

Объединенный институт ядерных исследований
Осенняя Школа по информационным технологиям

**Математическое моделирование
гибридных джозефсоновских структур
состоящих из сверхпроводников и
магнетиков**

Рахмонов Илхом Рауфович

Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Дубна, Россия

14-19 ноября 2022
Дубна

Содержание

I. Введение

Эффект Джозефсона

Типы джозефсоновских переходов

Аномальный эффект Джозефсона

II. Основные физические свойства

RCSJ-модель и ВАХ

Влияние внешнего излучения

Влияние геометрических характеристик

III. Исследование фазовой динамики Φ_0 перехода

Вывод системы уравнений для описания Φ_0 перехода

Прецессия намагниченности и ферромагнитный резонанс

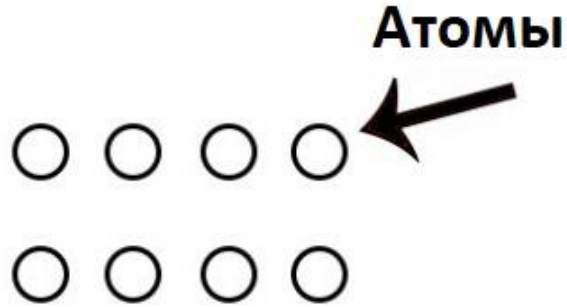
Приближение линейного осциллятора

Приближение нелинейного осциллятора. Осциллятор Даффинга

Переворот магнитного момента в Φ_0 переходе под воздействием импульса тока

Введение

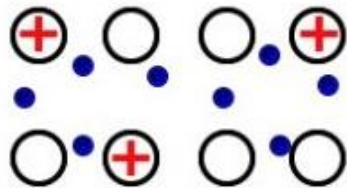
Классификация материалов по электрическим свойствам



Диэлектрик



Проводник

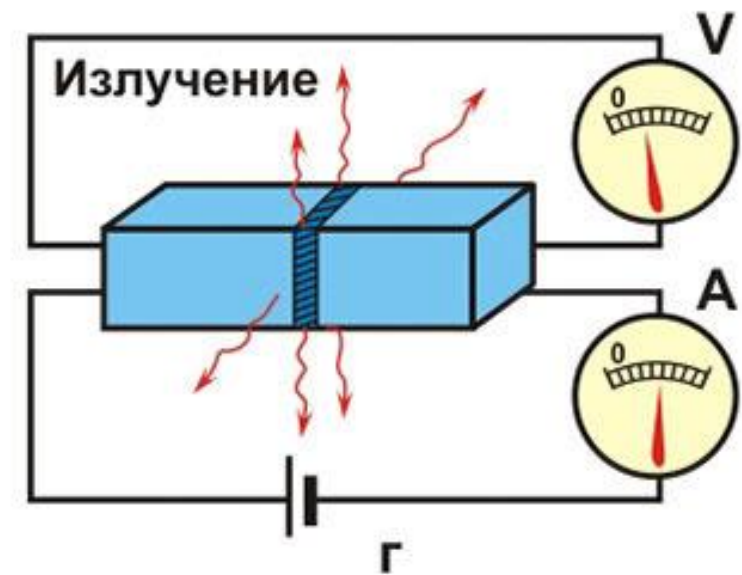
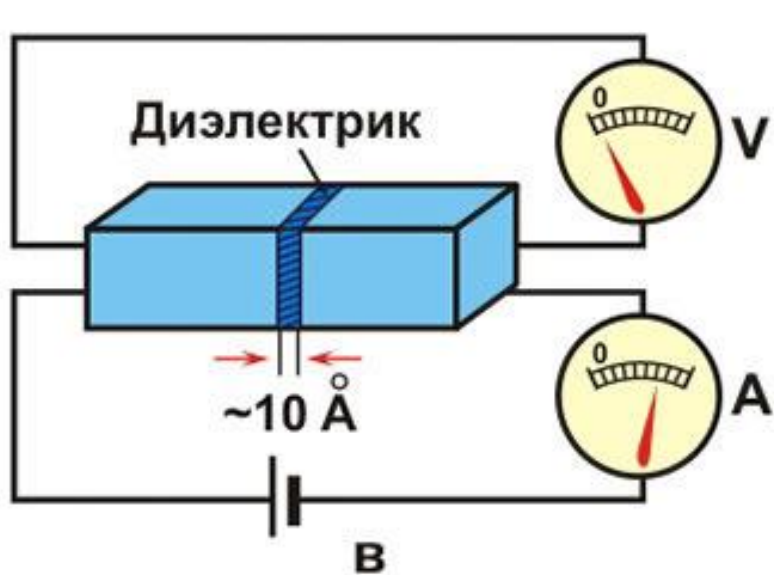
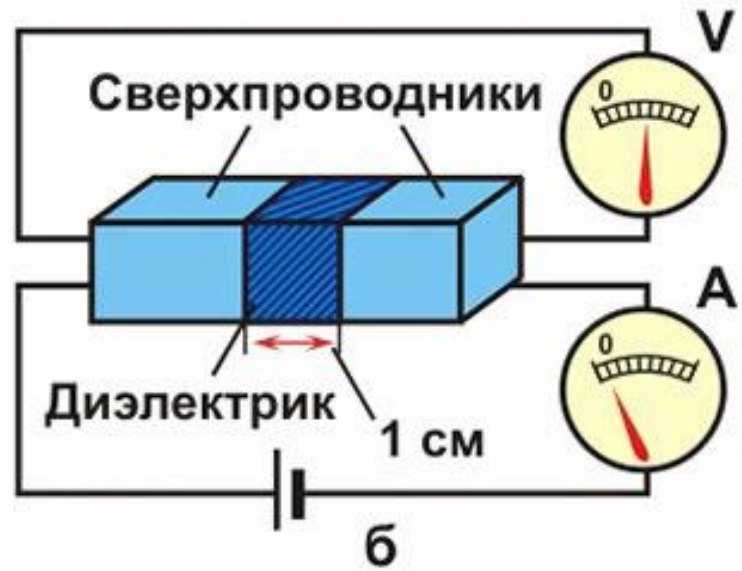
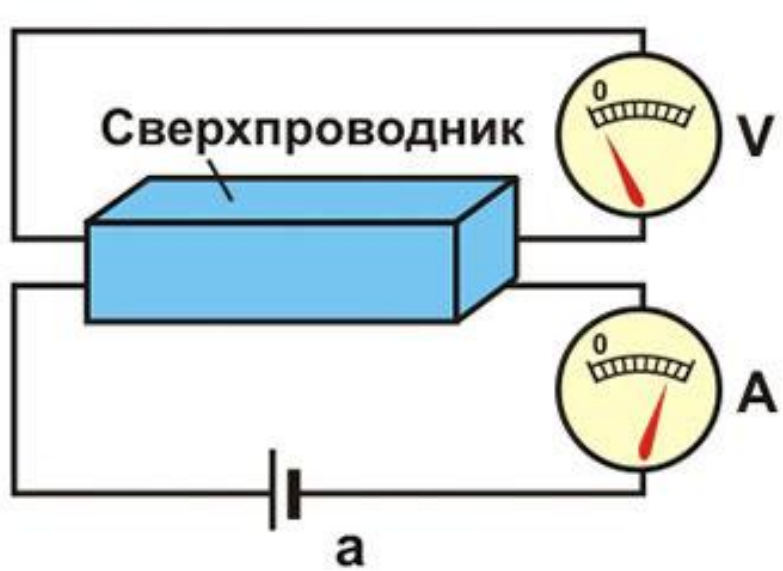


Полупроводник

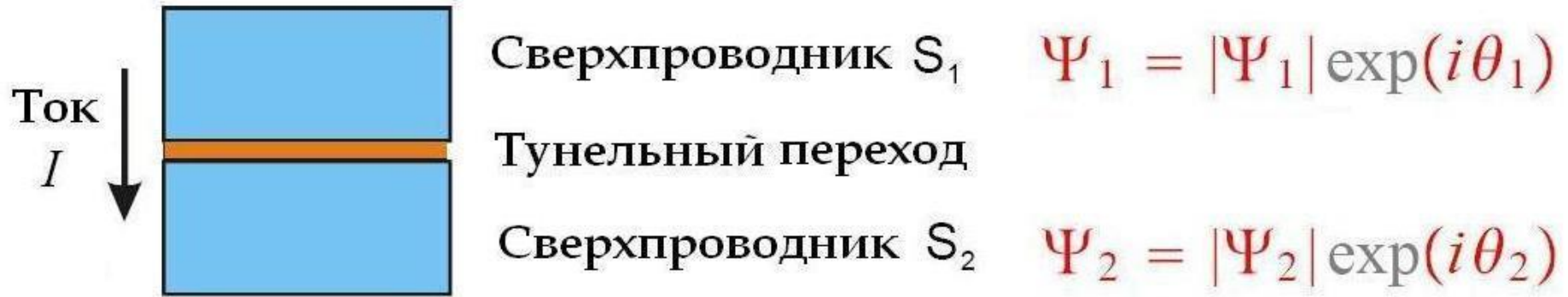


Сверхпроводник

Эффект Джозефсона



Джозефсонский переход и эффекты Джозефсона



Ψ_1 и Ψ_2 волновые функции сверхпроводящих электродов.

θ_1 и θ_2 фазы волновых функций.

$$I < I_c, V=0$$

Стационарный эффект Джозефсона: $I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi$

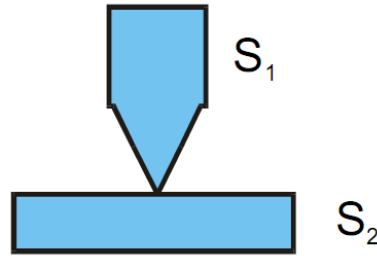
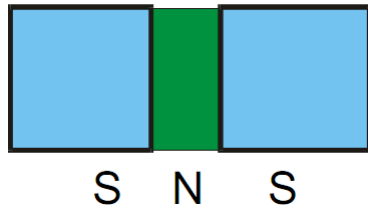
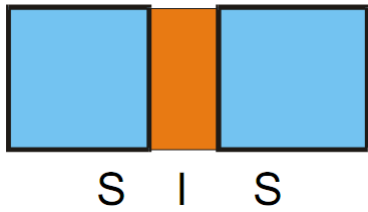
Нестационарный эффект Джозефсона: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V$

$\varphi = \theta_2 - \theta_1$ разность фаз $I > I_c, V > 0$

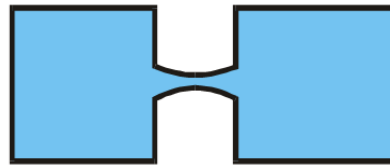
Получен Б. Джозефсоном 1962 г.

