

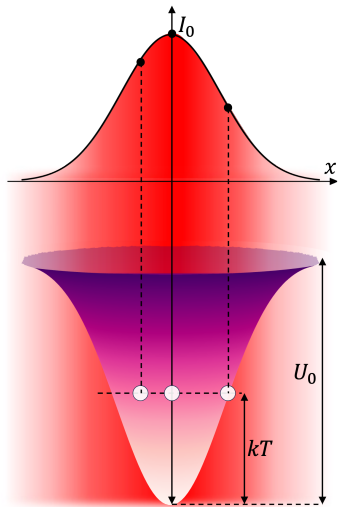
# Разложение однокубитных квантовых операций с повышенной устойчивостью к систематическим ошибкам

Михайлова В. И., Стручалин Г. И.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
физический факультет,  
Центр квантовых технологий

27 мая 2024 г.

# Введение. Однокубитные операции



- Для рамановских однокубитных гейтов  $R_\varphi(\theta)$  возбуждаются осцилляции на двухфотонной частоте Раби

$$\Omega_R(\mathbf{r}) \propto I(\mathbf{r})$$

- Из-за тепловых флуктуаций атома в ловушке, поскольку интенсивность зависит от координаты, возникают флуктуации частоты Раби

$$\Omega_R \rightarrow \Omega_R(1 + \delta(\mathbf{r})) \Rightarrow$$

$$R_\varphi(\theta) \rightarrow R_\varphi(\theta(1 + \delta))$$

- Оценка для  $\delta$ :

$$\delta \approx \frac{kT}{U_0} \approx 10^{-3} - 10^{-2}$$

## Задача

Разработка протокола выполнения однокубитных вентилей, устойчивого к флуктуациям частоты Раби.

- В настоящий момент на экспериментальной установке реализованы повороты вокруг двух осей —  $X$  и  $Y$ .
- Стандартное разложение однокубитного гейта  $G$ :

$$U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)R_x(\theta_3)$$

- Оптимальное разложение гейта  $G$  будем искать в виде произведения  $N$  поворотов вокруг чередующихся осей  $X$  и  $Y$  на углы  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ :

$$U(\theta) = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2) \dots R_N(\theta_N)$$

# Постановка задачи. Требования к разложению

$$U(\boldsymbol{\theta}) = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)\dots R_N(\theta_N)$$

$$U(\boldsymbol{\theta}, \delta) = U(\boldsymbol{\theta}(1 + \delta))$$

Фиделити при отсутствии флуктуаций:

$$F(U(\boldsymbol{\theta}, 0), G) = \frac{1}{4} |\text{Tr } UG^\dagger|^2 = 1, \dim \boldsymbol{\theta} = N$$

Устойчивость разложения:

$$\frac{\partial^m F(U(\boldsymbol{\theta}, 0), G)}{\partial \delta^m} = 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

тогда при  $|\delta| \ll 1$ ,  $1 - F \propto \delta^{M+1}$ ;

- Для эффективного описания матриц  $U \in SU(2)$  будем работать с множеством кватернионов  $\mathbb{H}$

$$1 \sim I, \quad i \sim -iX, \quad j \sim -iY, \quad k \sim -iZ,$$

$$u = a + bi + cj + dk \sim U,$$

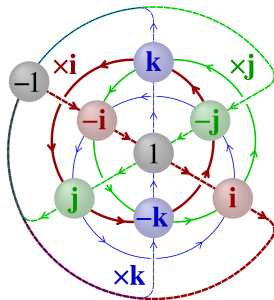
$$u^* \sim U^\dagger, \quad \operatorname{Re} u \sim \frac{1}{2} \operatorname{Tr} U,$$

$$u \in SU(2) \Leftrightarrow |u| = 1,$$

$$r_\sigma(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} + \tilde{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} \sim R_\sigma(\theta)$$

- С учетом этого система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} (\operatorname{Re} u(\theta, 0) g^*)^2 = 1, \\ \frac{\partial^m (\operatorname{Re} u(\theta, 0) g^*)^2}{\partial \delta^m} = 0, \quad m = 1, \dots, M. \end{cases}$$



$$\begin{cases} (\operatorname{Re} u(\theta, 0)g^*)^2 = 1, \\ \frac{\partial^m (\operatorname{Re} u(\theta, 0)g^*)^2}{\partial \delta^m} = 0, \quad m = 1, \dots, M. \end{cases}$$

