

Квадратичный радиус пиона при $T \neq 0$

1. Постановка задачи

Вычислить квадратичный радиус пиона

2. Ход работы

Квадратичный радиус пиона определяется формулой

$$\langle r_p^2 \rangle = -24N_c g_{pqq}^2 \int [\alpha_1 \alpha_2] \left(M_p^2 \alpha_1 (1 + 5\alpha_1)(1 - \alpha_1) + m^2 (1 - \alpha_1) \right) \\ 3\alpha_2 \alpha_3 i \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - A)^4} - ((3 + 5\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3 + 2(1 + 3\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3) i \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - A)^3}$$

В этой формуле: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - переменные интегрирования

$N_c = 3$ - число цветов кварков, образующих пион

g_{pqq} - константа связи; $g_{pqq} = \frac{m}{F_p}$

m - масса кварка, $F_p = 92,4 \text{ MeV}$

Символ $\int [\alpha_1 \alpha_2] \equiv \int_0^1 \alpha_1 \int_0^1 \alpha_2 \int_0^1 \alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$

$$q^2 - A = q_0^2 - \bar{q}^2 - A = q_0^2 - (\bar{q}^2 - M_p^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1)) \equiv q_0^2 - B^2$$

Задача: исследовать поведение квадратичного радиуса при изменении температуры и плотности среды.

Для этого сначала проверим формулу при $T = 0$

Чтобы проинтегрировать по $dq = dq_0 d\bar{q}$, используем разложения

$$\frac{1}{q^2 - B^2} = \frac{1}{2B} \left(\frac{1}{q_0 - B} - \frac{1}{q_0 + B} \right)$$

$$\frac{1}{(q^2 - B^2)^2} = \frac{1}{4B^2} \left(\frac{1}{(q_0 - B)^2} + \frac{1}{(q_0 + B)^2} - \frac{2}{2B} \left(\frac{1}{q_0 - B} - \frac{1}{q_0 + B} \right) \right)$$

В результате после интегрирования по dq_0 получим

$$\langle r_p^2 \rangle = 24N_c g_{pqq}^2 f[\alpha\alpha] (M_p^2 \alpha_1 (1 + 5\alpha_1)(1 - \alpha_1) + m^2(1 - \alpha_1))$$

$$3\alpha_1 \alpha_2 \frac{5}{32} \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\bar{q}^2 + (m^2 - M_p^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1)))^{\frac{5}{2}}} + ((3 + 5\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3 + 2(1 + 3\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3)$$

$$\frac{3}{16} \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\bar{q}^2 + (m^2 - M_p^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1)))^{\frac{5}{2}}}$$

Приближение: $M_p^2 \approx 0$

Тогда

$$\langle r_p^2 \rangle = 24N_c g_{pqq}^2 (i_1 f[\alpha\alpha] (\frac{15}{32} \alpha_2 \alpha_3 (1 - \alpha_1) m^2) + i_2 \frac{3}{16} f[\alpha\alpha] ((3 + 5\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3 + 2(1 + 3\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3)$$

$$i_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^L \frac{q^2 dq}{(q^2 + m^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{15} \frac{L^3 (2L^2 + 5m^2)}{m^4 (L^2 + m^2)^{\frac{5}{2}}} \approx \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{15} \frac{2}{m^4}$$

$$i_2 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{3}$$

$$f[\alpha\alpha] (\alpha_2 \alpha_3 (1 - \alpha_1)) = \int_0^1 \alpha \alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} \alpha \alpha_2 (1 - \alpha_1) (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_2 = \frac{1}{30}$$

$$f[\alpha\alpha] ((3 + 5\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3 + 2(1 + 3\alpha_1)\alpha_2 \alpha_3) = \frac{3}{10}$$

$$\langle r_p^2 \rangle = 24N_c g_{pqq}^2 (i_1 \frac{15}{32} \frac{1}{30} m^2 + i_2 \frac{3}{16} \frac{3}{10}) = 24N_c g_{pqq}^2 \frac{1}{m^2} ((\frac{2}{15} \frac{15}{32} \frac{1}{30} + \frac{3}{16} \frac{3}{10} \frac{1}{30}) \frac{1}{2\pi^2} =$$