$$1 \mu V \leftrightarrow 483.59767 \text{ MHz}$$

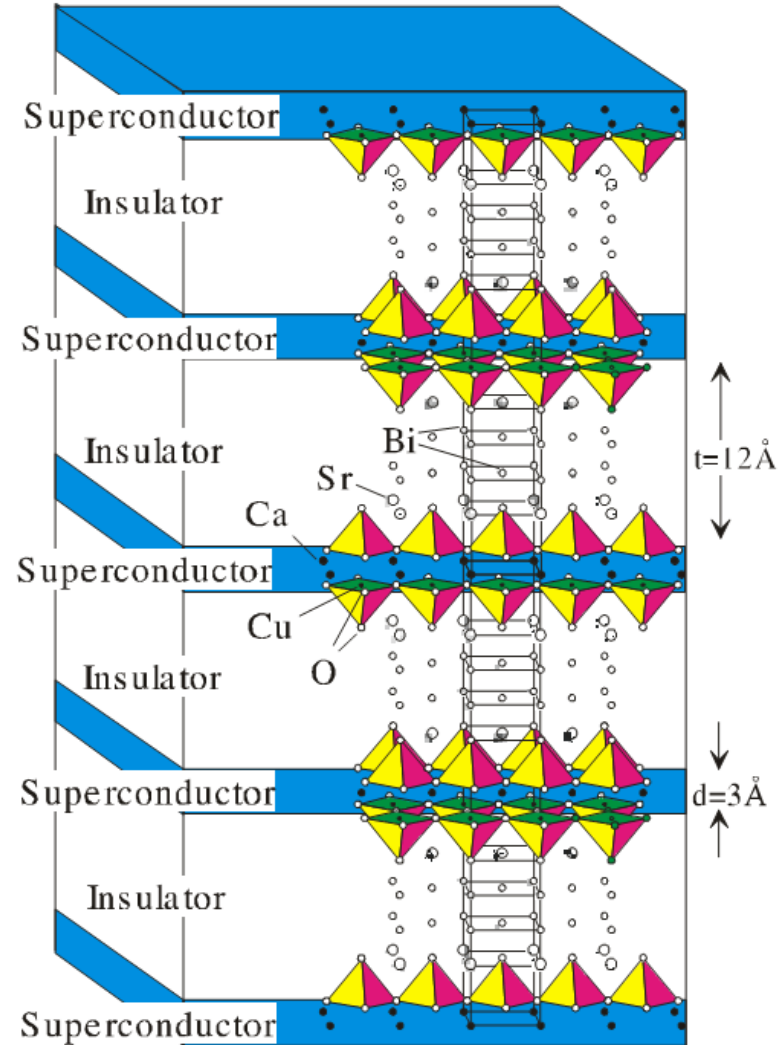
Типы джозефсоновских переходов



Точечные переходы



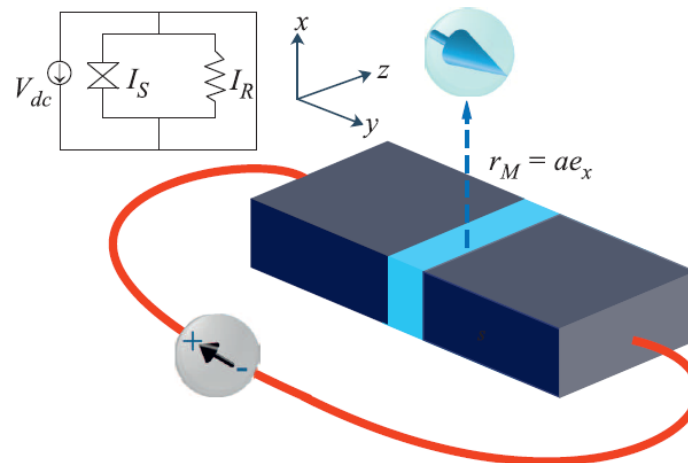
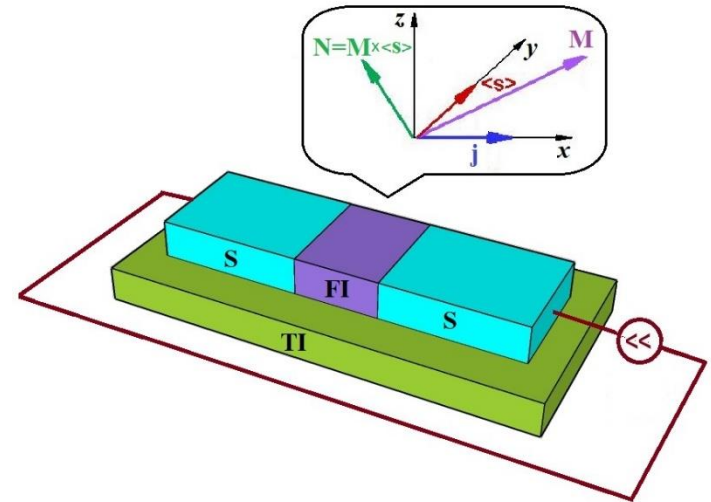
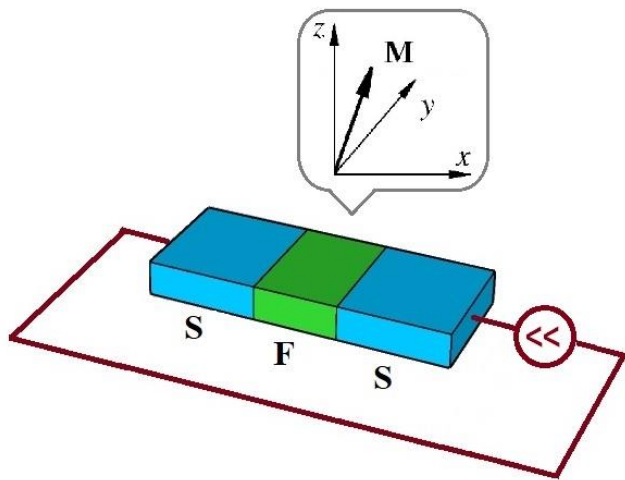
Сверхпроводниковые мостики



Аномальный эффект Джозефсона

- ▶ Аномальный эффект Джозефсона заключается в возникновении фазового сдвига $\varphi=0$ в ток фазовом соотношении гибридного джозефсоновского перехода состоящего из сверхпроводников и магнетиков.

$$I_s = I_c(\sin \varphi - \omega_n)$$



Основные физические свойства

**RCSJ – модель для описания
динамики джозефсоновского
перехода**

RCSJ - модель

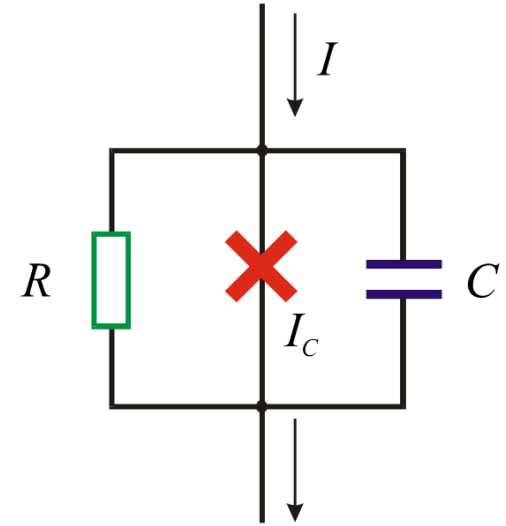
RCSJ \equiv "resistive-capacitive shunted junction"

$$I_{qp} = \frac{V}{R} \text{--quasiparticle,} \quad I_{disp} = C \frac{dV}{dt} \text{--displacement}$$

$$I_s = I_c \sin \varphi \text{--superconducting}$$

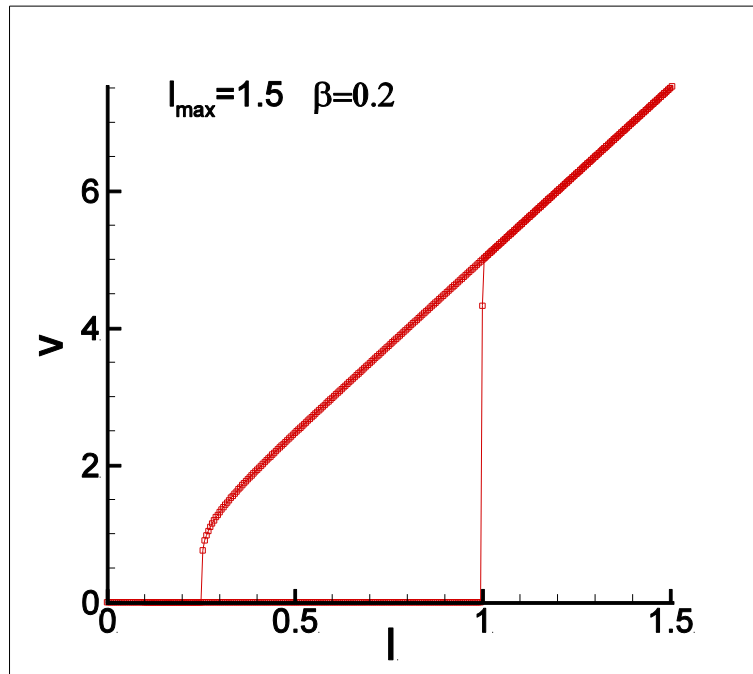
$$I = C \frac{dV}{dt} + I_c \sin \varphi + \frac{V}{R}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases}$$

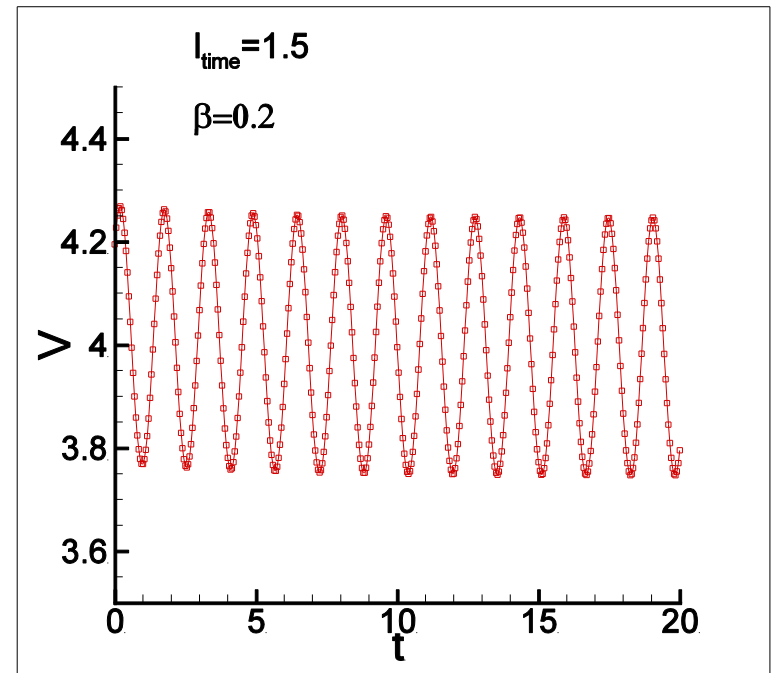
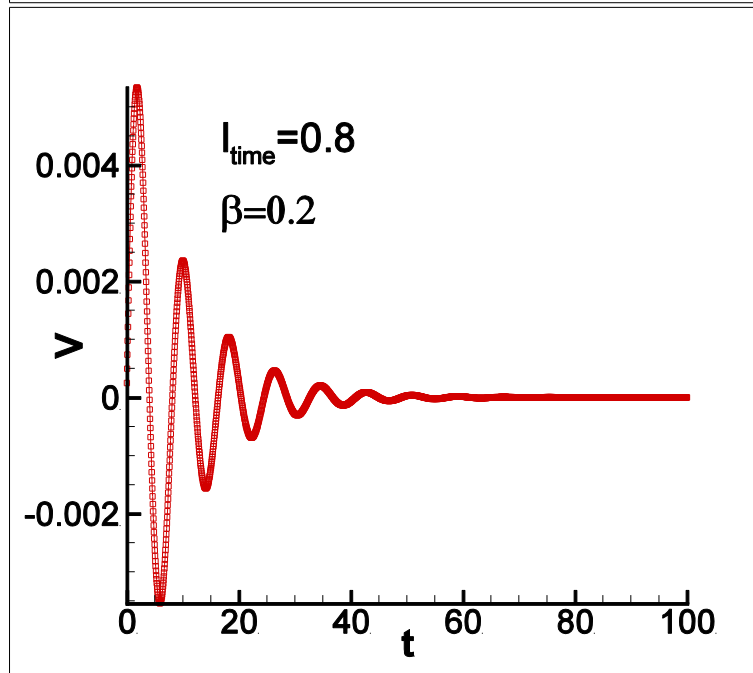


$$V_0 = \frac{\hbar \omega_p}{2e}; \quad \omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{C\hbar}} \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c C}} \quad \frac{I}{I_c} \rightarrow I; \quad \frac{V}{V_0} \rightarrow V$$

