



# Статус работ по трекингу SPD с помощью нейронной сети Хопфилда и симуляции квантового отжига

М. Буреш, И. Кадочников, Г.А. Ососков

ЛИТ ОИЯИ

19.03.2024

# Аннотация

- Представление
- Трекинг SPD. Постановка задачи. Наш подход.
- Статус проекта, планы.

# Мартин Буреш

- **2015**, Масариков университет в Брно, Чехия, каф. «Теоретической физики и астрофизики», Ph.D.
- кандидатская диссертация «Квантовая физика с дополнительными измерениями пространства», руководитель проф. Rikard von Unge
- Публикации до 2015 (журналы Q1):
  - ▶ M. Bureš, P. Siegl: Hydrogen atom in space with a compactified extra dimension and potential defined by Gauss' law, *Annals of Physics*, Volume 354, March 2015, Pages 316-327.
  - ▶ M. Bureš: Energy spectrum of the hydrogen atom in a space with one compactified extra dimension,  $\mathbb{R}^3 \times S^1$ , *Annals of Physics*, Volume 363, December 2015, Pages 354–363.
- научные стажировки - Франция (M. Kibler), Германия (V. Bach), Польша (J. Zakrzewski), Италия (O. Ragnisco), Индия (R. Pathak)
- **2016** Чешский технический университет в Праге
- **2017** с.н.с. ЛТФ, **2019** с.н.с. ЛИТ (В.П. Гердт, А. Хведелидзе)
- **7** публикаций, **40** устных и **3** постерные выступления на научных конференциях и семинарах.
- 4 года грант ПП правительства Чешской республики
- организация конференций (НФР), преподавательская деятельность (унив. курс мат. методы в физике), курс по квантовым вычислениям (ТПУ)
- **Linux**, **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**, Python, 15 языков (7 активно)

# Научная деятельность - публикации (с 2019)

## Квант. теор. информации, геометрические аспекты $N$ -мерных квантовых систем:

- M. Bures, A. Khvedelidze, D. Mladenov: Solving the Uhlmann Equation for the Bures-Fisher Metric on the Subset of Rank-Deficient Qudit States, Proceedings of the 9th International Conference "Distributed Computing and Grid Technologies in Science and Education", pp. 358-362, Dubna, Russia, July 5-9, 2021.
- N. Abbasli, V. Abgaryan, M. Bures, A. Khvedelidze, I. Rogojin and A. Torosyan: On measures of classicality/quantumness in quasiprobability representations of finite-dimensional quantum systems, ISSN 1063-7796, Physics of Particles and Nuclei, 2020, Vol. 51, No. 4, pp. 443-447. (preprint <http://arxiv.org/abs/2001.03737>)

## Влияние переменной размерности пространства на физические системы:

- Martin Bureš, Nugzar Makhdiani: Space Dimension Renormdynamics, Particles 2020, 3(2), 364-379, [doi.org/10.3390/particles3020028](https://doi.org/10.3390/particles3020028)
- Martin Bureš, Nugzar Makhdiani: Space Dimension Dynamics and Modified Coulomb Potential of Quarks—Dubna Potentials. Phys. Part. Nuclei Lett. 16, 620-624 (2019), <https://link.springer.com/article/10.1134/S1547477119060086>
- Martin Bureš, Nugzar Makhdiani: Dark matter and energy from space dimension renormdynamics (prepared for submission to MDPI Particles)

## Трекинг частиц:

- Bureš M., Kadochnikov I., Kovalenko A., Ososkov G.: Application of the Hopfield Network to SPD Track Reconstruction, Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2024, P11-2024-5.

# Научная деятельность - доклады (с 2019)

- 29.-31.03.2023 цикл лекций по квантовым вычислениям (Sprig IT School, Томский политехнический университет)
- 14 докладов в России и 4 зарубежных доклада

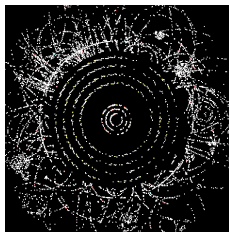
## Трекинг (с 2023)

- 14.03.2024 - Решение задачи коммивояжёра и трекинг SPD с помощью нейронной сети Хопфилда и симуляции квантового отжига (семинар сектора)
- 14.12.2023 - Применение сети Хопфилда и квантовых алгоритмов для реконструкции событий в экспериментах мегапроекта NICA (научно-практический семинар «Квантовые алгоритмы» 14-15 декабря 2023 года, ЮУрГУ, г. Челябинск)
- 27.09.2023 - Применение сети Хопфилда и квантовых алгоритмов для реконструкции событий в экспериментах мегапроекта NICA (Семинар научного отдела вычислительной физики, ЛИТ ОИЯИ)

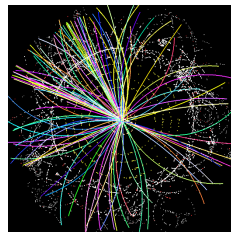
# “connect the dots” Что такое трекинг?

**Трекинг** - восстановление траекторий частиц из информации записанной детектором, путем объединения хитов в группы (треки).

*хит* – реконструированный отклик детектора



ху-разрез события на  
ВАК.

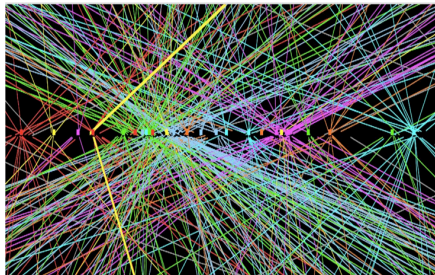
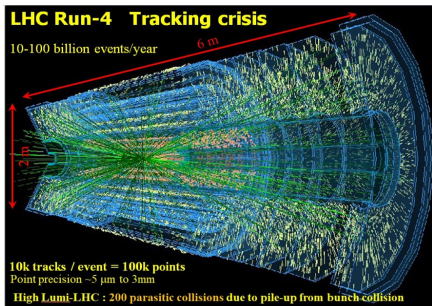


Тоже событие после  
трекинга.