$$\frac{N_c}{4\pi^2 F_p^2} \frac{242}{16} (\frac{1}{30} + \frac{3}{10}) = \frac{N_c}{4\pi^2 F_p^2} 3 (\frac{1}{30} + \frac{9}{30}) = \frac{N_c}{4\pi^2 F_p^2}$$

$$\langle r_p^2 \rangle = \frac{N_c}{4\pi^2 F_p^2}$$

$$\frac{1}{MeN} = 197, 3 fm$$

$$\frac{3}{4\pi^2 (93)^2} (197, 3)^2 = 0, 34$$

$$\langle r_p^2 \rangle = 0, 34 fm^2$$

Теперь рассмотрим обобщение на случай конечных температур

Для этого воспользуемся формулой суммирования Матсубары которую сим-

волически запишем как

$$\int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{q_0 - E} - \frac{1}{q_0 + E} \right) = \frac{1}{2E} (f(E) - f(-E)), \text{ где } E = \sqrt{\bar{q}^2 + m^2},$$

а функция Ферма $f(x) = \frac{1}{e^{\beta E} + 1}$, где $\beta = \frac{1}{T}$ - обратная температура

Рассмотрим интеграл вида

$$I_n = i \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - D)^n}$$

$$\text{Пусть } E = \sqrt{\bar{q}^2 + D}$$

$$\text{Тогда } I_2 = \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E^2} (f(E) - f(-E) + 2\beta E f(E) f(-E))$$

$$I_3 = - \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \frac{3}{16E^5} (f(E) - f(-E)) (1 - \frac{2}{3}\beta^2 E^2 f(E) f(-E)) + 2\beta E f(E) f(-E)$$

$$I_4 = \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \frac{5}{32E^7} (f(E) - f(-E)) (1 - \frac{4}{5}\beta^2 E^2 f(E) f(-E)) (1 - \frac{1}{6}\beta E (f(E) - f(-E))) +$$

$$+ 2\beta E f(E) f(-E) \left(1 - \frac{2}{15}\beta^2 E^2 f(E) f(-E) \right)$$

$$\beta = \frac{1}{T}; \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2} q^2 dq$$

$$E = \sqrt{\bar{q}^2 + m^2}$$

T меняется в пределах $0,05 \leq T \leq 0,15m = 0,3MeV$

$$\int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^L q^2 dq; L = 0,6MeV$$

3. Програмная реализация

Используем метод Гаусса, реализованный в библиотеке Scipy.

Метод Гаусса — метод численного интегрирования, позволяющий повысить алгебраический порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования без увеличения числа используемых значений подынтегральной функции. Метод Гаусса позволяет достичь

максимальной для данного числа узлов интегрирования алгебраической точности. В общем случае, используя n точек, можно получить метод с порядком точности $2n-1$.

```
18     T = 0.05
19     betta = 1/T
20
21     mas_of_I2 = []
22     mas_of_I3 = []
23     mas_of_t = []
24
25     while T <= 0.15:
26         mas_of_t.append(T)
27         mas_of_I2.append(integrate.quad(I2, 0.0, 0.6)[0])
28         mas_of_I3.append(integrate.quad(I3, 0.0, 0.6)[0])
29         T += 0.01
30         betta = 1/T
31
32
33     plt.plot(mas_of_t, mas_of_I2)
34     plt.xlabel("Temperature")
35     plt.ylabel("Value of the integral I2")
36     plt.show()
37
38     plt.plot(mas_of_t, mas_of_I3)
39     plt.xlabel("Temperature")
40     plt.ylabel("Value of the integral I3")
41     plt.show()
42
```