На решении  $u = \pm g$ :

Для первой производной:

$$\frac{\partial (\operatorname{Re} ug^*)^2}{\partial \delta} = 2 \operatorname{Re}[ug^*] \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial u}{\partial \delta} g^* \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial u}{\partial \delta} u^* \right] \equiv 0$$

Для второй производной:

$$\frac{\partial^2 (\operatorname{Re} ug^*)^2}{\partial \delta^2} = -2 \left| \frac{\partial u}{\partial \delta} \right|^2 = 0$$

Для третьей производной, с учетом уравнения для 2-ой производной:

$$\frac{\partial^3 (\operatorname{Re} ug^*)^2}{\partial \delta^3} = -6 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2} \frac{\partial u^*}{\partial \delta} \right] \equiv 0$$

# Аналитическое исследование. Размерность множества решений

В итоге, система уравнений при  $M = 3$  эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} u(\theta, 0) = \pm g, \\ \frac{\partial u(\theta, 0)}{\partial \delta} = 0, \end{cases}$$

и ее решение обладает устойчивостью  $1 - F \propto \delta^4$ .

- Из нормировки  $|u| = 1$  каждое из уравнений накладывает по 3 связи.
- Для существования решения  $N \geq 6$ .
- При  $N = 6$  система имеет не более чем счётное множество изолированных решений.
- При  $N = 7$  решение достигается на некоторых одномерных линиях в пространстве переменных  $\theta$ .

- Введем функцию потерь  $\mathcal{L}(\theta)$ :

$$\mathcal{L}(\theta) = 1 - (\operatorname{Re}[u(\theta, 0)g^*])^2 + \left| \frac{\partial u(\theta, 0)}{\partial \delta} \right|^2.$$

- $\mathcal{L}(\theta) \geq 0$  и  $\mathcal{L}(\theta) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\theta$  является решением.
- С помощью численных методов оптимизации будем решать задачу:

$$\theta = \arg \min_{\theta \geq 0} \mathcal{L}(\theta).$$



# Численное моделирование. Пример решения

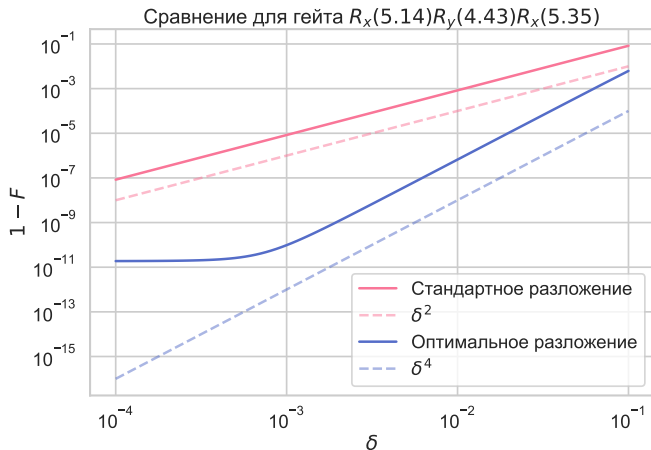


Рис.: Типичная зависимость  $1 - F(\delta)$  для разложения на 3 («стандартное разложение») и на 7 («оптимальное разложение») поворотов. Пунктир — зависимости  $\delta^2$  и  $\delta^4$  для сравнения.

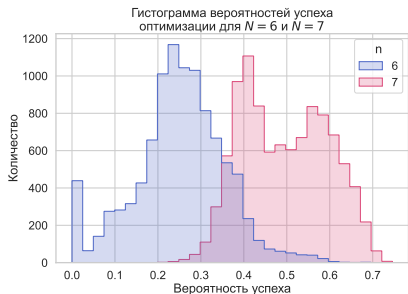
Для поиска минимума использовались локальные градиентные методы из библиотеки NLOpt (версия 2.7.1)

- Функция  $\mathcal{L}(\theta)$  является сложной и нелинейной.
- Задача не просто найти её локальный минимум, но и потребовать, чтобы значение функции в нём было равно нулю
- Может быть недостаточно одного запуска оптимизатора со случайной начальной точки  $\theta_0$