Для каждого события определяем параметры вершин (координаты) и траекторий частиц (импульсы, заряды, углы вылета).

# Кризис трекинга

Главная проблема современного трекинга - высокая светимость пучков ускорителей, т. е. мегагерцовый темп поступления данных и банчевая структура пучка.

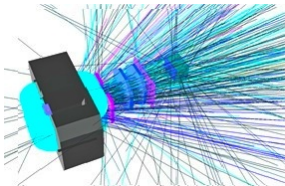


Столкновение групп ускоренных частиц ( $\sim 15$  см).

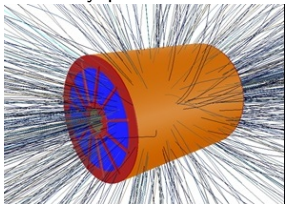
Модельное события в HL-LHC.

- Для достижения большой светимости частицы ускоряются не по отдельности, группами - банчами (англ. bunch) из-за чего моменты столкновений происходят так близко, что треки событий сильно перекрываются.
- Текущая ситуация: 20 паразитных столкновений, High Lumi-LHC: 200 паразитных столкновений.
- Таким образом, реконструкция треков частиц в плотных средах, таких как детекторы БАК высокой светимости (HL-LHC) и NICA, представляет собой сложную проблему распознавания образов для решения которой необходимо развитие новых алгоритмов глобокого трекинга и их распараллеливание на суперкомпьютерах.

# Мегапроект NICA ОИЯИ



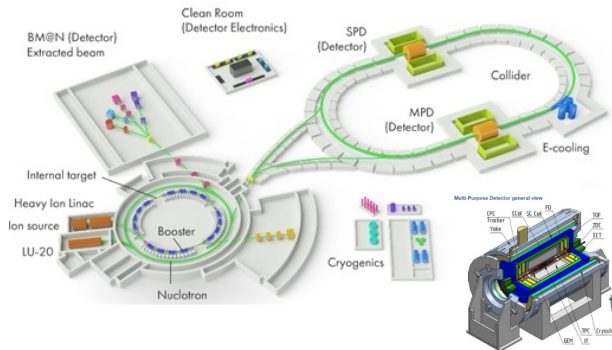
Эксперимент BM@N.  
Стриповый GEM-детектор  
внутри магнита.



Трековый детектор TPC  
внутри магнита MPD.

Показано смоделированное  
событие от взаимодействия  
ионов золота, порождающее  
тысячи треков.

Схема комплекса NICA с экспериментами MPD, SPD, BM@N.



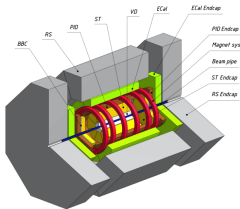
**Задача: реконструкция событий по данным измерения в трековых и других детекторах.**



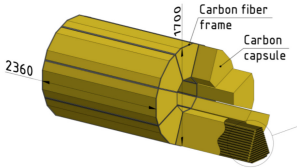
# Эксперимент SPD NICA

Коллаборация SPD (**S**pin **P**hysics **D**etector) планирует установить универсальный детектор во второй точке взаимодействия коллайдера NICA для изучения спиновой структуры протона, дейтрона и других явлений, связанных со спином, с помощью поляризованных пучков протонов и дейтронов при энергии столкновения до 27 ГэВ и светимости до  $10^{32} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ .

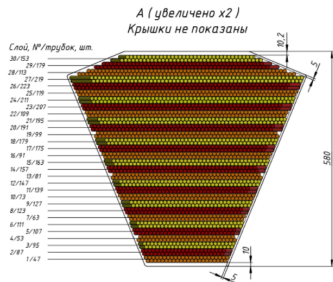
Данные о событиях из SPD будут поступать в виде тайм-слайсов в 10 мс, в каждом из которых будет происходить в среднем 40 событий, т. е. один тайм-слайс будет содержать 200 треков и 1100 хитов на одну станцию (причем 82,26% всех хитов являются фейками)<sup>1</sup>.



Общая схема установки SPD.



Внешний вид SPD straw детектора (слева)



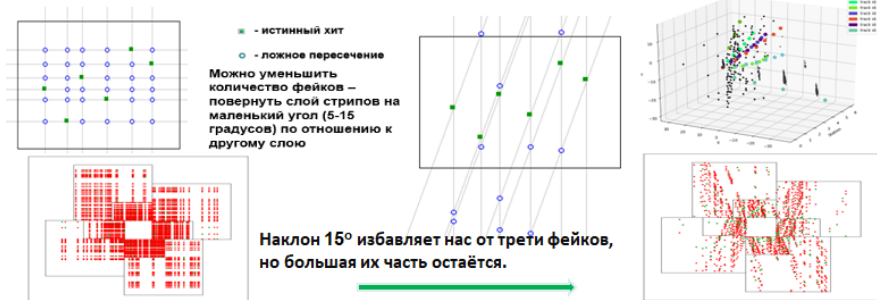
и его модуля в разрезе (справа).

Необходимо разработать алгоритм для онлайн фильтра, чтобы обрабатывать не менее 100 тайм-слайсов в секунду.

<sup>1</sup>D. Rusov et al, Deep Tracking for the SPD Experiment, Physics of Particles and Nuclei Letters, 2023, Vol. 20, No. 5, pp. 1180–1182.