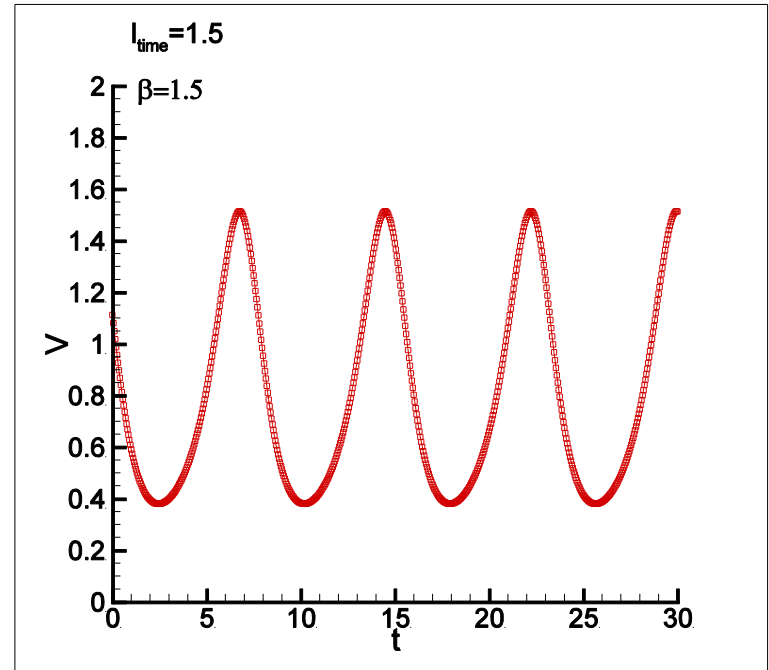
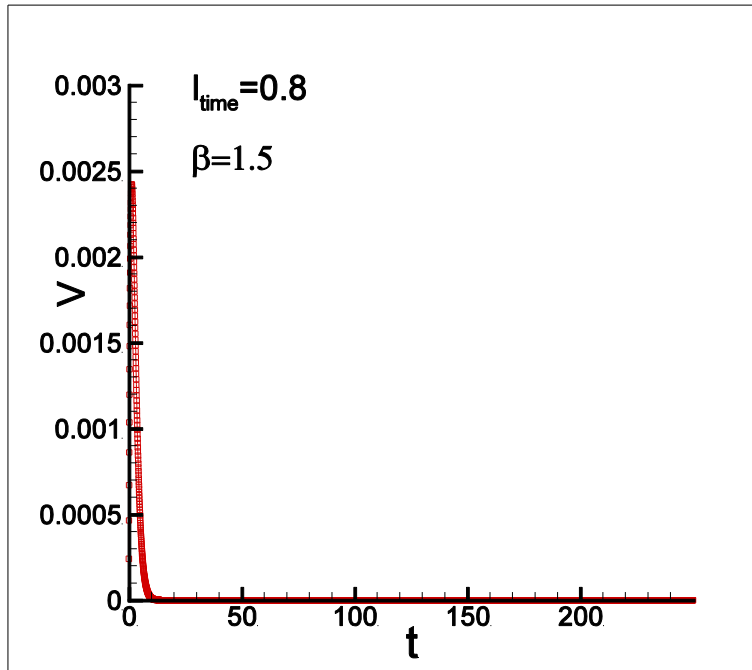
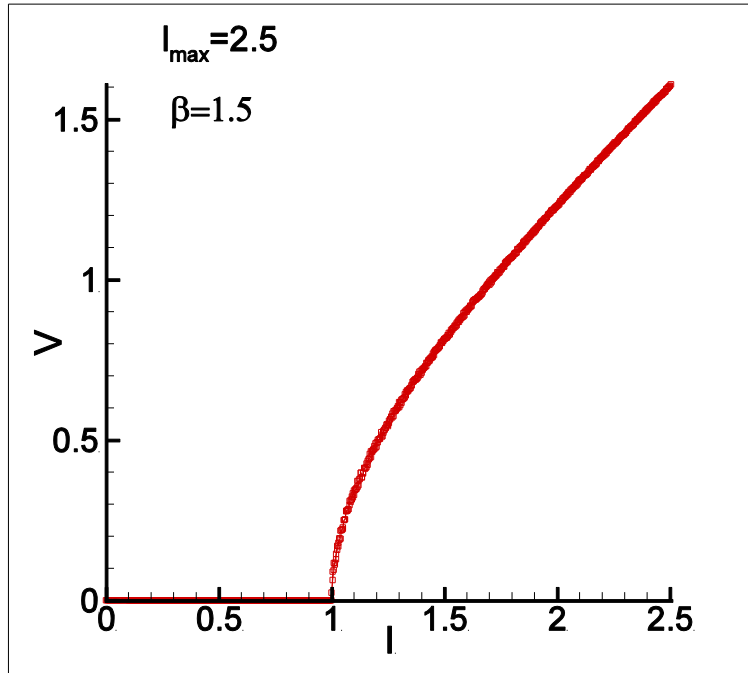
Особенности одиночного короткого ДП



$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases}$$

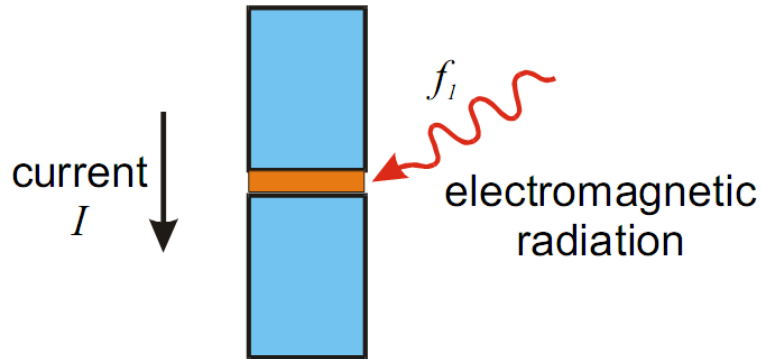


Особенности одиночного короткого ДП



Влияние внешнего излучения

Влияние внешнего излучения и ступеньки Шапиро

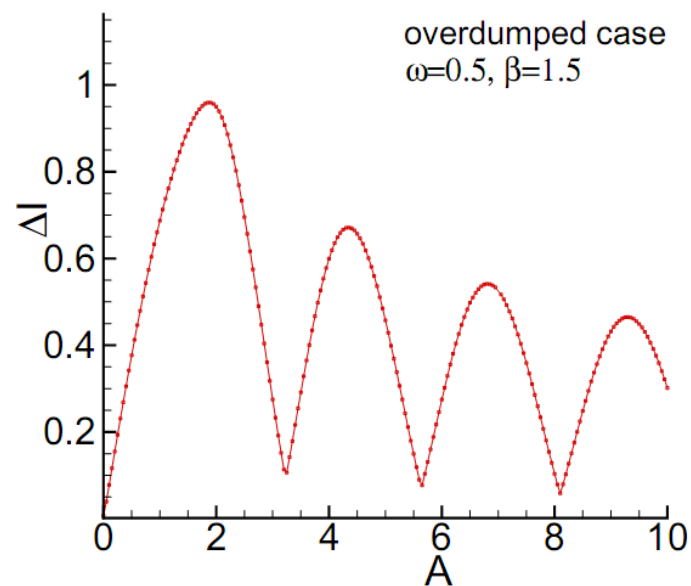
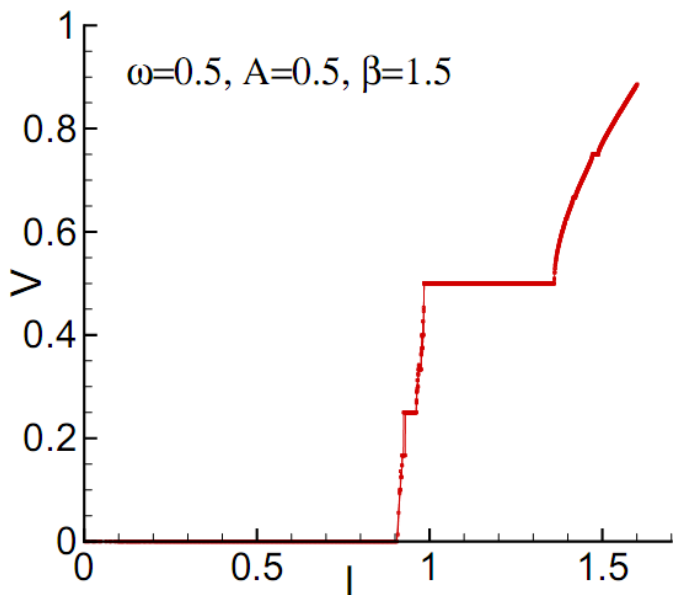
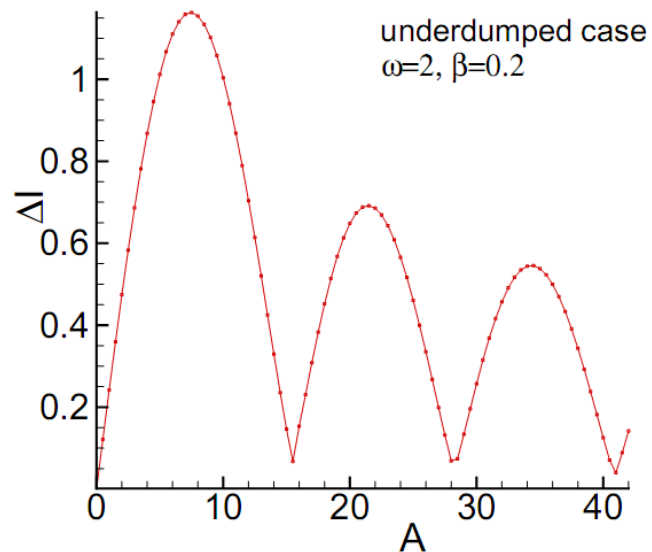
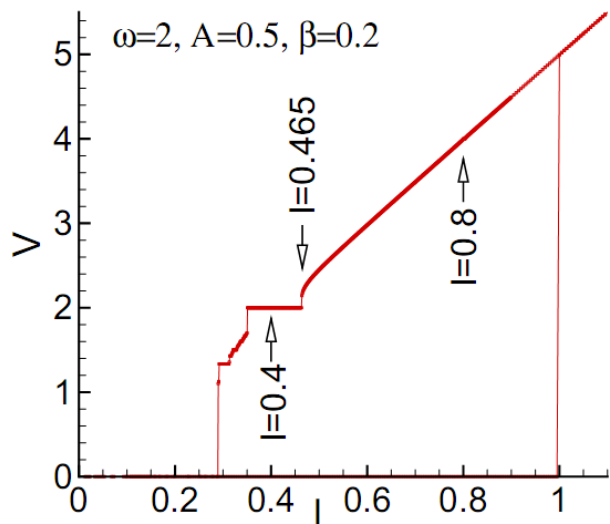


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \sin \omega t \end{array} \right.$$

$$I_s = I_c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n \left(\frac{V_1}{\Phi_0 f_1} \right) \sin \left[\varphi_0 + \frac{2\pi}{\Phi_0} V_0 t - 2\pi n f_1 t \right]$$

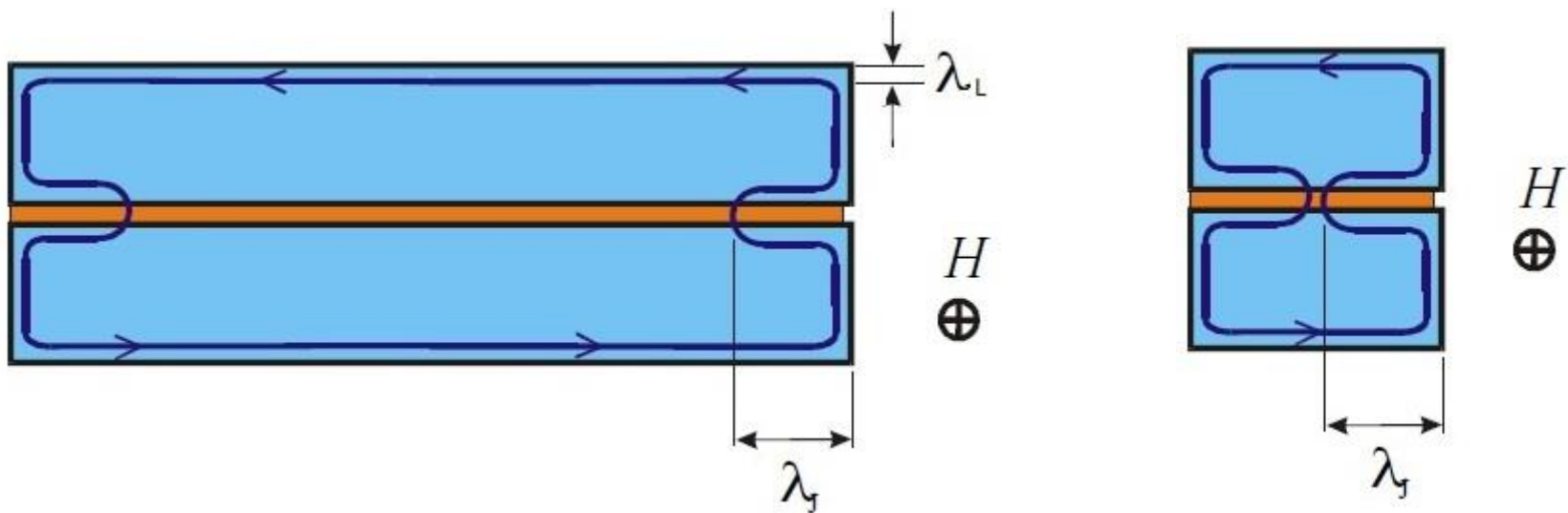
$$\Delta I = 2|J_n(f)|, \quad f = \frac{A}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$$