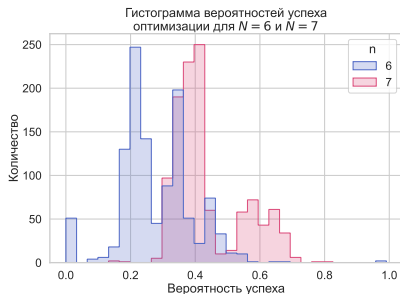
Метод	Успехов/с
LBFGS	2517,9
SLSQP	2420,0
TNEWTON	1484,8
CCSAQ	78,9
MMA	75,0

*Успешным* будем называть тот запуск, когда алгоритм сошелся и нашел нуль функции потерь

# Численное моделирование. Сравнение $N = 6$ и $N = 7$



(a)



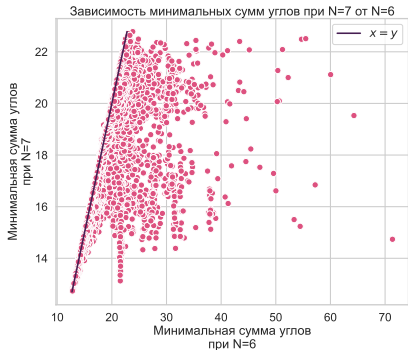
(b)

**Рис.:** Гистограммы вероятностей успеха для различных типов гейтов. Для каждого гейта 10000 запусков оптимизатора (а) Случайные по Хаару гейты (всего 10000 гейтов); (б) часто используемые гейты (QASM benchmark).

# Численное моделирование. Уменьшение суммарного угла

**Идея:** за счет дополнительной степени свободы попытаться найти разложение с наименьшей суммой углов.

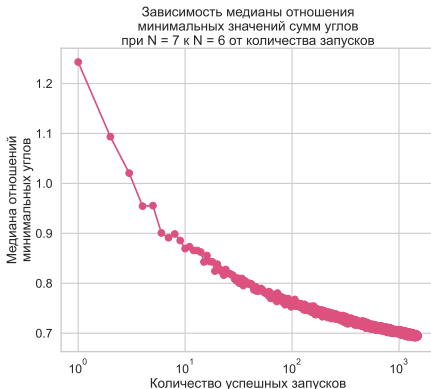
$$p_Z = 1 - \exp\left(-\frac{\sum_i \theta_i}{\pi} \frac{t_\pi}{T_2}\right),$$



**Рис.:** Корреляция сумм углов для разложений, состоящих из 6 и 7 поворотов. Каждая точка соответствует одному случайному вентилю. Успех с минимальной суммой — из всех успешных запусков выбирается тот, чья сумма найденных углов минимальна.

# Численное моделирование. Уменьшение суммарного угла

Исследовалось, сколько успешных запусков при  $N = 7$  достаточно для поиска минимальной суммы углов, чтобы превзойти минимальный результат для  $N = 6$ .



**Рис.:** Медиана отношений минимальной суммы углов для  $N = 7$  к минимальной сумме при  $N = 6$  от количества запусков.

## Численное моделирование. Сравнение $N = 6$ и $N = 7$

- Разложение на  $N = 7$  поворотов, в отличие от разложения на  $N = 6$  поворотов, скорее всего всегда имеет решение.
- Найти решение для  $N = 7$  более вероятно.
- Добавление угла обеспечивает большую гибкость и точность в достижении желаемой конфигурации.

Можно сделать вывод, что  $N = 7$  на данном этапе является наиболее предпочтительным вариантом для рассматриваемой задачи

# Эксперимент. Оценка фиделити по двум измерениям

- В эксперименте нельзя непосредственно измерить фиделити  $F(U, G)$  между разложением  $U$  и целевым вентиляем  $G$ .
- Алгоритм оценки фиделити по двум измерениям:
  - 1 Разложим исследуемый вентиль  $G$  по собственным векторам:

$$G = \lambda_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \lambda_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