# Проблема фейковых хитов в straw-детекторе

Главная трудность, вызванная спецификой **GEM детектора** – появление ложных отсчетов из-за лишних пересечений стрипов. Для  $n$  истинных хитов имеем  $n^2 - n$  **фейков!**



**Эти две проблемы, - наличие фейковых засорений данных и, главное, сверхвысокий темп их поступления из-за высокой светимости неизбежно требуют разработки новых методов трекинга с использованием глубоких нейронных сетей**

- Механизм возникновения фейков такой же как в микростриповом GEM детекторе в BM@N.
- Трубки в straw детекторе уложены слоями  $0^\circ, 5^\circ, -5^\circ$ , чтобы избавиться от значительной части из  $n^2 - n$  фейков.

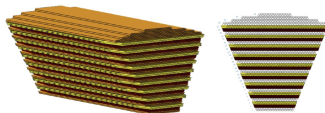


Figure 9.19: Sketch of one module (octant) of the barrel part of the straw tracker.

Схема модуля straw трекера в SPD.

# Задача QUBO

## Quadratic unconstrained binary optimization:

Квадратичная неограниченная двоичная оптимизация

- $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$  - множество векторов фиксированной длины  $n > 0$
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  - набор двоичных значений (битов)
- $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - реальная верхнетреугольная матрица, элементы  $w_{\alpha\beta}$  которой определяют веса для каждой пары индексов  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$  в бинарном векторе

Вводим функцию  $f_W : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , которая для каждого бинарного вектора  $\mathbf{x}$  даёт реальное число:

$$f_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top W \mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=\alpha}^n w_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

**Задача QUBO:** найти бинарный вектор  $\mathbf{x}^*$ , минимальный по отношению к  $f_W$ :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n} f_W(\mathbf{x})$$

Вычислительная сложность QUBO: число бинарных векторов-кандидатов растёт экспоненциально с  $n$  ( $|\mathbb{B}^n| = 2^n$ ).

**Связь с моделью Изинга** ( $\sigma \rightarrow 2x - 1$ ):

Модель QUBO вычислительно эквивалентна модели Изинга, с гамильтонианом

$$H(\sigma) = - \sum_{\alpha < \beta} J_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta - \mu \sum_{\beta} h_\beta \sigma_\beta, \quad \sigma_\alpha \in \{-1, +1\}.$$

# Трекинга как QUBO, нейронная сеть Хопфилда

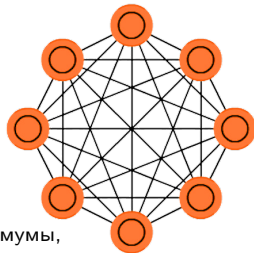
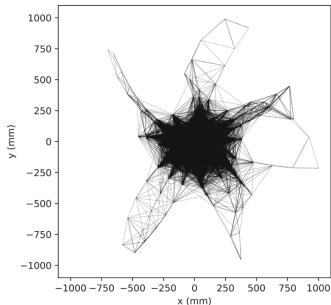
- Задачу трекинга сводим к задаче QUBO с помощью процедуры, основанной на методе Денби-Петерсона (Denby 1988; Peterson 1989), однако вносим изменения чтобы улучшить его производительность для SPD.
- Алгоритм работает как **классификатор сегментов-дублетов (пары хитов)**:  
на входе - большая коллекция потенциальных дублетов  
на выходе - подмножество дублетов, которые считаются истинными
- Сегменты – нейроны в **сети Хопфилда**:  
полносвязная сеть из бинарных нейронов  $s_\alpha$  с симметричной весовой матрицей  $w_{\alpha\beta} = w_{\beta\alpha}$ ,  $w_{\alpha\alpha} = 0$ .
- Функционал энергии сети – это билинейная функция

$$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} x_\alpha w_{\alpha\beta} x_\beta,$$

$x_\alpha$  - состояние (активация)  $\alpha$ -го нейрона

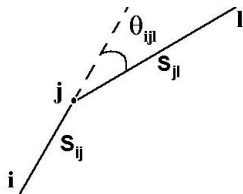
$w_{\alpha\beta}$  - вес синаптической связи нейронов  $\alpha$  и  $\beta$

- В результате **эволюции сети**  $E(x)$  убывает в локальные минимумы, соответствующие точкам стабильности сети.
- Нужно задать **энергию сети** так, чтобы найти треки как гладкие цепочки сегментов.



# Распознавание треков. Метод сегментов.

- Имеется множество  $N$  экспериментальных точек на плоскости. Требуется выбрать (распознать) среди них те, по которым проходит некоторое число непрерывных гладких кривых (треков).
- Вводится нейрон  $s_{ij}$  как направленный сегмент, соединяющий точки  $i, j$ .



- **Энергетический функционал** (Денби и Петерсон, 1988) состоит из двух частей:

$$E = E_{cost} + E_{constraint} ,$$

где

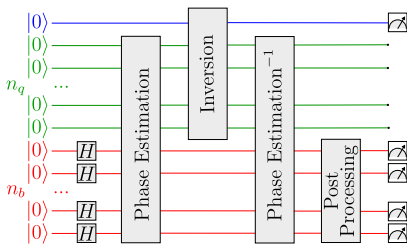
$$E_{cost} = -\frac{1}{2} \sum_{ijkl} \delta_{jk} \frac{\cos^\lambda \theta_{ijl}}{r_{ij} + r_{kl}} s_{ij} s_{kl} ,$$

**поощряет** связи нейронов соответствующим коротким смежным сегментам с малым углом между ними.

$$E_{constraint} = +a \left( \sum_{j \neq k} s_{ij} s_{ik} + \sum_{i \neq j} s_{ik} s_{jk} \right) + b \left( \sum_{i,j} s_{ij} - N \right)^2$$