Влияние внешнего излучения и ступеньки Шапиро

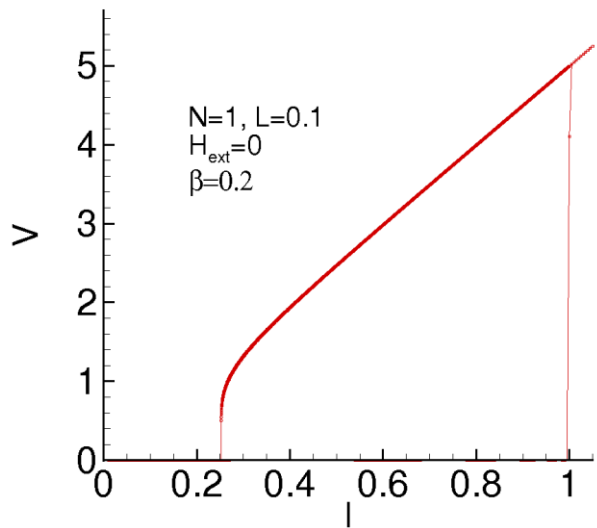


Влияние геометрических характеристик

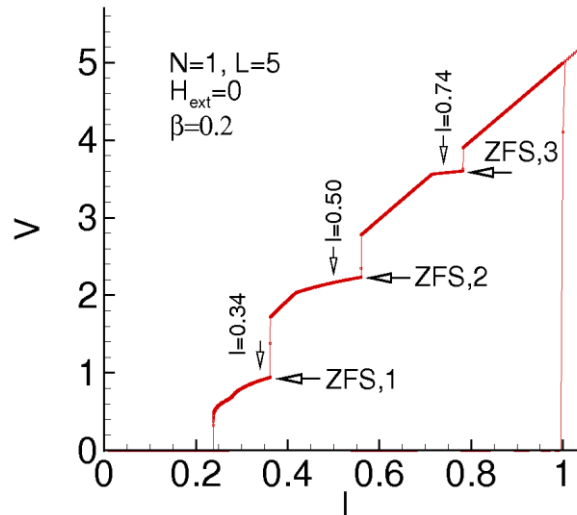
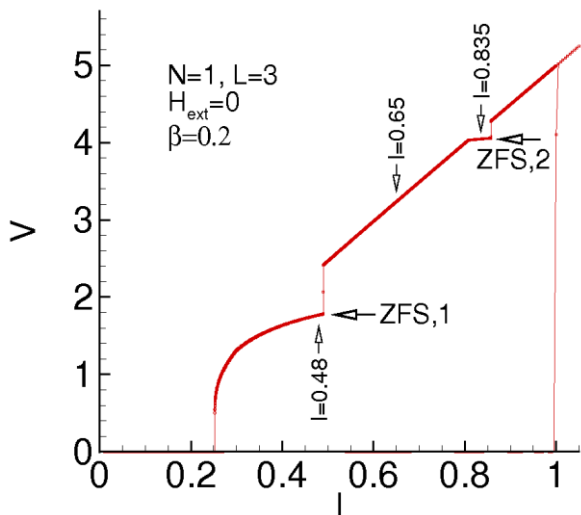
Длинный и короткий джозефсоновский переход



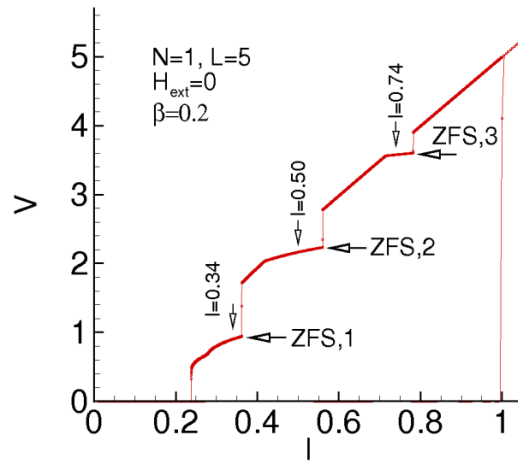
Особенности одиночного длинного ДП



$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi - \beta V + I \end{cases}$$



Особенности одиночного длинного ДП

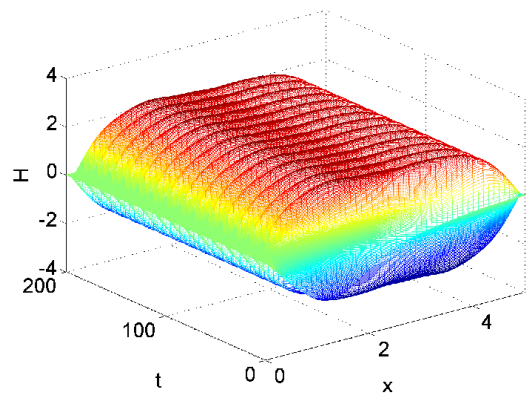


$$u = [1 + 4\beta/\pi I]^{-1/2}$$

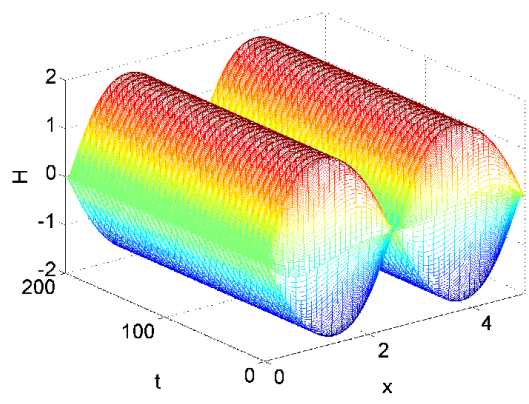
$$c_j = \omega_p \lambda_j$$

$$V = 2\pi n u / L$$

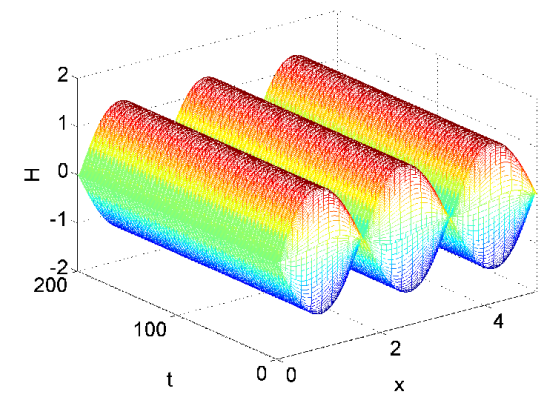
$N=1, L=5, H_{\text{ext}}=0, I=0.3400$



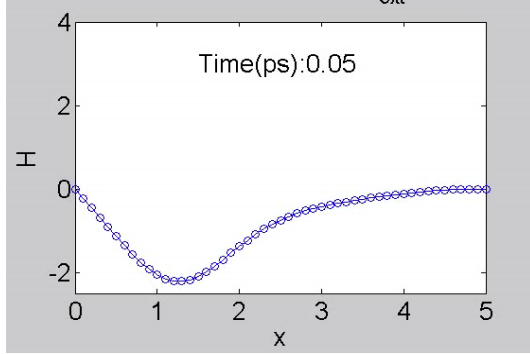
$N=1, L=5, H_{\text{ext}}=0, I=0.5000$



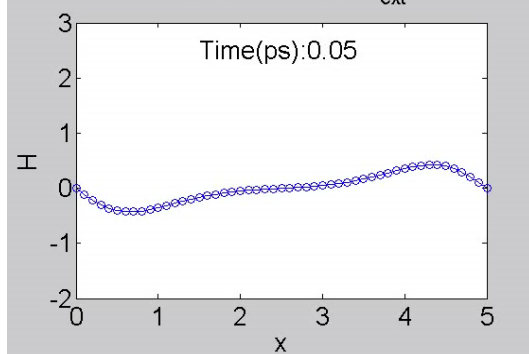
$N=1, L=5, H_{\text{ext}}=0, I=0.7400$



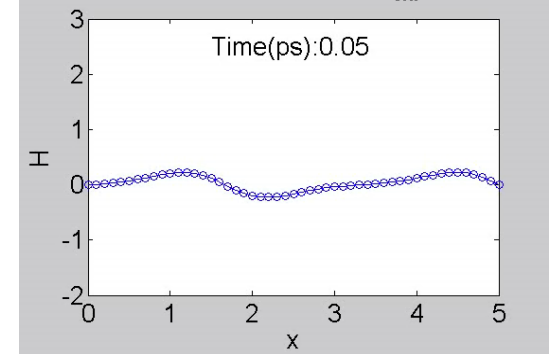
$N=1, L=5, I=0.3400, H_{\text{ext}}=0$



$N=1, L=5, I=0.5000, H_{\text{ext}}=0$



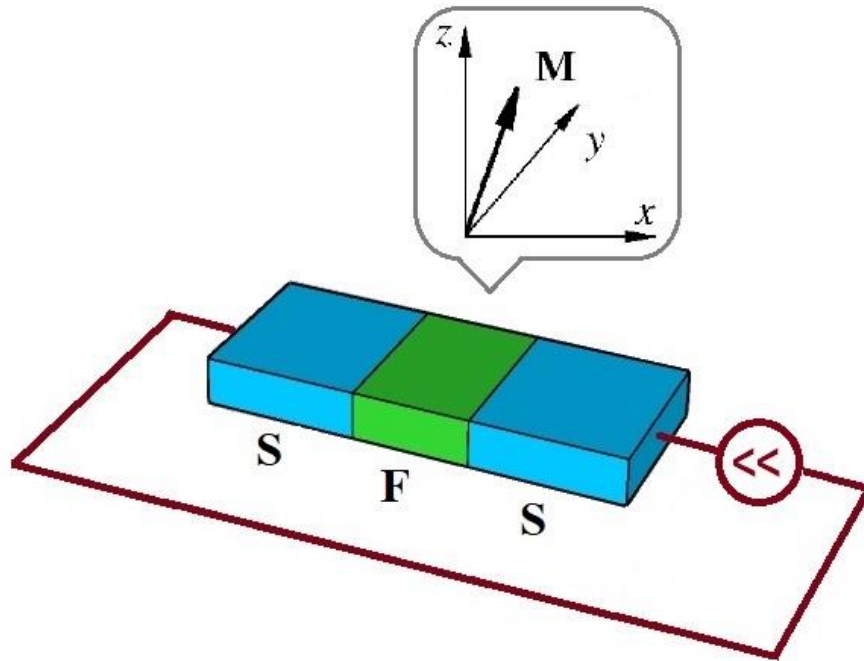
$N=1, L=5, I=0.7400, H_{\text{ext}}=0$



Исследование фазовой динамики Φ -0 перехода

Фи-0 джозефсоновский переход

- ▶ В SFS джозефсоновском переходе, спин-орбитальная связь в ферромагнитном слое, приводит к механизму прямой связи магнитного момента и сверхпроводящего тока



$$I_s = I_c(\sin \varphi - \varphi_0)$$

A. Buzdin, Phys. Rev. Lett. 101, 107005 (2008).

F. Konschelle and A. Buzdin, Phys. Rev. Lett. **102**, 017001 (2009)

Вывод системы уравнений для описания Фи-0 перехода

Вывод уравнений

- ▶ Уравнение Ландау-Лифшиц-Гильберта для намагниченности

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha}{M_0} \left[\mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right]$$

- ▶ Эффективное магнитное поле

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{V} \frac{\delta E_t}{\delta \mathbf{M}}$$

$$E_t = -\frac{\Phi_0}{2\pi} I \varphi + E_s(\varphi, \varphi_0) + E_M(\mathbf{M})$$

$$E_s(\varphi, \varphi_0) = E_J [1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad E_M(\mathbf{M}) = -\frac{KV}{2} \left(\frac{M_z}{M_0} \right)^2$$

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{K}{M_0} \left[Gr \sin \left(\varphi - r \frac{M_y}{M_0} \right) \mathbf{e}_y + \frac{M_z}{M_0} \mathbf{e}_z \right]$$

$$G = \frac{E_J}{KV} \quad \varphi_0 = r \frac{M_y}{M_0}$$

Вывод уравнений

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha}{M_0} \left[\mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] - \frac{\alpha\gamma}{M_0} [\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha^2}{M_0} [\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}]$$

$$[\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] = \mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{H}_{\text{eff}}) - \mathbf{H}_{\text{eff}}\mathbf{M}^2$$

$$[\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}] = \mathbf{M} \left(\mathbf{M} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{M}}{dt} \mathbf{M}^2 = -\frac{d\mathbf{M}}{dt} \mathbf{M}^2$$

$$\left(\mathbf{M} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{\Omega_F}{[1 + (\alpha\mathbf{M}/M_0)^2]} \left\{ \frac{M_0}{K} [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha}{K} [\mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{H}_{\text{eff}}) - \mathbf{H}_{\text{eff}}\mathbf{M}^2] \right\}$$

