

Введение в теорию интегрируемых систем II.

А. П. Исаев¹

¹Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова,
ОИЯИ, Дубна

*Advanced Methods of Modern Theoretical Physics:
Integrable and Stochastic Systems*

21-26 July 2024

1. Уравнение синус-Гордон и интегрируемые модели на решетке.
 - 1. Формулировка модели синус-Гордон
 - 2. Односолитонное решение ур. синус-Гордон
 - 3. Пара Лакса для уравн. синус-Гордон. N -солитонные решения
 - 4. Преобразования Бэклунда и солитоны для системы синус-Гордон
 - 5. Двухсолитонные решения для уравнения синус-Гордон.
 - 6. Бризеры.
 - 7. Представление нулевой кривизны для обобщенных ИМ.
 - 8. Матрица перехода (монодромии) и интегралы движения.
 - 9. Представление нулевой кривизны на решетке
 - 10. Цепочка Тоды как интегрируемая модель на решетке

Формулировка модели

Рассмотрим теорию поля $u(t, x)$ в пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,1}$, которая описывается нелинейным уравнением Клейна-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = -\partial_u V(u) . \quad (1)$$

Эти уравнения получаются из условия стационарности $\delta S = 0$ действия

$$S = \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2) - V(u) \right) , \quad u_t \equiv \partial_t u , \quad u_x \equiv \partial_x u , \quad (2)$$

и граничными условиями, при которых производные поля убывают на бесконечности $u_x(t, \pm\infty) = 0$. Действие (2) получается из действия, записанного в гамильтоновых переменных

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \int dt \int_{-\infty}^{\infty} (\pi u_t - \mathcal{H}(u, \pi)) dx , \quad (3)$$

где $\pi(t, x)$ – плотность импульса, канонически сопряженная полю $u(t, x)$, а гамильтониан в (3) имеет вид

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(\pi^2 + u_x^2) + V(u) \right) dx . \quad (4)$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ конечность энергии требует $V = \frac{\lambda^2}{4}(u^2 - M^2)^2 \rightarrow 0$, т.е. $u \rightarrow \pm M$. В силу таких гран. условий в системе имеется нетривиальный топологический заряд

$$Q = \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x u(t, x) = \frac{1}{2M} (u(t, \infty) - u(t, -\infty)). \quad (7)$$

Заряд Q сохраняется $\partial_t Q = 0$, так как гран. условия не зависят от времени $\partial_t u(t, \pm\infty) = 0$ и может принимать 3 значения $Q = \{-1, 0, +1\}$:

$$u(t, +\infty) = +M, \quad u(t, -\infty) = -M \Rightarrow Q = +1 \quad (\text{кинк})$$

$$u(t, +\infty) = -M, \quad u(t, -\infty) = +M \Rightarrow Q = -1 \quad (\text{антикинк}).$$

Название кинк происходит от английского слова "kink" – изгиб, петля.

- Для двумерной модели $u_{tt} - u_{xx} = -V'(u)$ с потенциалом $V = \frac{\lambda^2}{4}(u^2 - M^2)^2$ имеется явное топ. решение (солитон-кинк)

$$u(x, t; v) = M \operatorname{th} \left(\frac{\lambda M (x - vt - x_0)}{\sqrt{2} \sqrt{1 - v^2}} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t; v) = \pm M, \quad (8)$$

где v – скорость движения кинка и x_0 – начальное положение кинка.

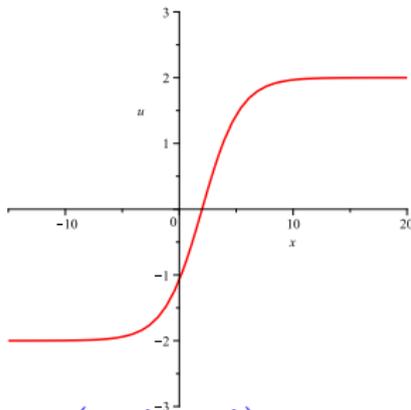


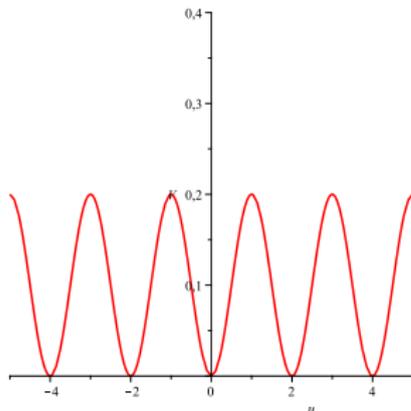
Рис. : График функции $u = 2 \operatorname{th}(0.3(x - 2))$, соответствующей (8) при $M = 2$, $\frac{\lambda}{\sqrt{2(1-v^2)}} = 0.15$, $t = 0$ и $x_0 = 2$.