**запрещает** как межтрековые связи (бифуркации), так и чрезмерный рост числа самих треков.

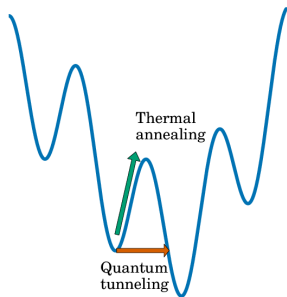
# Универсальный/Адиабатический квантовый компьютер



## Универсальный квантовый компьютер

управляет квантовым состоянием  
(унитарные квантовый операции,  
измерения) Общее назначение

компьютер	кубиты
IBM Q System One (2019)	20
IBM Osprey (2022)	433



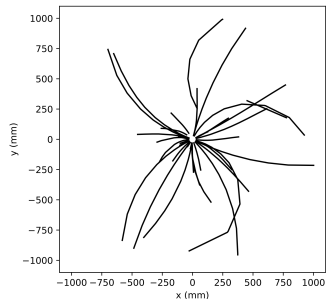
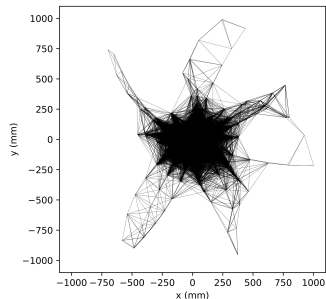
## Адиабатический квантовый компьютер

естественная эволюция квантового состояния  
(нет контроля в процессе)  
проблемы оптимизации

компьютер D-Wave	кубиты	связи
2000Q (2017)	2000	6000
Advantage (2020)	5000	35000

# Квантовый отжиг для трекинга - метод сегментов и QUBO

Alexander Zloکارa и др. «Charged particle tracking with quantum annealing optimization». В: *Quantum Machine Intelligence* 3.2 (нояб. 2021)



# Квантовый отжиг для трекинга - общий вид QUBO

$$E = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j} \left( W_{ij}^{\text{reward}} - W_{ij}^{\text{penalty}} \right) s_{ij} + \sum_{i,j,k} \left( U_{ijk}^{\text{reward}} - U_{ijk}^{\text{penalty}} \right) s_{ij} s_{jk} \right],$$

внешнее взаимодействие

взаимодействие двух сегментов

$$E = - \sum_{i,j,k} \left( \frac{\cos^\lambda(\theta_{ijk}) + \rho \cos^\lambda(\phi_{ijk})}{r_{ij} + r_{jk}} \right) s_{ij} s_{jk} + \eta \sum_{i,j,k} \left( z_k - \frac{z_k - z_i}{r_k - r_i} r_k \right)^\zeta s_{ij} s_{jk} + \alpha \left( \sum_{j \neq k} s_{ij} s_{ik} + \sum_{i \neq k} s_{ij} s_{kj} \right) - \sum_{i,j} (\beta P(s_{ij}) - \gamma) s_{ij},$$

Награждение в случае, что сегменты  $s_{ab}$  и  $s_{bc}$  короткие и изменение направления маленькое.

Штраф за отклонение перекрёстного члена между  $s_{ab}$  и  $s_{ac}$  от направления к центру столкновения.

Штраф за ветвление трека.

Награда сегменту в зависимости от априорной вероятности его активности  $P(s_{ab})$ .

Alexander Zloکارa и др. «Charged particle tracking with quantum annealing optimization». В: *Quantum Machine Intelligence 3.2* (нояб. 2021)



# Квантовый отжиг для трекинга - активная область исследований

- Frédéric Bapst и др. «A pattern recognition algorithm for quantum annealers». В: *Comput. Softw. Big Sci.* 4.1 (2020), с. 1
- Lucy Linder. *Using a Quantum Annealer for particle tracking at LHC*. 2019 HEPQPR.Qallse (Lucy Linder) - первая успешная попытка использования квантового отжига (D-Wave) для восстановления заряженных частиц на БАК.
- Alexander Zloکارa и др. «Charged particle tracking with quantum annealing optimization». В: *Quantum Machine Intelligence* 3.2 (нояб. 2021)
- Arianna Crippa и др. *Quantum algorithms for charged particle track reconstruction in the LUXE experiment*. 2023
- Davide Nicotra и др. *A quantum algorithm for track reconstruction in the LHCb vertex detector*. 2023
- Hideki Okawa. «Charged Particle Reconstruction for Future High Energy Colliders with Quantum Approximate Optimization Algorithm». В: *Communications in Computer and Information Science*. Springer Nature Singapore, 2024, с. 272—283
- Hideki Okawa и др. *Quantum Annealing Inspired Algorithms for Track Reconstruction at High Energy Colliders*. 2024

# Применение нашего алгоритма для модельных данных SPD.

Наша формула энергии:

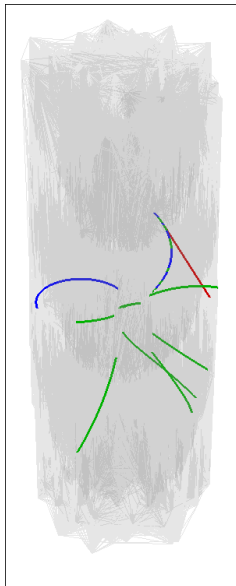
$$E = -\gamma \sum_{i,j,k} \left( \frac{\cos^\lambda(\theta_{ijk})}{(r_{ij} + r_{jk})^\eta} \right) s_{ij} s_{jk} \\ + \alpha \left( \sum_{j \neq k} s_{ij} s_{ik} + \sum_{i \neq j} s_{ik} s_{jk} \right) \\ + \beta \sum_{i,j} s_{ij}$$

Награждение коротких сегментов  $s_{ij}$  и  $s_{jk}$  с маленьким изменением направления (угол  $\theta$ ). Добавление степени суммы длин сегментов  $\eta$  в знаменателе - регулирует степень влияния длины сегмента.