- 2 Введём две вероятности  $p_1$  и  $p_2$ :

$$p_1 = |\langle\psi_1|U|\psi_2\rangle|^2,$$
$$p_2 = |\langle\mu|U|\nu\rangle|^2, \quad |\mu\rangle = \frac{\lambda_2^* |\psi_1\rangle - \lambda_1^* |\psi_2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\nu\rangle = \frac{|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

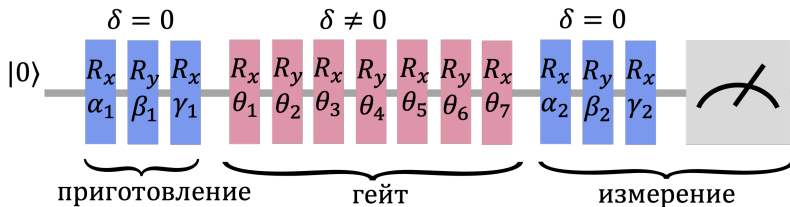
Они введены таким образом, что  $p_1 = p_2 = 0$ , если  $U = G$ .

- 3 Было показано, что

$$\max(p_1, p_2) \leq 1 - F \leq p_1 + p_2.$$

# Эксперимент. Радиочастотные гейты

- В экспериментах искусственно меняется параметр отклонения  $\delta$ , и снимаются зависимости вероятностей  $p_1(\delta)$  и  $p_2(\delta)$ .
- При этом вращения базиса для приготовления и измерения состояний производятся с нулевым  $\delta$ , то есть выполняются идеально.





# Эксперимент. Коррекция на SPAM

- Измерение и приготовление состояний в эксперименте подвергаются ошибкам SPAM (state preparation and measurement). При SPAM исходная вероятность  $p$  преобразуется по правилу  $p \rightarrow p'$ :

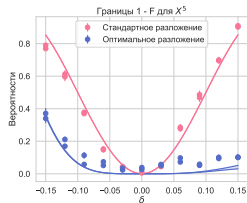
$$p' = p(1 - q_{1 \rightarrow 0}) + (1 - p)q_{0 \rightarrow 1},$$

где  $q_{1 \rightarrow 0}$ ,  $q_{0 \rightarrow 1}$  — переходные вероятности ошибок.

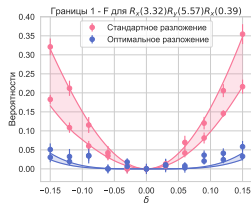
- Измеренное семейство кривых  $p'_{1,2}(\delta)$  аппроксимируется теоретической зависимостью  $p_{1,2}(\delta)$  для нахождения  $q_{1 \rightarrow 0}$  и  $q_{0 \rightarrow 1}$ .
- На графиках экспериментальные точки  $p'$  «опущены» на величину SPAM ошибки:

$$p = \frac{p' - q_{0 \rightarrow 1}}{1 - q_{1 \rightarrow 0} - q_{0 \rightarrow 1}}.$$

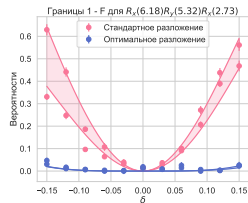
- В эксперименте полученные ошибки:  $q_{0 \rightarrow 1} \approx 5\%$ ,  $q_{1 \rightarrow 0} \approx 8\%$ .



(а)



(б)



(в)

Рис.: Оценка границ инфidelити  $1 - F$  для разложений различных вентилей. Для накопления статистики каждая точка измерялась 10 раз по 100 усреднений. (а) Пятикратное повторение разложений для гейта  $X$ . (б, в) Гейты со случайно выбранными углами поворота.

- Предложен алгоритм разложения однокубитных гейтов на вращения вокруг осей  $X$  и  $Y$ , обладающий устойчивостью  $1 - F \propto \delta^4$ .
- Показано, что разложение на 7 поворотов более устойчиво к флуктуациям частоты Раби, чем стандартное разложение на 3 поворота.
- Исследованы алгоритмы численных оптимизаций для поиска оптимального разложения
- Продемонстрированы экспериментальные результаты на радиочастотных гейтах.

Дальнейшие исследования:

- Разложения гейта, имеющего менее трех степеней свободы.
- Доказательство несуществования решения для «неуспешных» гейтов при  $N = 6$ .
- Проведение эксперимента с рамановскими гейтами.