Вывод уравнений

► Уравнение RCSJ-модели для разности фаз

$$I = C \frac{dV}{dt} + \frac{I_c}{\omega_c} \left[\frac{d\varphi}{dt} - r \frac{d}{dt} \left(\frac{M_y}{M_0} \right) \right] + I_c \sin \left(\varphi - r \frac{M_y}{M_0} \right)$$

$$\omega_c = \frac{2eRI_c}{\hbar}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{\Omega_F}{[1 + (\alpha\mathbf{M}/M_0)^2]} \left\{ \frac{M_0}{K} [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha}{K} [\mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{H}_{\text{eff}}) - \mathbf{H}_{\text{eff}}\mathbf{M}^2] \right\}$$

$$C \frac{dV}{dt} = I - \frac{I_c}{\omega_c} \left[\frac{d\varphi}{dt} - r \frac{d}{dt} \left(\frac{M_y}{M_0} \right) \right] - I_c \sin \left(\varphi - r \frac{M_y}{M_0} \right)$$

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} = V$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{M_0}; \quad \mathbf{h}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{eff}}}{H_0}; \quad \tau = t\omega_c; \quad V = \frac{V}{I_c R}; \quad \omega_F = \frac{\Omega_F}{\omega_c}; \quad I = \frac{I}{I_c} \quad H_0 = \frac{K}{M_0}$$

Система уравнений для описания динамики Фи-0 перехода

$$\frac{dm_x}{d\tau} = -\frac{\omega_F}{1 + (\alpha m)^2} \left\{ (m_y h_z - m_z h_y) + \alpha [m_x (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_x m^2] \right\}$$

$$\frac{dm_y}{d\tau} = -\frac{\omega_F}{1 + (\alpha m)^2} \left\{ (m_z h_x - m_x h_z) + \alpha [m_y (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_y m^2] \right\}$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = -\frac{\omega_F}{1 + (\alpha m)^2} \left\{ (m_x h_y - m_y h_x) + \alpha [m_z (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_z m^2] \right\}$$

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{\beta_c} \left[I - \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{dm_y}{d\tau} - \sin(\varphi - r m_y) \right]$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = V$$

$$h_x = 0$$

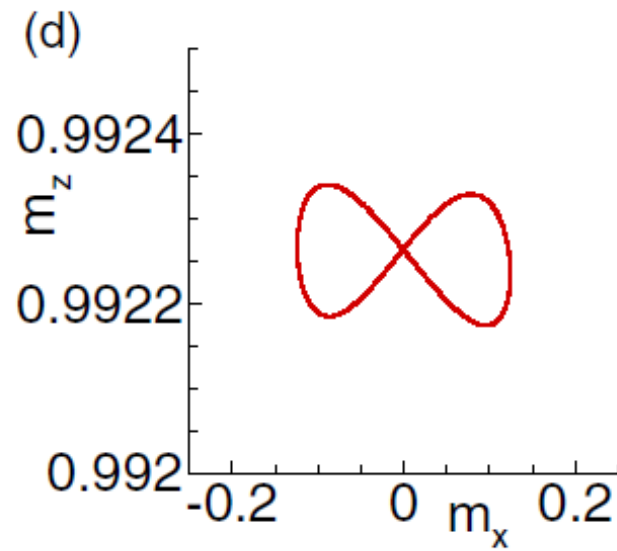
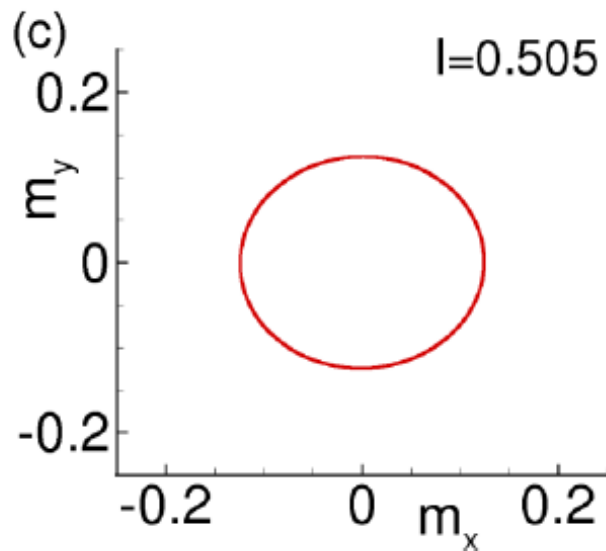
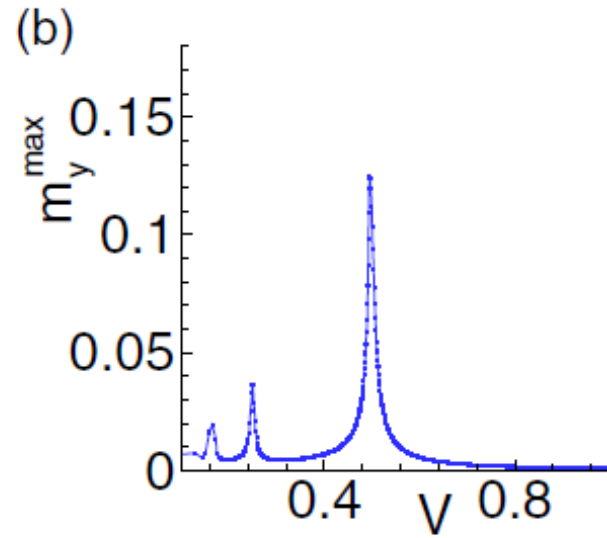
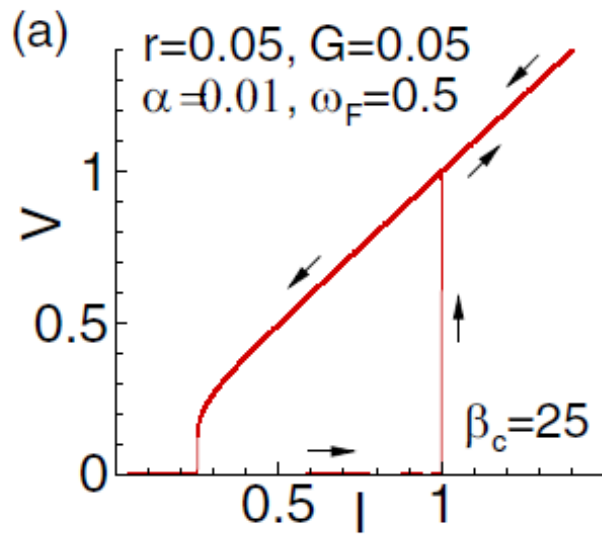
$$h_y = rG \sin(\varphi - r m_y)$$

$$h_z = m_z$$

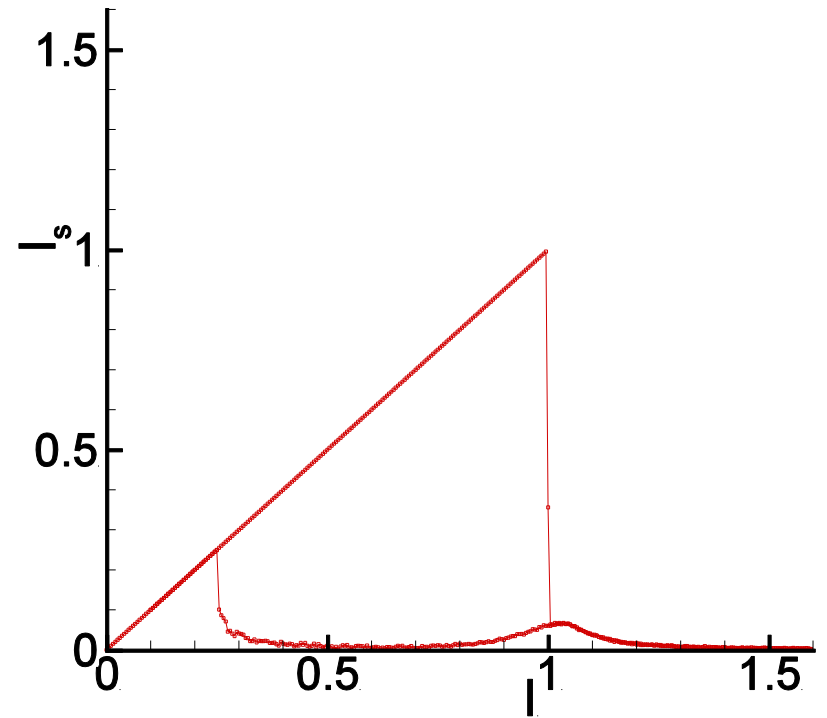
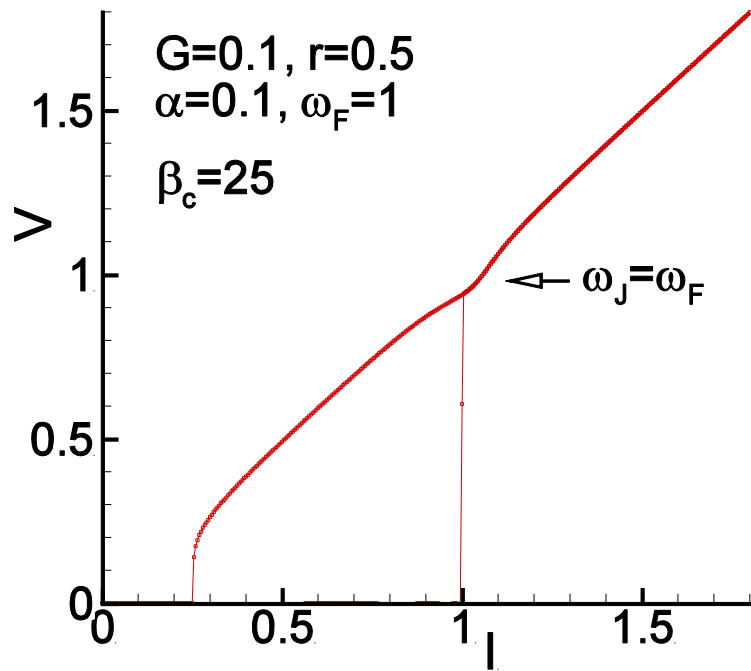
$$\beta_c = C\omega_c R$$

Прецессия намагниченности и ферромагнитный резонанс

Динамика Фи-0 перехода



ВАХ Фи-0 перехода



Приближение линейного осциллятора

Приближение линейного осциллятора

$Gr\alpha \ll 1$, $m_x, m_y \ll 1$ и $m_z = 1 = const$

$$\frac{dm_x}{dt} = -\omega_F[m_y - Gr \sin \omega_J t - \alpha m_x]$$

$$\frac{dm_y}{dt} = -\omega[-m_x + \alpha m_y]$$

$$\ddot{m}_y + 2\alpha\omega_F\dot{m}_y + \omega_F^2 m_y = \omega_F^2 Gr \sin \omega_J t.$$

$$m_y(t) = \frac{\omega_+ - \omega_-}{r} \sin(\omega_J t) - \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{r} \cos(\omega_J t)$$

$$\omega_{\pm} = \frac{Gr^2\omega_F}{2} \frac{\omega_J \pm \omega_F}{\Omega_{\pm}} \quad \gamma_{\pm} = \frac{Gr^2\omega_F}{2} \frac{\alpha\omega_J}{\Omega_{\pm}}$$

$$\Omega_{\pm} = (\omega_J \pm \omega_F)^2 + (\alpha\omega_J)^2$$

Приближение линейного осциллятора

$$\begin{aligned} I_s(t) &= \sin(\omega_J t - r m_y(t)) \\ &= \sin(\omega_J t) - r m_y \cos(\omega_J t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_s(t) &= \sin \omega_J t - \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \sin 2\omega_J t \\ &+ \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{2} \cos 2\omega_J t + I_0(\alpha) \end{aligned}$$

