2j)!}\theta^{2j}$$

$\nu = LT = (2\pi\times$число температурных волн в "объёме" $L)$

Одномерный случай

$$\hat{p}^N = \frac{\theta^2}{2\pi} \text{ при } |\mathrm{Im}\theta < \pi| \qquad Z_C^{Naive}(n) \sim (-1)^{n+1} \quad \text{при } n \gtrsim \nu$$

$$\hat{p}^A(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{2j}^A}{(2j)!}\theta^{2j} \qquad Z_C^{Asympt}(n) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\nu}\right)$$

$$\hat{p}^T(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{2j}^T}{(2j)!}\theta^{2j} \qquad Z_C^{True}(n): \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_C^T(k)\xi^k =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \xi w^j\right)^2 \left(1 + \xi^{-1} w^j\right)^2$$

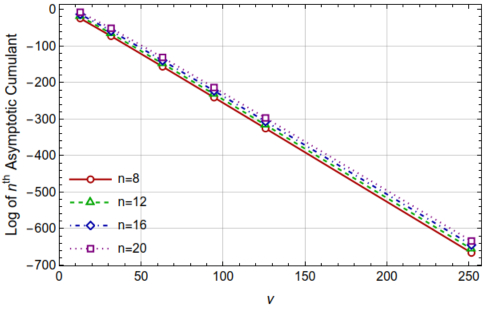
$$\varkappa_2^{Naive} = \frac{1}{\pi}, \qquad \varkappa_{2j}^{Naive} = 0 \text{ при } j > 1$$

$$\varkappa_{2j}^{Asympt} \to \varkappa_{2j}^{Naive} \text{ при } \nu \to \infty$$

$$\nu = LT,$$

L - длина "ящика".

Одномерный случай



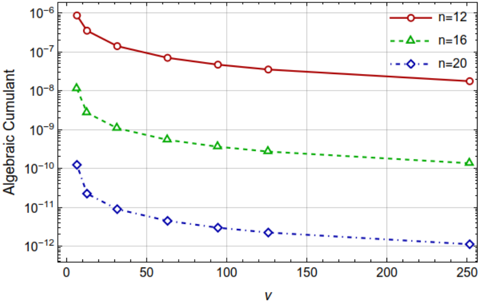
Распределение полученное по асимптотической формуле

$$Z_C^A(n) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\nu}\right)$$

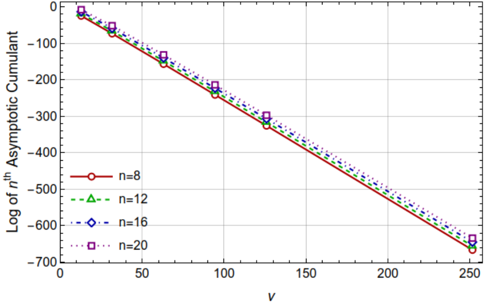
сильно отличается от соответствующего давлению $\hat{p} = \dfrac{\theta^2}{2\pi}$ при $|\mathrm{Im}\theta < \pi|$:

$$\frac{Z_C^N(n)}{Z_C^N(0)} = \frac{\exp\left(-\frac{n^2}{4\nu}\right)}{2Erf\left[\pi\sqrt{\nu}\right]} Erf\left[\frac{in - 2\pi\nu}{2\sqrt{\nu}}, \frac{in + 2\pi\nu}{2\sqrt{\nu}}\right]$$

$$\sim (-1)^{n+1} \quad \text{при } n > n_c \simeq \nu$$



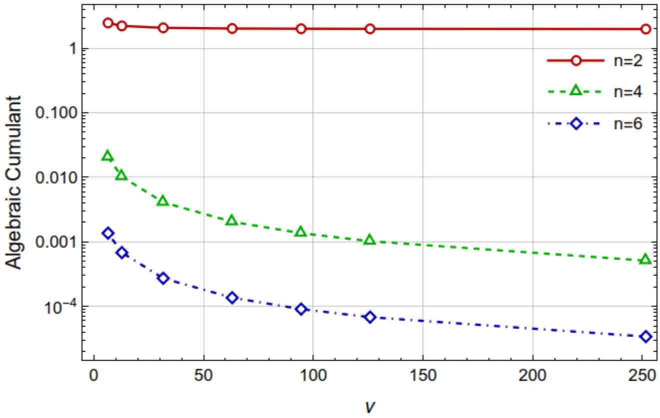
Кумулянты для одномерного газа, полученные из первых принципов ($\varkappa_j^{True}$).



при $j > 2$

$$\varkappa_j^{True} \gg \varkappa_j^{Asympt}$$

Кумулянты для одномерного газа, полученные по асимптотической формуле ($\varkappa_j^{Asympt}$).