Заметим, что симметрия $u \rightarrow -u$ для рассматриваемой системы дает $Q \rightarrow -Q$ и переводит кинк в антикинк и наоборот.

Пример 2. В 1958 году Т.Скирм предложил модель с периодическим потенциалом (модель "синус-Гордон") $V(u) = \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta u))$.

График функции $V = \frac{1}{10}(1 - \cos(\pi u))$.

Минимумы расположены в точках $u = 2n$.



В случае потенциала $V(u) = \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta u))$ число вакуумов (минимумов потенциала) бесконечно

$$u = \frac{2\pi}{\beta} n, \quad (9)$$

то есть вакуум вырожден бесконечно. Гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \int \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta u)) \right) dx. \quad (10)$$

А для Лагранжиана имеем выражение $\mathcal{L} = \int (\pi \partial_t u - \mathcal{H}) dx$, которое с учетом уравнения движения $\pi = \partial_t u$ дает

$$\mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 - \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta u)) \right) dx. \quad (11)$$

При малых u мы имеем разложение $\cos(\beta u) = 1 - (\beta u)^2/2 + (\beta u)^4/4! - \dots$, подставляя которое в (11), получаем, что m играет роль массы возмущений поля u , а $\lambda := \beta^2 m^2$ – роль константы связи.

Вариация $\delta \mathcal{S} / \delta u = 0$ действия $\mathcal{S} = \int dt \mathcal{L}$ дает уравнение, которое называется **уравнением синус-Гордон**:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \frac{m^2}{\beta} \sin(\beta u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu u + \frac{m^2}{\beta} \sin(\beta u) = 0 \quad (\mu = 0, 1). \quad (12)$$

Здесь мы использовали ковариантные обозначения $\partial_0 = \partial^0 = \partial_t$ и $\partial_1 = -\partial^1 = \partial_x$. Как и действие (11), это уравнение инвариантно относительно двух преобразований 1.) $u \rightarrow -u$ и 2.) $\beta \rightarrow -\beta$. Из последней инвариантности следует, что достаточно ограничиться выбором $\beta > 0$.

Напомним, что уравнение синус-Гордон

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \frac{m^2}{\beta} \sin(\beta u) = 0 ,$$

имеет константные решения $u = \frac{2\pi}{\beta} n$ с минимальной энергией $\mathcal{H} = 0$, которые называются вакуумами. В силу наличия нетривиальных вакуумов возможны решения уравнения синус-Гордон с нетривиальными граничными условиями $u(t, x) = 2\pi n_{\pm} / \beta \neq 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. С такими решениями ассоциируется нетривиальный сохраняющийся топ. заряд

$$Q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x u(t, x) = \frac{\beta}{2\pi} (u(t, \infty) - u(t, -\infty)) = n_+ - n_- , \quad (13)$$

где n_{\pm} – целые числа. Соответствующий сохраняющийся ток имеет вид $J^{\mu} = \frac{\beta}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} u$ ($\mu, \nu = 0, 1$). Заряд Q – топологический, так как он не зависит от формы $u(t, x)$ внутри интервала $x \in [-\infty, \infty]$ и он сохраняется $\partial_t Q = 0$, так как граничные условия не зависят от времени $\partial_t u(t, \pm\infty) = 0$.

Зафиксируем параметры $m = \beta = 1$, делая масштабное преобразования поля $u \rightarrow u/\beta$ и координат $(x, t) \rightarrow (x/m, t/m)$. В этом случае уравнение синус-Гордон записывается в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0, \quad (14)$$

и обладает указанными выше тополог. решениями с конечной энергией, определяемой интегралом

$$\mathcal{H} = \int \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + (1 - \cos(u)) \right) dx.$$

Можно проверить, что таким решением, удовлетворяющим условиям (5), является (оно также получается решением стац. уравнения)

$$u(x, t) = 4 \arctan(e^{\gamma(x-vt)+\delta}), \quad \gamma^2 = \frac{1}{1-v^2} \quad (15)$$

где v и δ – свободные параметры.

