Интегралы, используемые при моделировании адронной материи при конечной температуре

Хмелев А. В., Буракова А. Д.

Государственный университет "Дубна"

Научный руководитель: Калиновский Юрий Леонидович

18 апреля 2023 г.

Постановка задачи

- Была поставлена задача создания численных методов для моделлирования спектра η и $\eta^{'}$ мезонов в плотной и горячей ядерной среде.
- Для этого нужно было написать программу расчетов для вычисления интеграллов

Явный вид интегралов

Интеграл $I_2^{ij}(P)$ зависит от температуры T и от двух химических потенциалов μ_i, μ_j, соответствущих кварковых ароматов

$$I_2^{ij}(P_0, T, \mu_i, \mu_j) = -N_c \int \frac{d^3\mathrm{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2E_i} \frac{1}{(E_i + P_0 - (\mu_i - \mu_j))^2 - E_j^2}\, n_i^+ \right. \\ - \frac{1}{2E_i} \frac{1}{(E_i - P_0 + (\mu_i - \mu_j))^2 - E_j^2}\, n_i^- \\ + \frac{1}{2E_j} \frac{1}{(E_j - P_0 + (\mu_i - \mu_j))^2 - E_i^2}\, n_j^+ \\ \left. - \frac{1}{2E_j} \frac{1}{(E_j + P_0 - (\mu_i - \mu_j))^2 - E_i^2}\, n_j^- \right], \tag{1}$$

где

$$n_i^\pm = f_i(\pm E_i) = \frac{1}{1 + e^{\pm\beta(E_i \mp \mu_i)}}, \quad n_j^\pm = f_j(\pm E_j) = \frac{1}{1 + e^{\pm\beta(E_j \mp \mu_j)}} \tag{2}$$

Методы вычисления

Для вычисления интеграла используется метод Гаусса-Кронрода. Общая формула для вычисления интеграла методом Гаусса-Кронрода имеет вид:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_i f(a_i), \tag{3}$$

где n - количество узлов, z_i - узлы Гаусса-Лежандра. a_i и y_i - это коэффициенты, которые определяют узлы и веса для численного интегрирования на заданном интервале, а y_i - это соответствующий вес для i-го узла.

Для вычисления a_i и y_i можно использовать следующие формулы:

$$a_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} z_i, \quad y_i = \frac{b-a}{2} w_i \tag{4}$$

где w_i - веса для узлов Гаусса-Лежандра. Для оценки погрешности можно использовать эмпирическую формулу:

$$\Delta = (200|I - I_G|)^{1.5}, \tag{5}$$

где I_G – приближённое значение интеграла, полученное методом Гаусса

Интегрируемая функция

Для примера рассмотрим одну из четырех функций, которые будут интегрироваться. С помощью языка программирования "C++"написана программа для вычисления Методом Гаусса – Кронрода интеграла вида:

$$\left(\frac{Nc}{\Pi^2}\frac{1}{2\left(\frac{P_0}{L}\right)}\right)\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+\frac{m_i^2}{L^2}}}f(E_i-\mu_i)\Phi(E) \tag{6}$$

где $A = \left(P_0^2 + (m_i^2 - m_j^2)\right)\frac{1}{2P_0L}$, $E_i = \sqrt{x^2 + \left(\frac{m_i^2}{L^2}\right)}$, $f(E_i - \mu_i) = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu_i)}}$,
$\beta = \frac{1}{T}$.
Выбраны следующие значения параметров: $P_0 = 1,\ m_i = 0.3,\ m_j = 0.7,\ \mu_i = 1,$ $L = 1,\ N_c = 1,\ T_1 = 0.05,\ T_2 = 0.1,,\ T_3 = 0.15.$

Условия для функций $\Phi(E)$.

$$\text{Если} \qquad m_i \geq m_j \to \frac{1}{E_i + A}$$

$$\text{Если} \qquad m_i < m_j \to \begin{cases} \text{Если} \qquad P_0 - \sqrt{m_j^2 - m_i^2} > 0 \to \dfrac{1}{E_i + A} \\ \text{Если} \qquad P_0 - \sqrt{m_j^2 - m_i^2} = 0 \to \dfrac{1}{E_i} \end{cases}$$

$$\text{Если} \qquad P_0 - \sqrt{m_j^2 - m_i^2} < 0 \to \begin{cases} \text{Если} \qquad m_i^2 - A^2 > 0 \to \dfrac{E_i - A}{p^2 + (m_i^2 - A)} \\ \text{Если} \qquad m_i^2 - A^2 = 0 \to \dfrac{E_i - A}{p^2} \\ \text{Если} \qquad m_i^2 - A^2 < 0 \to \dfrac{E_i - A}{p + \sqrt{A^2 - m^2}} \end{cases}$$

Результаты

Мы получили следующие результаты для одного интеграла:

	Метод Гаусса-Кронрода	Погрешность
Функция 1	0.01813911920924079	6.6415029217927582e-07
Функция 2	0.036638212206322643	4.7850861069898487e-09
Функция 3	0.091601077664810737	9.8231421998995336e-08
Функция 4	0.013687126974742232	4.9003445721090917e-12

Такие результаты имеем для спектра температур:

Температура T	Значение интегралов	Время вычислений
0.05	0.16116274078191545	0.0176663
0.10	0.16006553605511639	0.0174783
0.15	0.15903909753353368	0.01811

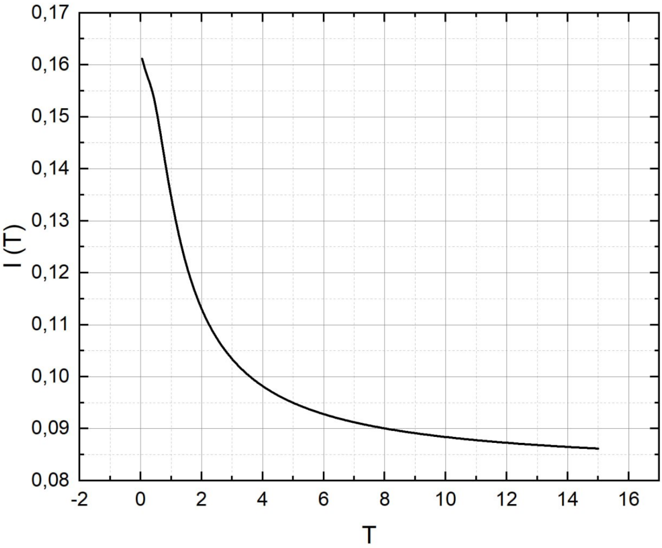

Рис.: Зависимость значений интеграла от температур при T= $\overline{0.05, 15}$

Продолжение исследований

Теперь у нас в планах заняться такмими задачами, как:

- Численные решения систем нелинейных интегральных уравнений
- Изучение адронов при конечном химическом потенциале μ

Для численного решения систем нелинейных интегральных уравнений существует множество нетривиальных алгоритмов, в том числе можно использовать специальную библиотеку Барсеньева.