Низшие кумулянты для одномерного ферми-газа, полученные из первых принципов путём суммирования по модам

Результаты для одномерного случая

$$Z_C^N(n) \simeq \exp\left(-\frac{n^2}{4\nu}\right) Erf\left[\frac{in - 2\pi\nu}{2\sqrt{\nu}}, \frac{in + 2\pi\nu}{2\sqrt{\nu}}\right]$$

$$Z_C^A(n) \simeq \exp\left(-\frac{n^2}{4\nu}\right)$$

$$Z_C^T(n) \simeq \exp\left(-\frac{n^2}{4\nu} + \frac{\sqrt{n^2+\nu^2}}{2\nu}\right)$$

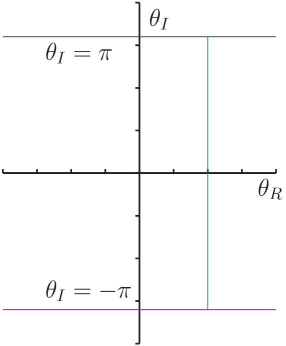
$Z_C^A(n)$ и $Z_C^T(n)$ отличаются в разы при $n \gtrsim \nu$.

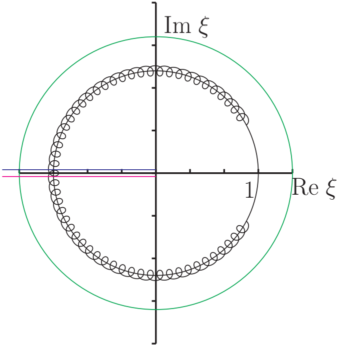
Подход Ли-Янга

- $Z_{GC}(\theta) \approx \sum_{n=-N}^{N} Z_C(n) e^{n\theta}$,
  $\xi^N Z_{GC}$ - полином по $\xi = e^{\theta}$
- Корни такого полинома выстраиваются вдоль какой-либо линии в плоскости ξ
- Фазовый переход - неаналитичность в ТД функциях:

  как она возникает при $V \to \infty$?

  $lnZ_{GC}(\theta)$ имеет точки ветвления где $Z_{GC} = 0$
- Чтобы получить риманову поверхность функции $Z_{GC}(\theta)$, надо разрезать плоскость активности ξ по такой линии.

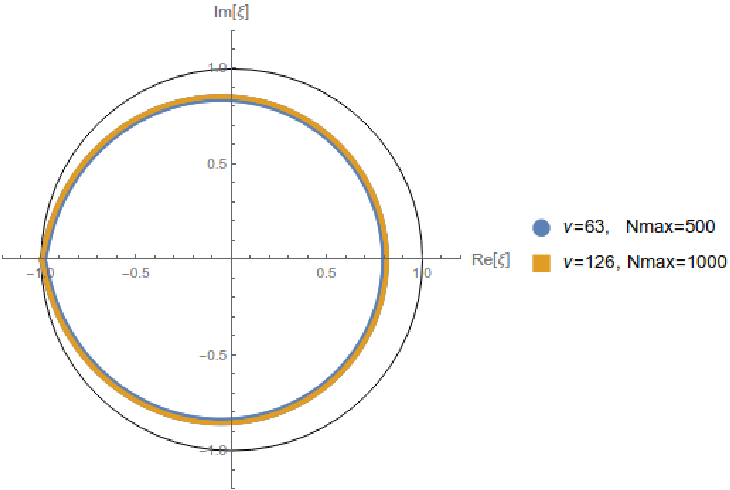




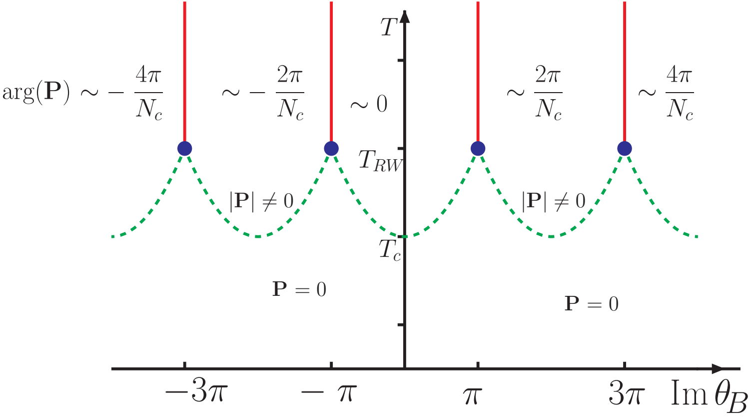
Плоскость химпотенциала

Плоскость активности

Волнистая линия - нули Ли-Янга в модели Изинга при $T > T_c$
Синяя и красная линии - нули Ли-Янга для газа свободных кварков ("истинные"и "асимптотические")



Распределение нулей Ли-Янга для статсуммы, соответствующей давлению $\hat{p} = \dfrac{\theta^2}{2\pi}$



Красные линии показывают переходы Роберге-Вайсса.
Секторы поляковской петли $\mathbf{P}$ указаны для неабелева случая по значениям её фазы.

Выводы:

- В пределе бесконечного объёма плотность газа свободных безмассовых кварков имеет разрыв при $\theta_I = \pm\pi$, отвечающий переходу Роберге-Вайсса. При $N_C = 1$ и $\theta_R = 0$ он становится переходом третьего рода по классификации Эренфеста.
- Аппроксимация давления как функции $theta$ полиномом конечной степени приводит к отрицательным вероятностям.
- Задача восстановления вероятностного распределения по барионному числу по известной барионной плотности плохо обусловлена.
- Решение этой задачи при помощи преобразования Лежандра даёт приближённый результат в случае отсутствия взаимодействия и нуждается в дополнительном обосновании в общем случае.

Спасибо за внимание!