Напомним, что функция \arctan лежит в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а в данном случае, так как $e^z \in (0, \infty)$, мы имеем $\arctan(e^z) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Действительно имеем формулы

$$\arctan'(\omega) = \frac{\omega'}{(1 + \omega^2)}, \quad \sin(4\psi) = 4 \frac{(1 - \tan^2(\psi)) \tan(\psi)}{(1 + \tan^2(\psi))^2},$$

тогда для функции u из (15) получаем

$$u_x(x, t) = \frac{2\gamma}{\cosh(\gamma(x - vt) + \delta)} = -\frac{1}{v} u_t(x, t), \quad u_{xx} = -\frac{2\gamma^2 \sinh(\phi(x, t))}{\cosh^2(\phi(x, t))}, \quad (16)$$

$$u_{tt} = -v^2 \frac{2\gamma^2 \sinh(\phi(x, t))}{\cosh^2(\phi(x, t))}, \quad \sin(u) = \frac{-2 \sinh(\phi(x, t))}{\cosh(\phi(x, t))}, \quad (17)$$

где $\phi(x, t) = (\gamma(x - vt) + \delta)$. Подставляя (16), (17) в уравнение синус-Гордон, мы убеждаемся, что при $\gamma^2(1 - v^2) = 1$ это уравнение выполняется.

Решение (15) при положительном γ называется (как и в предыдущем примере) **кинком** и описывает перескок поля из одного стационарного состояния $u|_{x=-\infty} = 0$ в другое стационарное состояние $u|_{x=\infty} = 2\pi$. При отрицательном γ решение (15) описывает перескок поля из состояния $u = 2\pi$ в состояние $u = 0$ и называется **антикинком**. По определению топологический заряд (13) для кинка имеет значение $Q = +1$, а для антикинка $Q = -1$. Заметим, что симметрия $u \rightarrow -u$ уравнения (14) дает $Q \rightarrow -Q$ и переводит решение для кинка в решение для антикинка и наоборот.

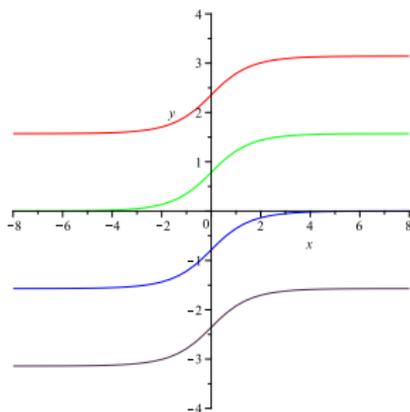


Рис. : Графики функций $\arctan(e^x) + \pi/2$, $\arctan(e^x)$, $\arctan(e^x) - \pi/2$, $\arctan(e^x) - \pi$, соответственно (сверху вниз), красный, зеленый, синий и фиолетовый.

Сделаем замену координат

$$x = \xi + \tau, \quad t = \tau - \xi \quad \Rightarrow \quad \partial_\tau = \partial_t + \partial_x, \quad \partial_\xi = \partial_x - \partial_t \quad \Rightarrow \quad \partial_\xi \partial_\tau = \partial_x^2 - \partial_t^2,$$

(обратная замена: $\xi = (x - t)/2$, $\tau = (t + x)/2$) и перепишем уравнение синус-Гордон (14) в виде

$$u_{\xi\tau} = \sin(u). \quad (18)$$

Введем в рассмотрение два оператора

$$L = \partial_\xi - \begin{pmatrix} i\lambda & iu_\xi/2 \\ iu_\xi/2 & -i\lambda \end{pmatrix} = \partial_\xi - i\lambda\sigma_3 - \frac{iu_\xi}{2}\sigma_1, \quad (19)$$

$$A = \partial_\tau + \frac{i}{4\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix} = \partial_\tau + \frac{i}{4\lambda} (\sigma_3 \cos u + \sigma_2 \sin u). \quad (20)$$

Для этих операторов получаем

$$\begin{aligned} [A, L] &= [\partial_\tau + \frac{i}{4\lambda} (\sigma_3 \cos u + \sigma_2 \sin u), \partial_\xi - i\lambda\sigma_3 - \frac{iu_\xi}{2}\sigma_1] = \\ &= -\frac{iu_{\xi\tau}}{2}\sigma_1 + \frac{1}{8\lambda} \cos u u_\xi [\sigma_3, \sigma_1] + \frac{i}{4\lambda} \sigma_3 (u_\xi \sin u) - \frac{i}{4\lambda} \sigma_2 (u_\xi \cos u) + \\ &+ \frac{1}{2} \sin u [\sigma_2, \sigma_3] + \frac{1}{8\lambda} (u_\xi \sin u) [\sigma_2, \sigma_1] = \frac{i}{2} \sigma_1 (-u_{\xi\tau} + \sin u). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, уравнение синус-Гордон (18) эквивалентно условию $[A, L] = 0$.