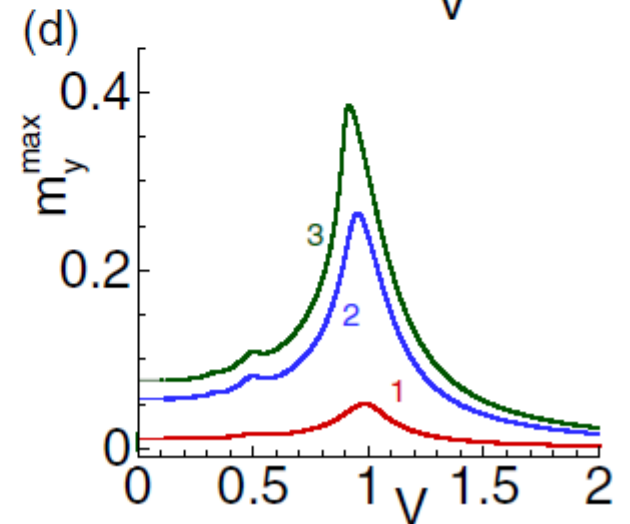
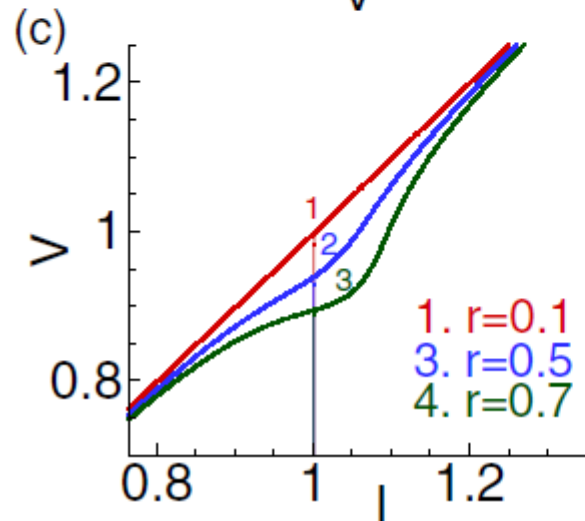
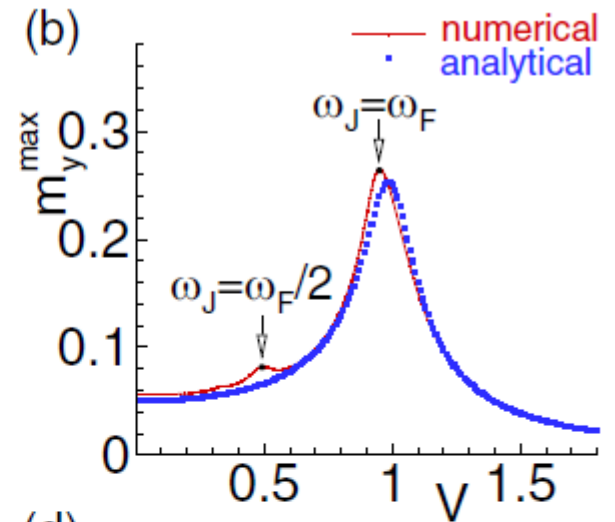
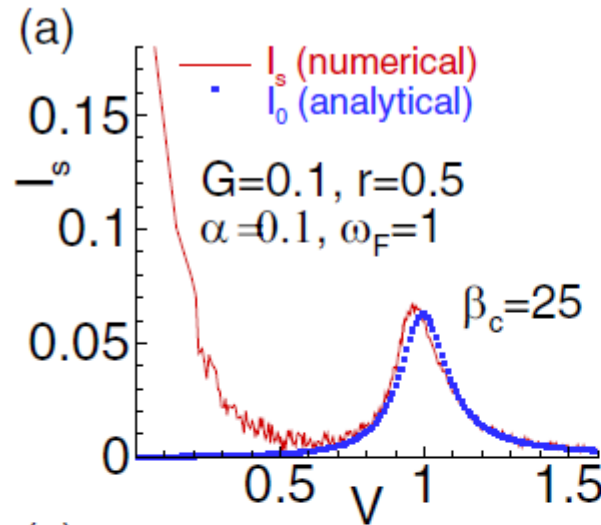
$$I_0 = \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{2}$$

Линейное приближение уравнение ЛЛГ

$$m_x, m_y, G, r, \alpha \ll 1 \quad Gr \ll 1, m_z \approx 1$$

$$\ddot{m}_y + 2\alpha\omega_F\dot{m}_y + \omega_F^2 m_y = \omega_F^2 Gr \sin \omega_J t.$$

В рамках данной приближении уравнение ЛЛГ сводится к уравнение для линейного осциллятора с затуханием



Приближение нелинейного осциллятора. Осциллятор Даффинга

Система уравнений для описания динамики SFS перехода

$$m_x, m_y, G, r, \alpha \ll 1 \quad \alpha \ll G, r$$

$$\frac{\dot{m}_x}{\omega_F} = -m_y m_z + Gr m_z \sin(\varphi - r m_y) - \alpha m_x m_z^2$$

$$\frac{\dot{m}_y}{\omega_F} = m_x m_z - \alpha m_y m_z^2$$

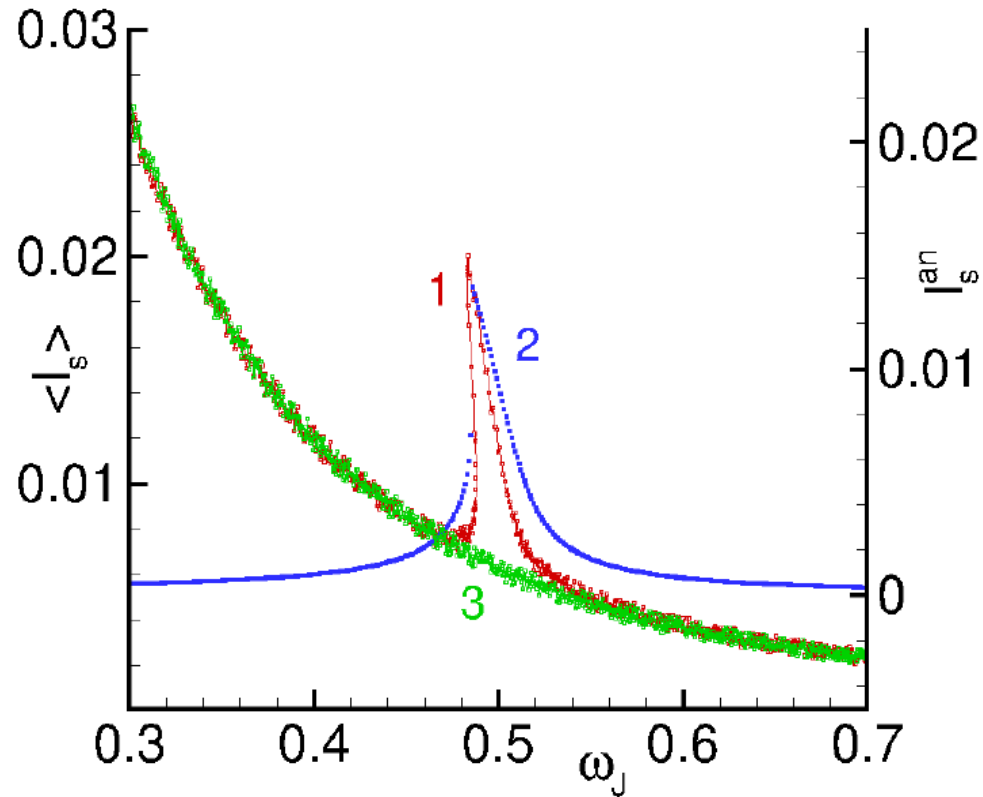
$$\frac{\dot{m}_z}{\omega_F} = -Gr m_x \sin(\varphi - r m_y) + \alpha m_z (m_x^2 + m_y^2)$$

$$\ddot{m}_y + 2\omega_F \alpha \dot{m}_y + \omega_F^2 m_y - \omega_F^2 m_y^3 = \omega_F^2 Gr \sin \varphi.$$

$$(m_y^{max})^2 = \frac{(Gr)^2}{\left[\omega^2 - 1 + \frac{3}{4}(m_y^{max})^2\right]^2 + (2\alpha\omega)^2}$$

$$\omega = \omega_J / \omega_F$$

Система уравнений для описания динамики SFS перехода



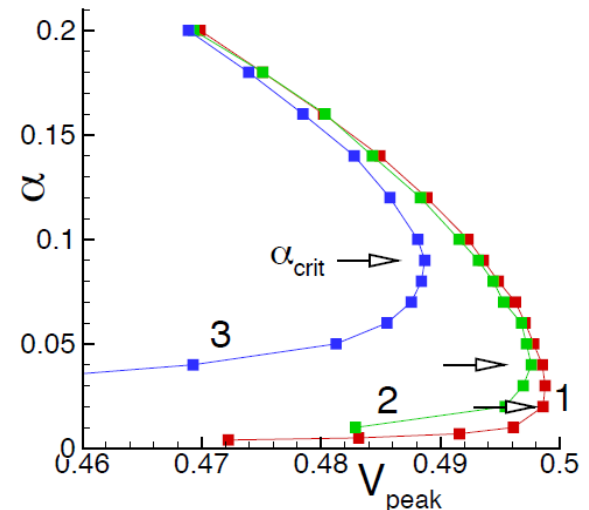
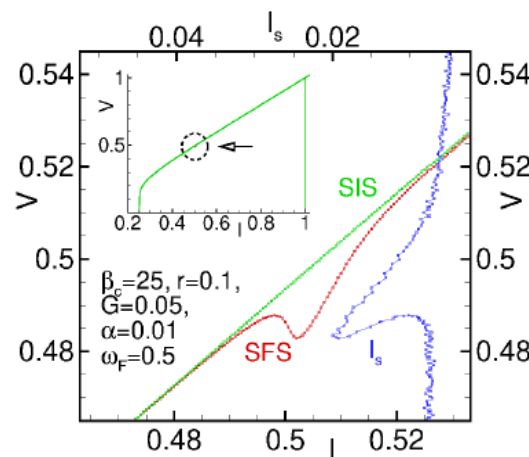
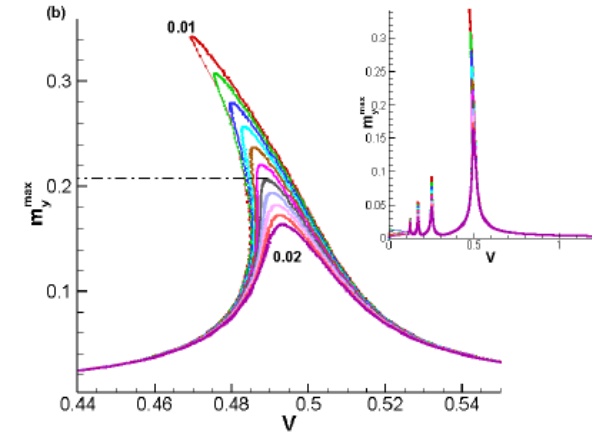
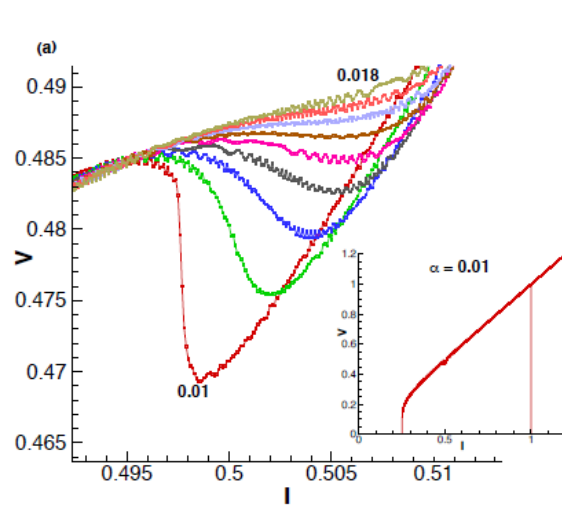
$$(m_y^{max})^2 = \frac{(Gr)^2}{\left[\omega^2 - 1 + \frac{3}{4}(m_y^{max})^2\right]^2 + (2\alpha\omega)^2}$$

Нелинейное приближение уравнение ЛЛГ

$$\alpha \ll G, r \ll 1$$

$$\ddot{m}_y + 2\omega_F \alpha \dot{m}_y + \omega_F^2 m_y - \omega_F^2 m_y^3 = \omega_F^2 Gr \sin \varphi.$$

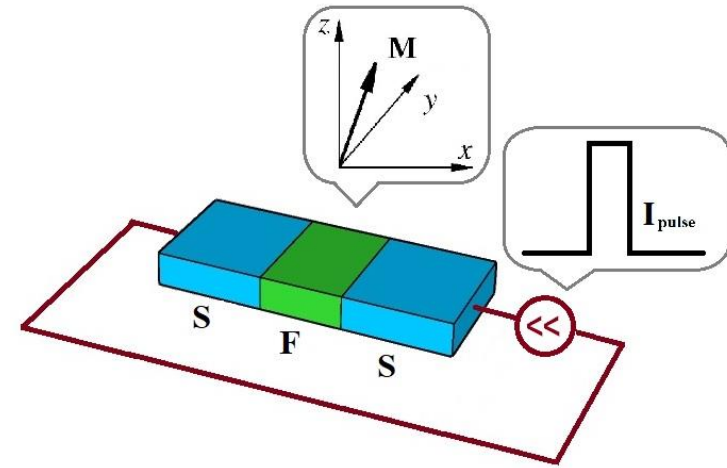
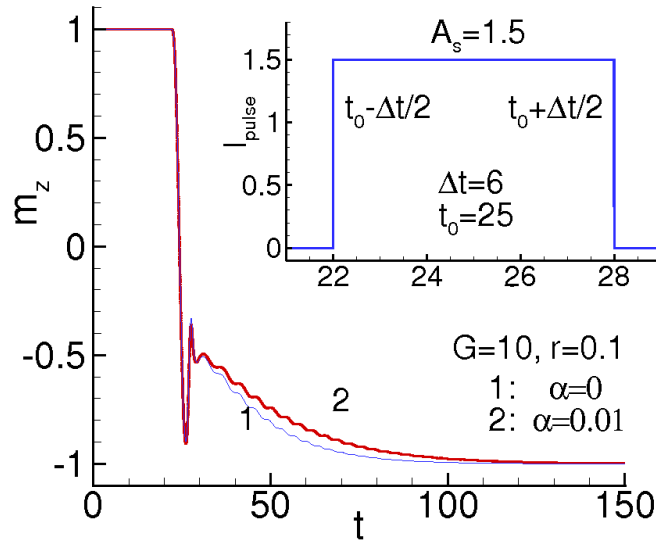
В этом приближении уравнение ЛЛГ сводится к нелинейному уравнение для осциллятора Даффинга