Штраф за ветвление трека.

Замена  $E_{total}$  на постоянное смещение  $\beta$  позволяет сделать матрицу энергии разреженной.

# Результаты применения нашего алгоритма для модельных данных SPD.



Подход - похож на классический метод Денби-Петерсона, то есть поиск глобального минимума для сети Хопфилда методом среднего поля, но с внесением дополнительных параметров в формулу энергии.

Результат трекинга события с 10 треками, 1750 шумовых хитов.

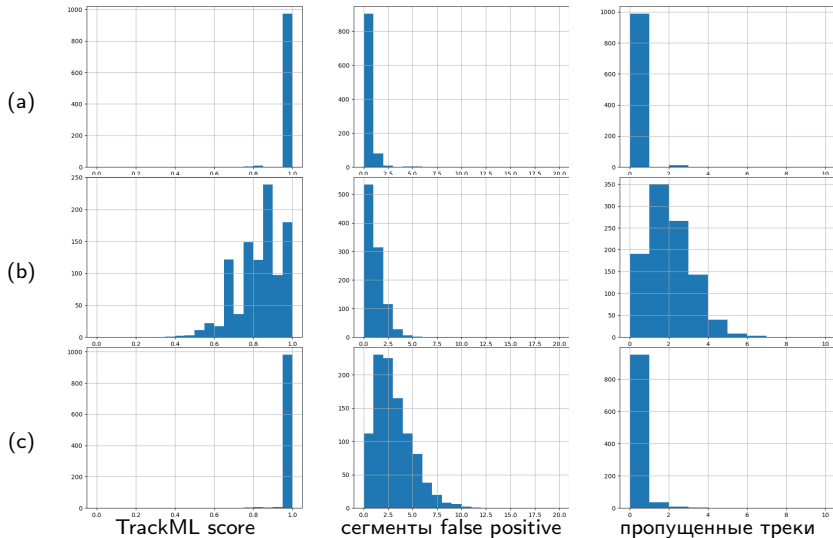
Активные трековые сегменты (true positive)

Неактивные нетрековые сегменты (true negative)

Активные нетрековые сегменты (false positive)

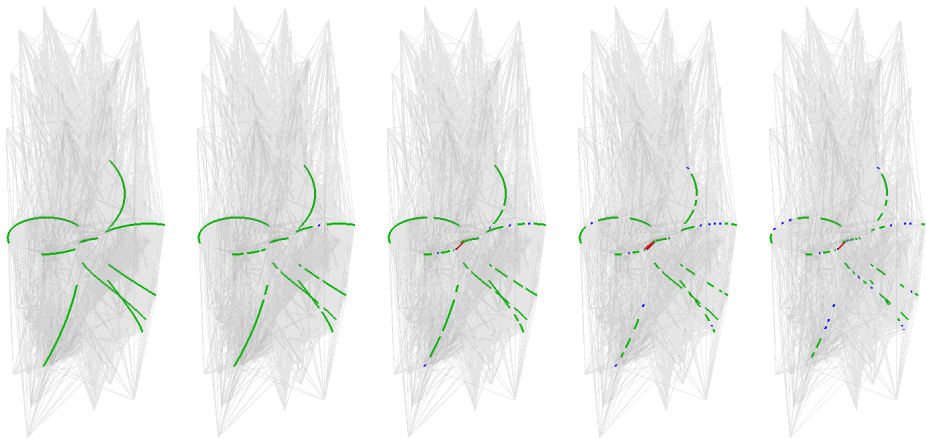
Неактивные трековые сегменты (false negative)

# Результаты - распределение оценки



(a) 100 шумовых хитов (b) 1750 шумовых хитов, приоритет минимизация количества ложных сегментов (c) 1750 шумовых хитов, приоритет оценка метрики TrackML

# Влияние эффективности детекторов на трекинг



Результат трекинга для разной эффективности детектора (слева): 1.0,0.95,0.9,0.8,0.7.  
(100 шумовых хитов)

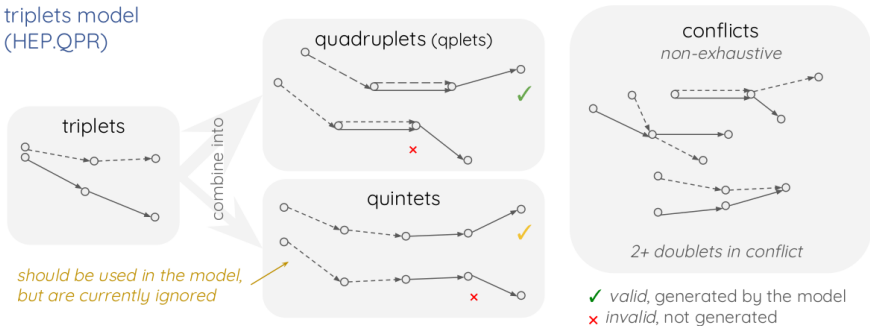
# Улучшение алгоритма - триплеты

Используя возможности QUBO, можно перейти от дублетов к триплетам и отсеивать ненужные элементы:

## doublets model (Stimpfl)

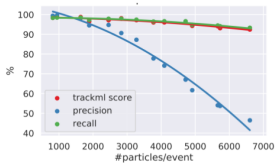


## triplets model (HEP.QPR)

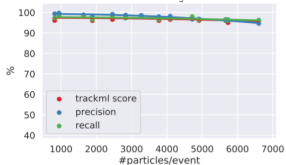


Lucy Linder. *Using a Quantum Annealer for particle tracking at LHC.* 2019

# Улучшение алгоритма - триплеты

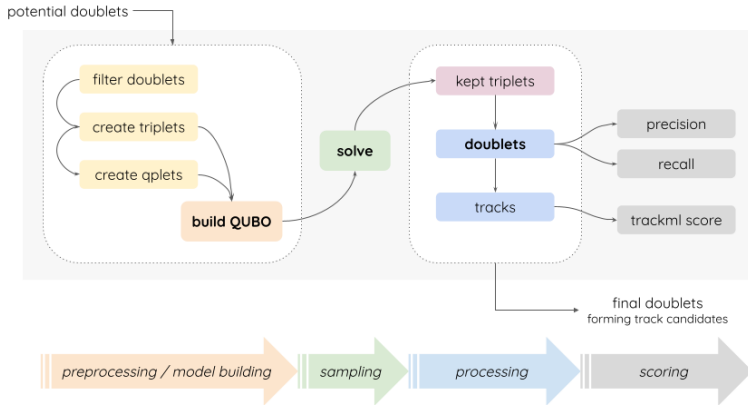


QallseMp (initial model)



QallseD0 (improved model)

Lucy Linder. *Using a Quantum Annealer for particle tracking at LHC. 2019*

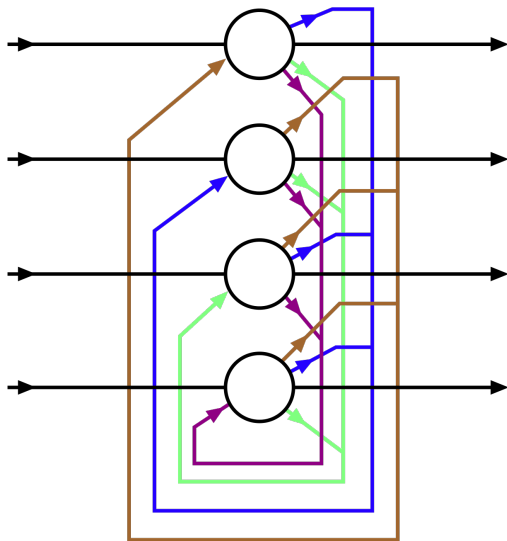


# Выводы и перспективы

- Попытка применения разных модификаций алгоритма к симуляции данных SPD с присутствием фейков.
- Начато исследование *влияния эффективности детекторов* на результат трекинга.
- Метод показал хорошие результаты, но в достаточно простых условиях. Шумовые хиты создают заметные сложности для трекинга разными методами. Нужно изучить влияние событий, где фейковые хиты генерируются более правильно с точки зрения геометрии установки.
- Необходимо добавить фильтрацию сегментов, которая возможно уменьшит влияние шумовых хитов, а также позволит протестировать метод на данных соревнования TrackML и сравнить результаты.
- С помощью модели **QUBO** можно ввести в сеть Хопфилда **прослеживание с использованием триплетов и квадруплетов (и квинтетов)** - ожидается резкое сокращение количества ложных треков.



Спасибо за внимание!

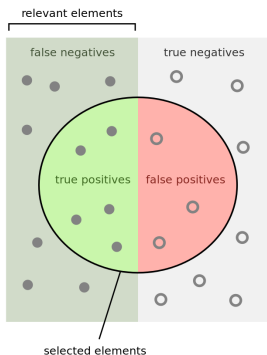


# Выводы и перспективы

- Применение (модифицированного) подхода к данным MPD.
- Начат проект по включению триплетов, квадруплетов, квинтетов в модель QUBO (ветка проекта HEPQPR.Qallse, на HybriLIT установлены библиотеки qbsolve, neal для QUBO).
- Применение алгоритма QAOA, оценка скорости вычислений на гейтовой модели.
- Применение алгоритма NNL пока неактуально (большая глубина алгоритма для современных квантовых компьютеров).
- По мере совершенствования технологии квантового отжига (D-Wave), в будущем можно будет выработать стандартизированные тесты для сравнения с классическими алгоритмами, что позволит оценить целесообразность использования квантового оборудования в экспериментах ФВЭ.

# Как оценивать результаты трекинга?

- TP (True Positives) - количество сегментов, верно определённых моделью как реальные;
- TN (True Negatives) - количество сегментов, верно определённых моделью как ложные;
- FP (False Positives) - количество сегментов, неверно определённых моделью как реальные;
- FN (False Negatives) количество сегментов, неверно определённых моделью как ложные;
- $D^* := TP+FN$  - количество всех реальных сегментов (известных из симуляции Монте-Карло, или датасета, как TrackML)
- $D := TP+FP$  - количество всех сегментов, которые модель реконструировала (множество треков, отобранных алгоритмом)



## purity/precision:

Сколько отобранных элементов являются релевантными?

$$p = \frac{|D \cap D^*|}{|D|} = \frac{TP}{TP + FP}$$

## efficiency/recall:

Сколько релевантных элементов отбирается?

$$r = \frac{|D \cap D^*|}{|D^*|} = \frac{TP}{TP + FN}$$

Lucy Linder. *Using a Quantum Annealer for particle tracking at LHC*. 2019

# TrackML Particle Tracking Challenge

- **Цель соревнования:** создать метод на основе машинного обучения, который быстро восстанавливает треки частиц по трехмерным точкам, оставленным в кремниевых детекторах.
- **датасет TrackML:** симулирует реальные эксперименты при высокой светимости
- **Метрика для оценки:** частичное совпадение реконструированных треков с истинными, нормированное на единицу для каждого события, и усредненное по событиям тестового набора.