Уравнение движения для модели Синус-Гордон (12) можно записать в виде условия нулевой кривизны

$$[\partial_t - M(x, t; \lambda), \partial_x + U(x, t; \lambda)] = 0 \Leftrightarrow \partial_t U + \partial_x M - [M, U] = 0, \quad (22)$$

с дифференциальными операторами в стандартных координатах x, t пространства-времени

$$A = \partial_t - M, \quad L = \partial_x + U. \quad (23)$$

$$U(x, t, \lambda) = i \left(\frac{\beta}{4} \hat{\pi} \sigma_3 + k_0 \sin \frac{\beta u}{2} \sigma_1 + k_1 \cos \frac{\beta u}{2} \sigma_2 \right) \equiv U_1, \quad (24)$$

$$M(x, t, \lambda) = \frac{1}{i} \left(\frac{\beta}{4} \partial_x u \sigma_3 + k_1 \sin \frac{\beta u}{2} \sigma_1 + k_0 \cos \frac{\beta u}{2} \sigma_2 \right) \equiv -U_0, \quad (25)$$

$$L_\alpha := \partial_\alpha + U_\alpha, \quad U_\alpha = i \left(\frac{\beta}{4} \epsilon_{\alpha\kappa} \partial^\kappa u \sigma_3 + \epsilon_{\alpha\kappa} k^\kappa \sin \frac{\beta u}{2} \sigma_1 + \kappa_\alpha \cos \frac{\beta u}{2} \sigma_2 \right),$$

где σ_i – матрицы Паули, $\epsilon_{01} = -1$, $\hat{\pi} = \partial_t u$ – плотность импульса и вместо спектрального параметра λ мы вводим компоненты 2-вектора (на массовой поверхности)

$$k_0 \equiv k_0^{(\lambda)} = \frac{m}{4} (\lambda + 1/\lambda), \quad k_1 \equiv k_1^{(\lambda)} = \frac{m}{4} (\lambda - 1/\lambda) \Rightarrow k_0^2 - k_1^2 = \frac{m^2}{4}. \quad (26)$$

Для построения N -солитонного решения уравнения синус-Гордон введем $N \times N$ матрицу

$$A(\xi, \tau) = \|A_{kj}(\xi, \tau)\| = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j\xi - i\lambda_j^{-1}\tau\right), \quad r, j = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Тогда N -солитонное решение уравнения синус-Гордон (18) записывается в виде

$$u(\xi, \tau) = -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{\det(I_N + A(\xi, \tau))}{\det(I_N - A(\xi, \tau))} \right). \quad (28)$$

Легко показать, что это решение для $N = 1$ переходит в (15), которое в координатах светового конуса принимает вид

$$w(\xi, \tau) = \pm 4 \arctan e^{\lambda(\xi - \xi_0) + \frac{1}{\lambda}(\tau - \tau_0)}, \quad (29)$$

где ξ_0, τ_0 – константы и $\gamma = \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})$, $v\gamma = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{\lambda})$. Решение (36) можно записать в виде (сравните с (28) при $N = 1$)

$$w = -2i \ln \frac{1 + ie^\theta}{1 - ie^\theta}, \quad \theta = \lambda(\xi - \xi_0) + \frac{1}{\lambda}(\tau - \tau_0),$$

после чего воспользоваться тождествами

$$\frac{e^{iw/4} - e^{-iw/4}}{e^{iw/4} + e^{-iw/4}} = ie^\theta \Rightarrow e^{iw/2} = \frac{1 + ie^\theta}{1 - ie^\theta}.$$

Докажем, что система двух уравнений

$$\frac{1}{2}(u_\xi - w_\xi) = -\lambda \sin \frac{(u+w)}{2}, \quad (30)$$

$$\frac{1}{2}(u_\tau + w_\tau) = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{(u-w)}{2}, \quad (31)$$