**Переворот магнитного момента в
Фи-0 переходе под воздействием
импульса тока**

Переворот магнитного момента импульсом тока

(a)

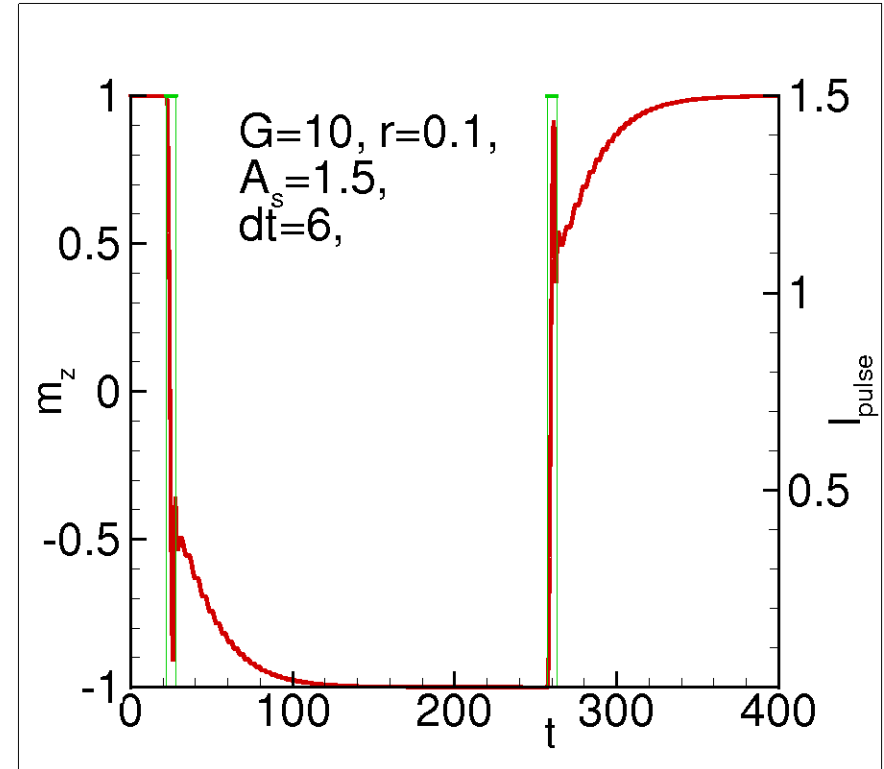
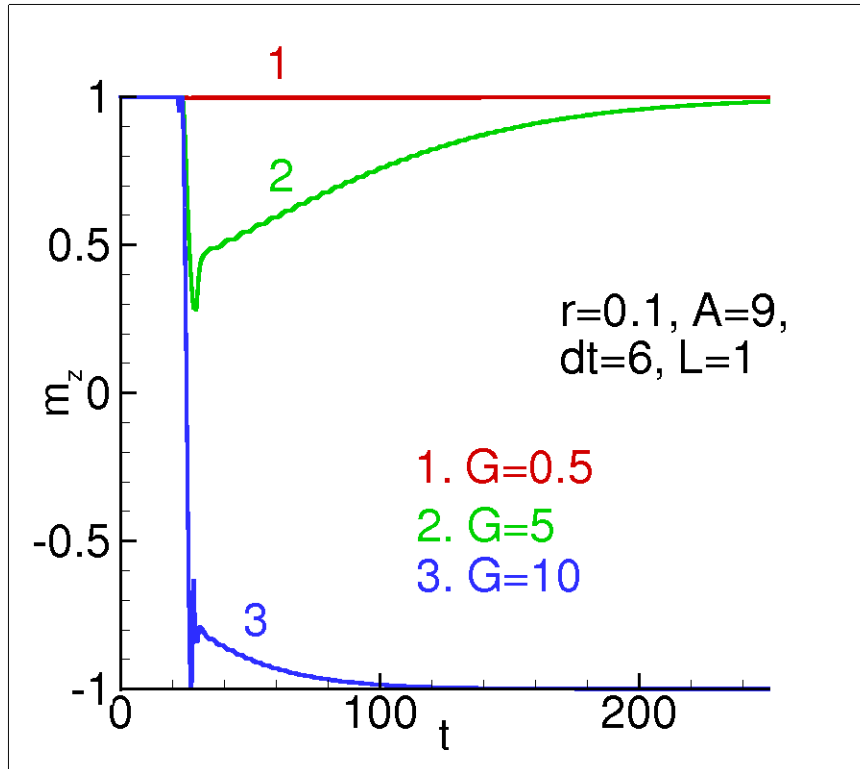


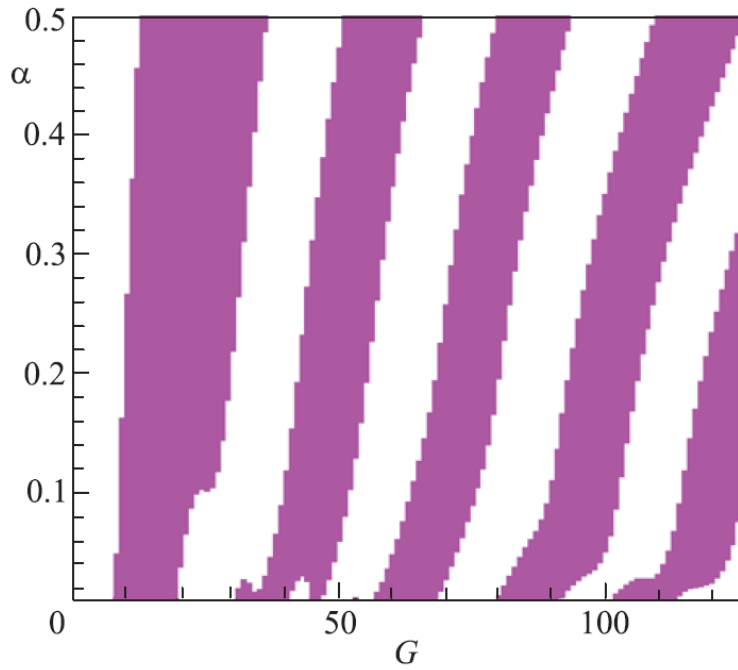
$$I_{pulse} = w \frac{d\varphi}{dt} + \sin(\varphi - r m_y)$$

$$w = \frac{V_F}{I_c R} = \frac{\omega_F}{\omega_R}$$

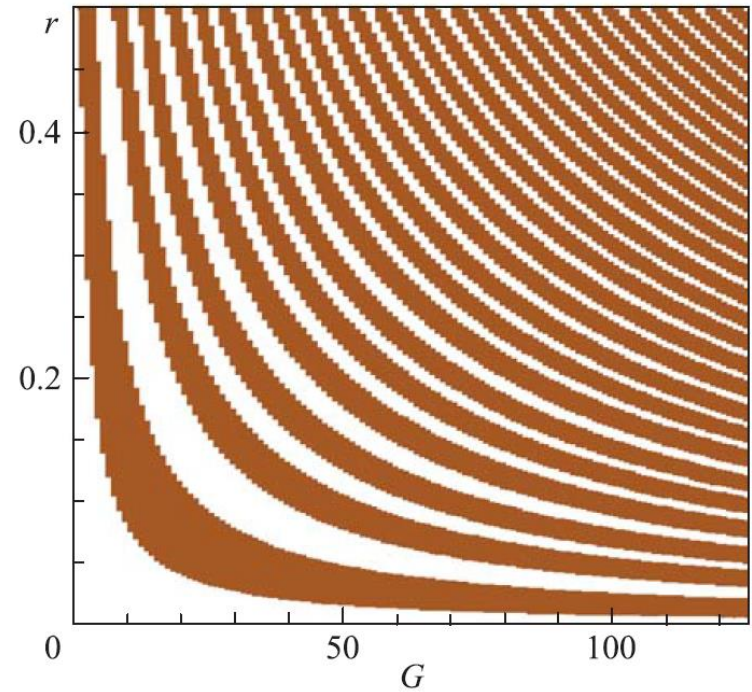
Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. Sengupta and A. Buzdin
 Appl. Phys. Lett. 110, 182407 (2017).

Влияние параметров на переворот магнитного момента





Demonstration of periodicity of magnetization reversal intervals in (G, α) -plane.