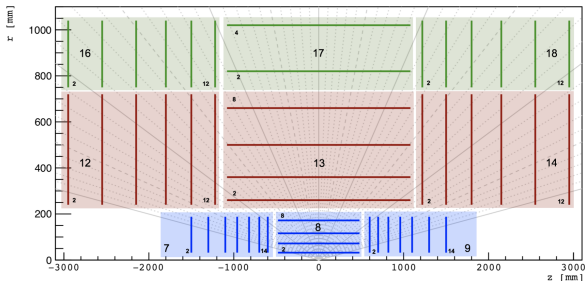
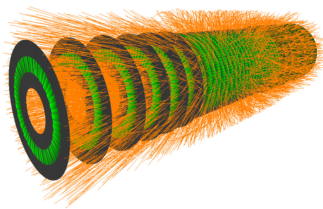
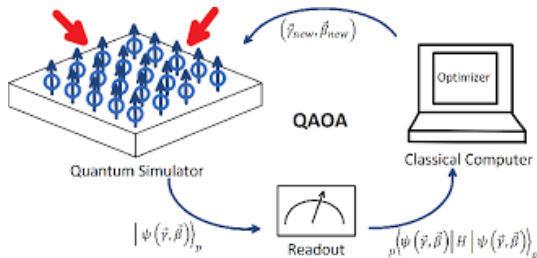


Рис.: Схема детектора TML - симуляция типичного кремниевого детектора БАК.  
(Kaggle. TrackML Particle Tracking Challenge.)

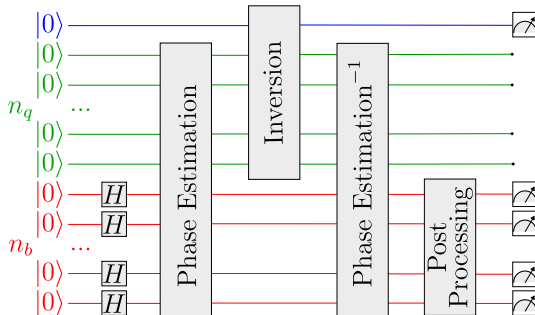
# Алгоритм QAOA для трекинга (квантовые гейты)

- Задача QUBO может быть отображена на гамильтониан Изинга и решена с помощью вариационного квантового алгоритма (VQE) или алгоритма квантовой приближенной оптимизации (QAOA, Quantum approximate optimization algorithm) : универсальные квантовые компьютеры (gate-based).
- A. Crippa et al., arXiv:2304.01690, L.Funcke et al., arXiv:2202.06874



# Алгоритм ННЛ для трекинга

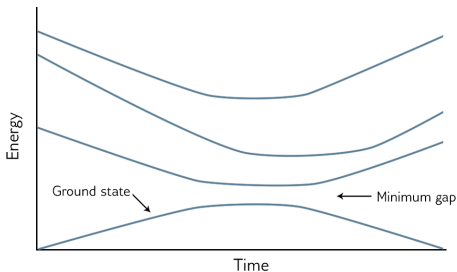
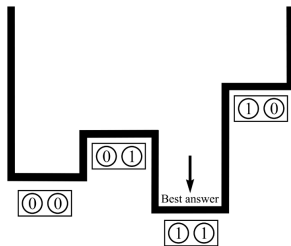
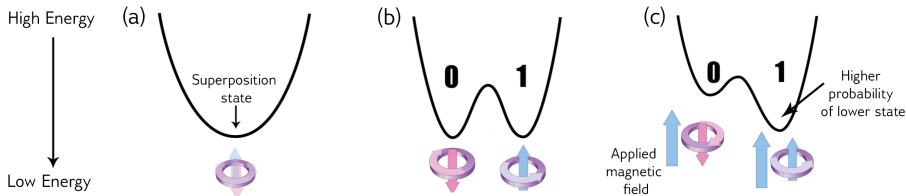
- В недавней работе<sup>2</sup> был представлен подход к использованию классической сети Хопфилда с добавлением алгоритма ННЛ, с **прямым применением к поиску треков**. Использовались данные детектора LHCb.
- Оптимизация сети Хопфилда превращается в задачу матричной инверсии и решается с помощью алгоритма ННЛ (Narrow-Hassidim-Lloyd - квантовый алгоритм для линейных алгебраических уравнений).



<sup>2</sup>Davide Nicotra и др. *A quantum algorithm for track reconstruction in the LHCb vertex detector*. 2023

# Квантовый отжиг

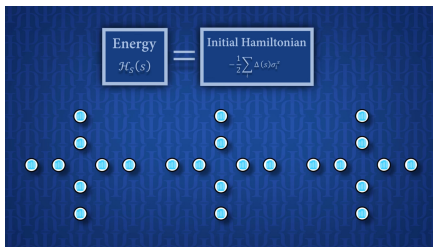
Метод нахождения глобального минимума некоторой заданной функции.



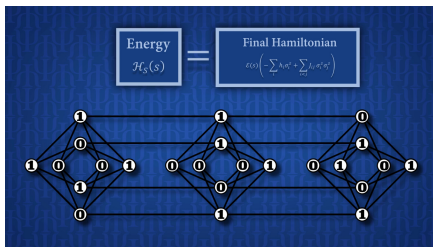
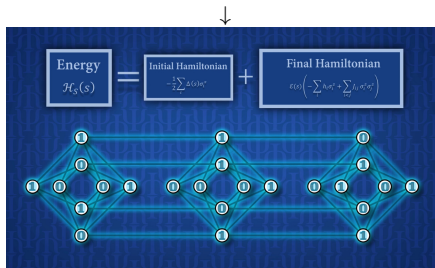
(Источник: <https://docs.dwavesys.com/>)

Поиск минимума  $\sim 20\mu s$ , однако много запусков, время чтения и записи.