Рис. 1: Код программы

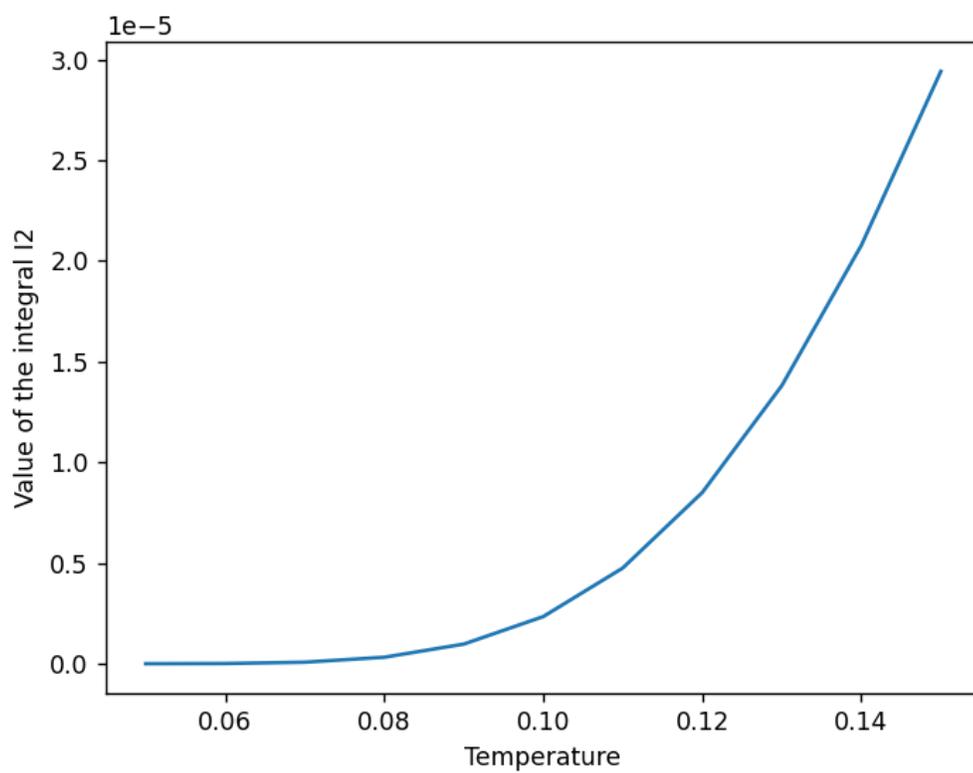


Рис. 2: График зависимости значения интеграла I2 от температуры

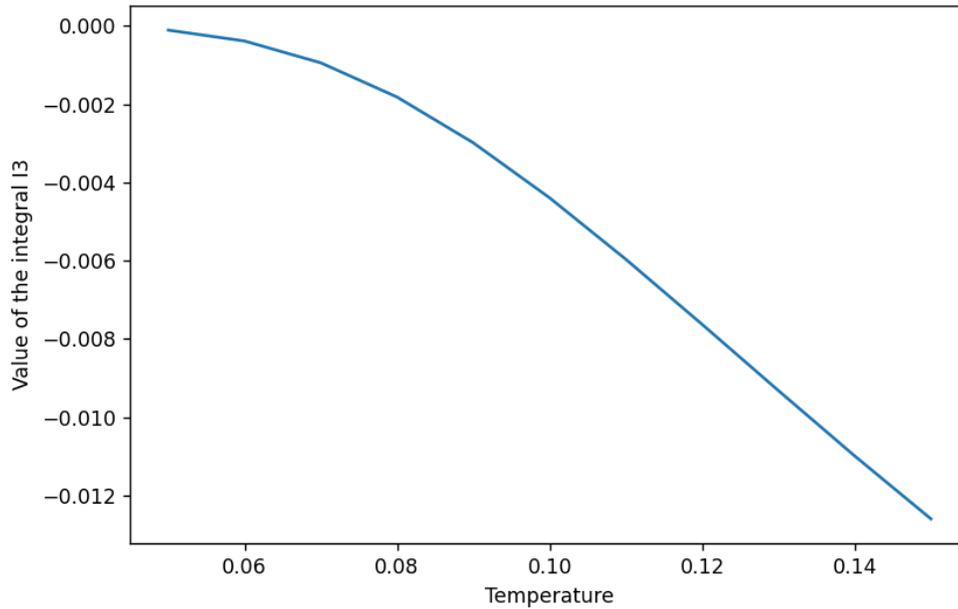


Рис. 3: График зависимости значения интеграла I3 от температуры

Поведение графиков показывает, что при подстановке в окончательное выражение, будет происходить сокращение интегралов, что приводит, возможно, к слабой зависимости формфактора пиона от температуры.

Для работы с графиками используем библиотеку Matplotlib.

4. Дальнейший план работы

Исследование квадратичного радиуса пиона при конечной температуре при $Q^2 \rightarrow \infty$.