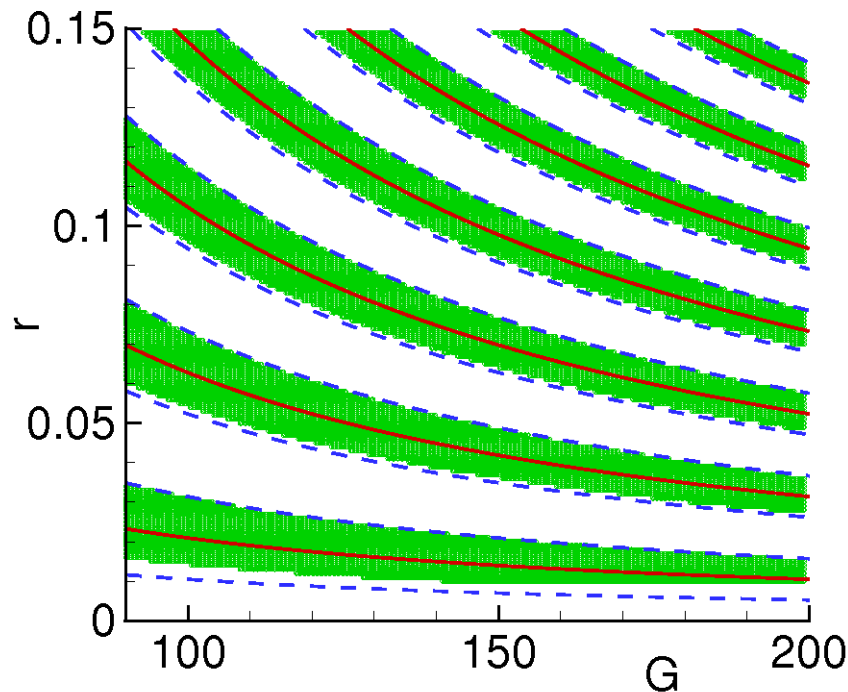


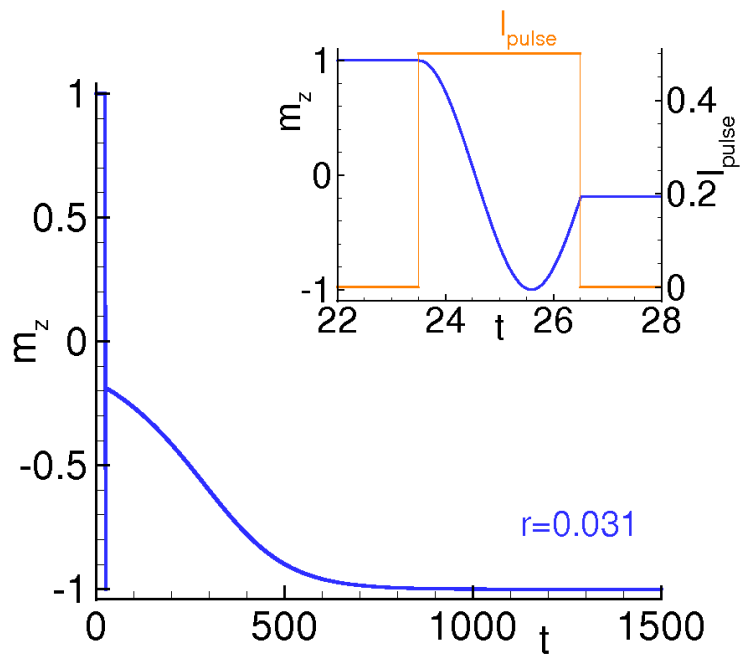
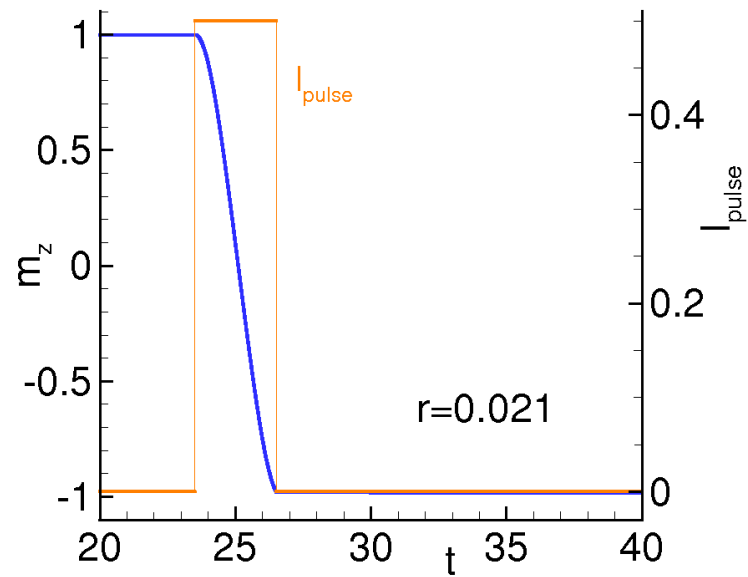
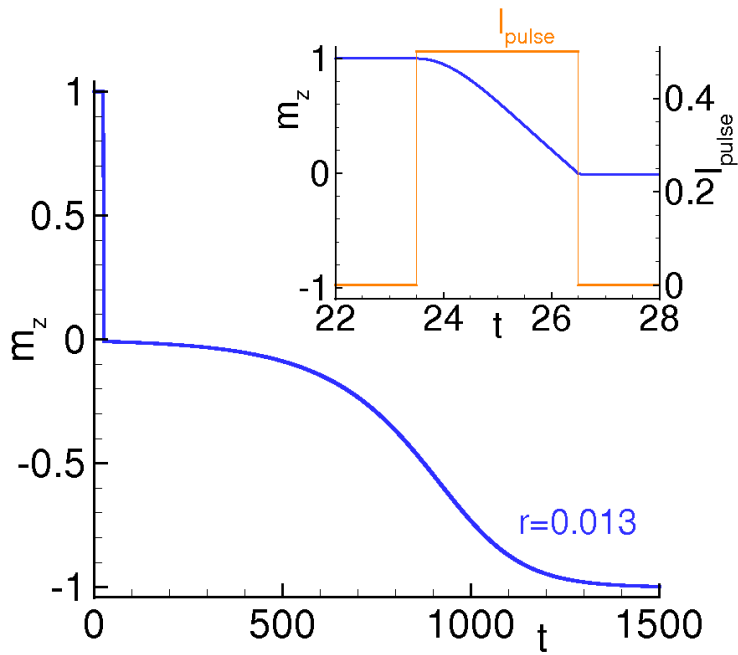
Demonstration of periodicity of magnetization reversal intervals in (G, r) -plane.

$$\begin{cases} \dot{m}_x = Grm_z \sin(\Phi) & w = \omega_F/\omega_R \ll 1 \\ \dot{m}_y = m_x m_z. & I_p(t) < 1 \\ \dot{m}_z = -Grm_x \sin(\Phi) & \end{cases}$$

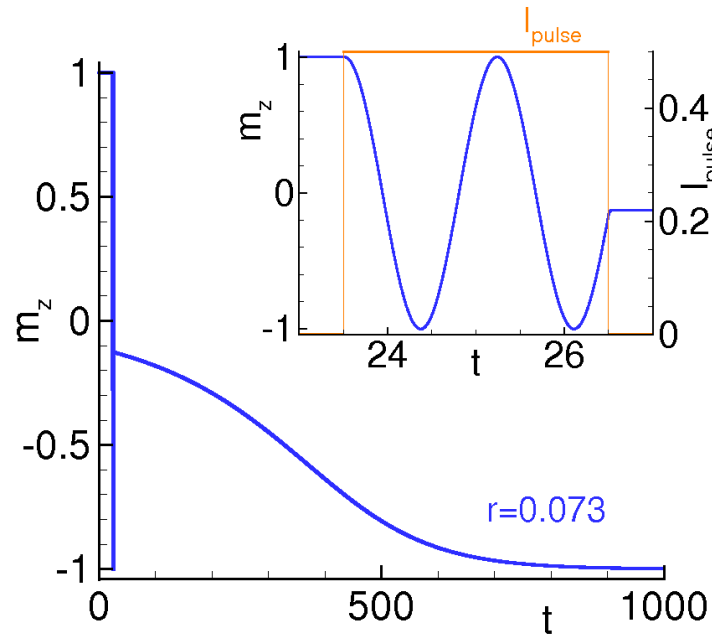
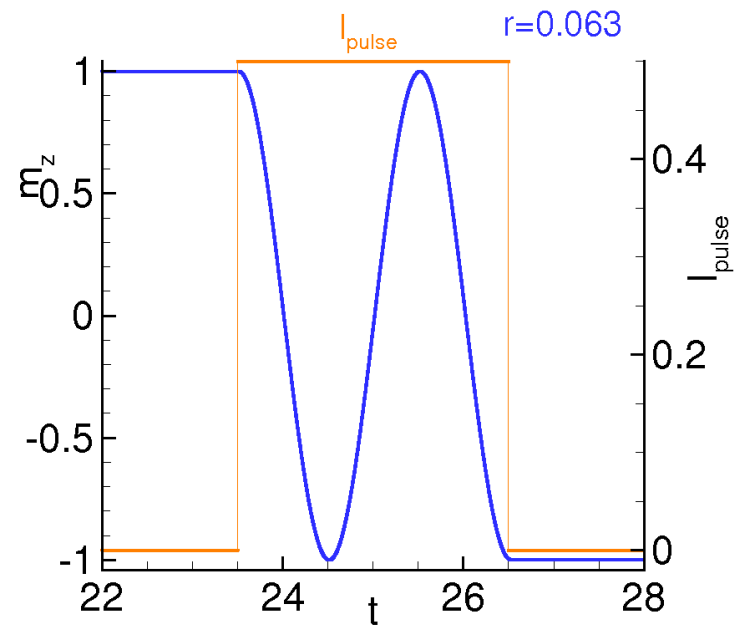
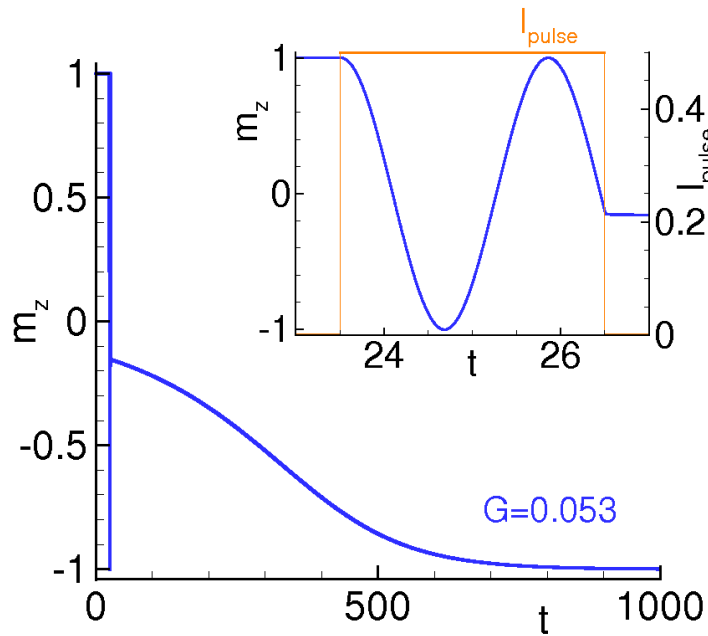
$$m_z = \cos(GrI_p) \quad \cos(GrI\delta t) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq GrI_p\delta t \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$





$$\delta t_{eff} = \frac{\pi}{GrI_p}$$



$$\delta t_{eff} = \frac{\pi}{GrI_p}$$

C. Guarcello and F.S. Bergeret,
A cryogenic memory element based on an anomalous Josephson junction,
arXiv:1907.08454v1 [cond-mat.supr-con] 19 Jul 2019

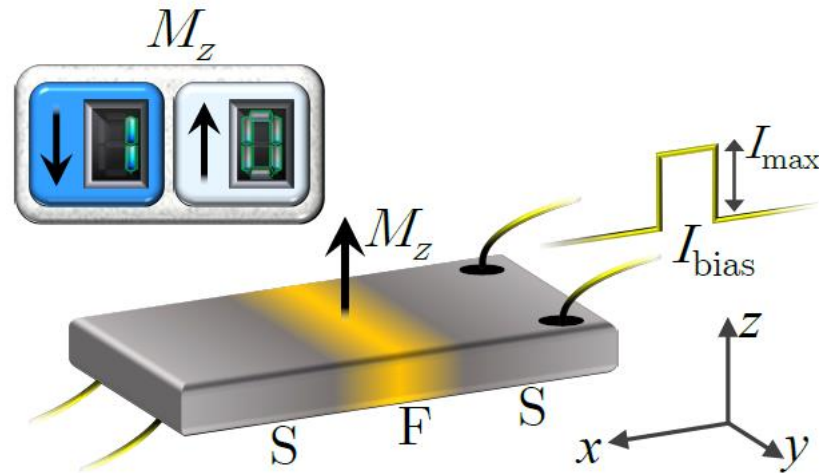


FIG. 1. S/F/S Josephson junction driven by a rectangular bias current pulses, I_{bias} , with amplitude I_{max} . The z-component of the magnetization, M_z , is the observable used to define the logic memory states 0 and 1.

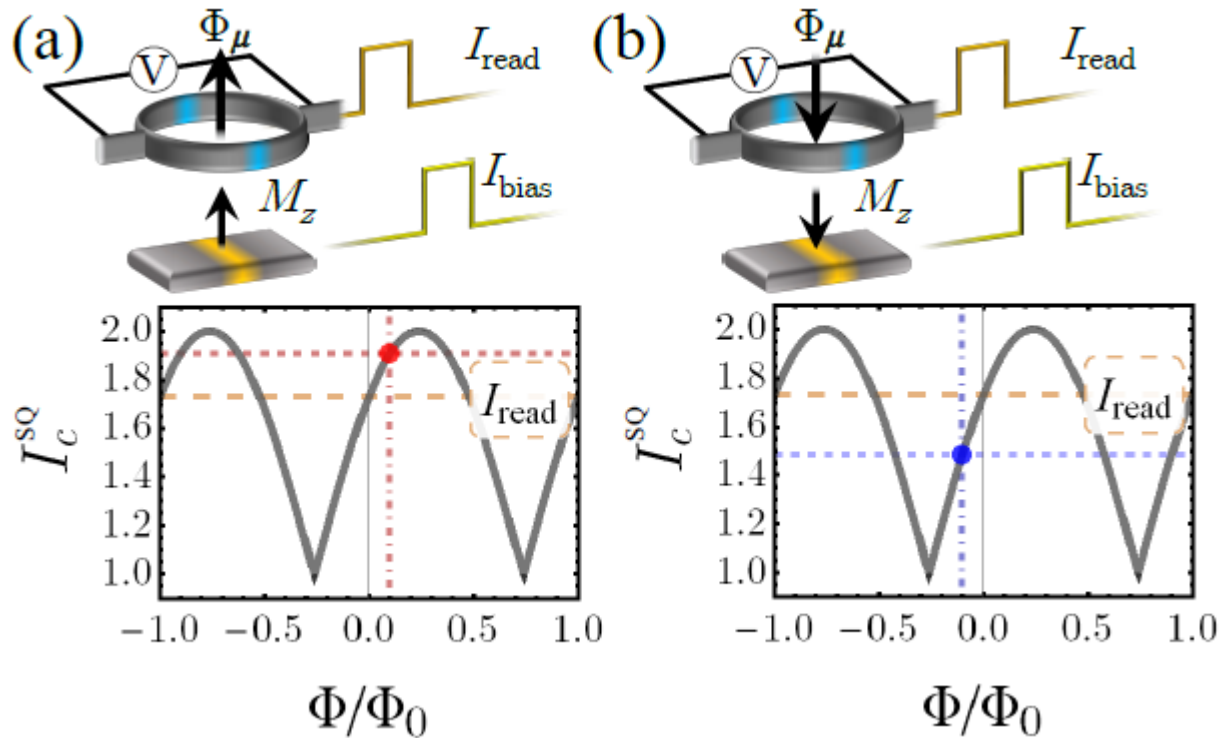


FIG. 10. SQUID-based memory readout and cartoon showing the critical current interference pattern of the SQUID, in the cases of both positive and negative orientation along the z-axis of the magnetic moment, see panel (a) and (b), respectively.

Спасибо за внимание