# Квантовый отжиг



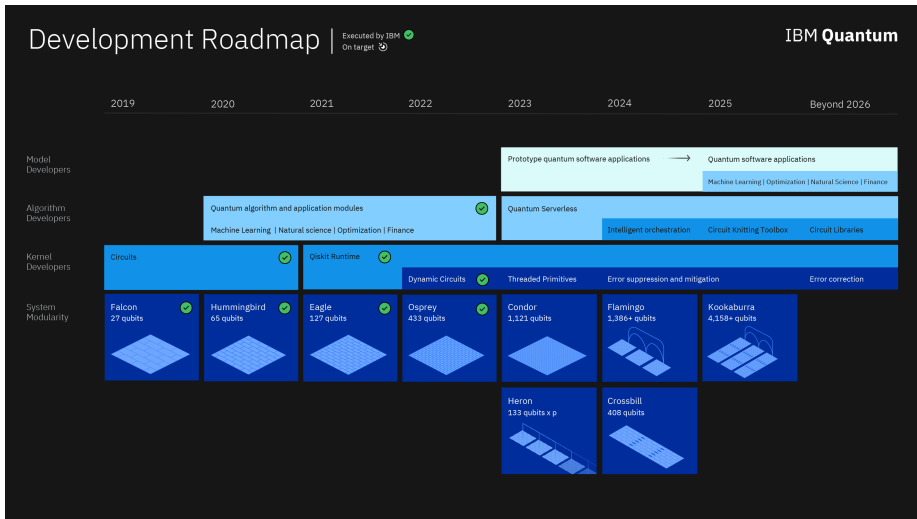
Переход от изначального Гамильтониана (квантовое состояние) к конечному (классическое состояние).



(Источник: <https://docs.dwavesys.com/>)



# Универсальный квантовый компьютер



# Универсальный/Адиабатический квантовый компьютер



## Универсальный квантовый компьютер

управляет квантовым состоянием  
(унитарные квантовые операции,  
измерения)  
общее назначение

компьютер	кубиты
IBM Q System One (2019)	20
IBM Osprey (2022)	433



## Адиабатический квантовый компьютер

естественная эволюция квантового состояния  
(нет контроля в процессе)  
проблемы оптимизации

компьютер D-Wave	кубиты	связи
2000Q (2017)	2000	6000
Advantage (2020)	5000	35000

# Решение задачи коммивояжёра нейронной сетью Хопфилда

- Хопфилд и Тэнк рассмотрели классический пример NP-полной проблемы — задачу коммивояжера.

John Hopfield и D Tank. «Neural Computation of Decisions in Optimization Problems». В: *Biological cybernetics* 52 (февр. 1985), с. 141—52

- Применения этой модели к TSP заключается в том, чтобы правильно определить веса связей  $w_{ij}$  и смещение  $b_i$  так, чтобы локальные минимумы  $E$  соответствовали хорошим решениям TSP.

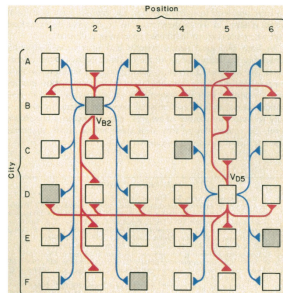
А. А. Ежов, А. С. Черепноев, "Дообучение нейронной сети Хопфилда: поиск глобального минимума функционала и модель быстрого сна Матем. моделирование, 21:5 (2009), 10–20.

# Отображение задачи коммивояжёра модель Хопфилда-Танка<sup>3</sup>

- 1 Выбираем такую репрезентацию, которая позволяет из уровней активации нейронов извлечь решение задачи. Возьмём матрицу  $N \times N$ , где:  
строка - определяет город  
столбец - определяет позицию в туре
- 2 Строим функцию энергии, минимум которой соответствует наилучшему решению задачи:

$$E = \frac{A}{2} \sum_X \sum_i \sum_{j \neq i} v_{X,i} v_{X,j} + \frac{B}{2} \sum_i \sum_X \sum_{Y \neq X} v_{X,i} v_{Y,i}$$
$$+ \frac{C}{2} \left[ \left( \sum_X \sum_i v_{X,i} \right) - N \right]^2 + \frac{D}{2} \sum_X \sum_{Y \neq X} \sum_i d_{XY} v_{X,i} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1}), \quad A, B, C, D > 0.$$

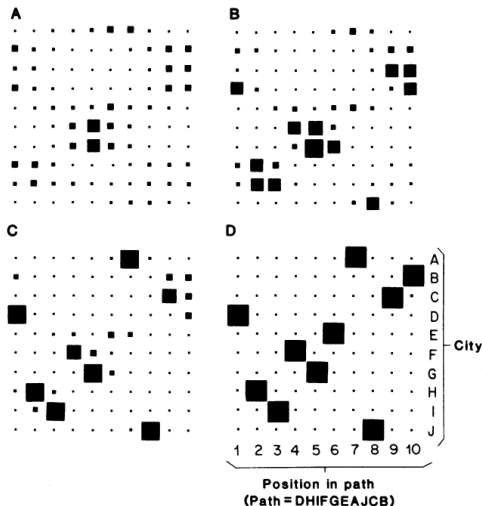
- 3 Выводим связность сети из функции энергии.
- 4 Устанавливаем начальные уровни активации нейронов.



<sup>3</sup> John Hopfield и D Tank. «Neural Computation of Decisions in Optimization Problems». В: *Biological cybernetics* 52 (февр. 1985), с. 141–52.

# Решение задачи коммивояжёра нейронной сетью Хопфилда

Эволюция сети для задачи коммивояжёра с десятью городами:<sup>4</sup>



<sup>4</sup> John Hopfield и D Tank. «Neural Computation of Decisions in Optimization Problems». В: *Biological cybernetics* 52 (февр. 1985), с. 141–52.