с произвольным параметром λ , может рассматриваться как (авто)преобразование Бэклунда для уравнения синус-Гордон (18). То есть, если поля $u(\xi, \tau)$ и $w(\xi, \tau)$ удовлетворяет системе уравнений (30) и (31), то эти поля будут удовлетворять уравнению синус-Гордон (18). Для того, чтобы убедиться в этом продифференцируем (30) по τ , а (31) – по ξ и затем соответственно учтем (31) и (30)

$$\frac{1}{2}(u_{\xi\tau} - w_{\xi\tau}) = -\lambda \frac{(u_\tau + w_\tau)}{2} \cos \frac{(u+w)}{2} = \sin \frac{(u-w)}{2} \cos \frac{(u+w)}{2},$$

$$\frac{1}{2}(u_{\xi\tau} + w_{\xi\tau}) = -\frac{1}{\lambda} \frac{(u_\xi - w_\xi)}{2} \cos \frac{(u-w)}{2} = \sin \frac{(u+w)}{2} \cos \frac{(u-w)}{2}.$$

Сложим эти уравнения, а потом вычтем первое уравнение из второго и применим формулу $s(\alpha - \beta) = s(\alpha)c(\beta) - s(\beta)c(\alpha)$ (здесь мы использовали краткие обозначения $s = \sin$ и $c = \cos$), в результате получаем требуемый результат: $u_{\xi\tau} = \sin u$ и $w_{\xi\tau} = \sin w$. Обратное утверждение не очевидно.

Построим с помощью (30), (31) одно- и двух-солитонные решения. Стартуем как обычно с тривиального решения $u = 0$, тогда (30) и (31) записывается в виде

$$\mathbf{w}_\xi = \lambda \sin \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}_\tau = \frac{1}{\lambda} \sin \mathbf{w}, \quad (32)$$

где мы сделали замену $\mathbf{w} = w/2$. Решим первое уравнение: $\lambda d\xi = \frac{dw}{\sin w} \Rightarrow$

$$\lambda \xi + const = - \int \frac{d \cos w}{1 - \cos^2 w} =$$

$$\stackrel{c(w)=t}{=} \frac{1}{2} \int^{\cos w} dt \left(\frac{-1}{1-t} + \frac{-1}{1+t} \right) = \frac{1}{2} (\ln(1-t) - \ln(1+t)) \Big|_{t=c(w)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-c(w)}{1+c(w)}, \quad (33)$$

где $c(w) = \cos w$. Берем экспоненту от левой и правой части (33)

$$e^{2\lambda(\xi - c_\tau)} = \frac{1-c(w)}{1+c(w)} = \tan^2 \frac{w}{2} \Rightarrow \tan \frac{w}{2} = \pm e^{\lambda(\xi - c_\tau)} \Rightarrow \quad (34)$$

$$\frac{w}{2} = \frac{w}{4} = \arctan(\pm e^{\lambda(\xi - c_\tau)}).$$

Здесь константа интегрирования c_τ зависит от τ и выбирается так, чтобы выполнялось второе уравнение в (32):

$$\frac{w}{2} = \frac{w}{4} = \arctan(\pm e^{\frac{1}{\lambda}(\tau - c_\xi)}), \quad (35)$$

где c_ξ – константа интегрирования, которая является функцией от ξ .

Из сравнения (34) и (35), фиксируя в этих решениях для определенности знак + (или знак -), следует, что $\lambda(\xi - c_\tau) = \frac{1}{\lambda}(\tau - c_\xi)$, то есть

$$\lambda\xi + \frac{c_\xi}{\lambda} = \lambda c_\tau + \frac{\tau}{\lambda} \equiv c_0 \Rightarrow -\lambda c_\tau = \frac{\tau}{\lambda} - c_0, \quad -\frac{c_\xi}{\lambda} = \lambda\xi - c_0$$

где c_0 не зависит от ξ и τ . Окончательно, исключая c_τ , c_ξ и полагая $c_0 = \lambda\xi_0 + \tau_0/\lambda$, мы получаем решения

$$w(\xi, \tau) = \pm 4 \arctan e^{\lambda(\xi - \xi_0) + \frac{1}{\lambda}(\tau - \tau_0)}, \quad (36)$$

где ξ_0, τ_0 – константы.

Покажем, что решение (36) (со знаком +); выбор знака (-) мы обсудим ниже) совпадает с одно-солитонным решением (15). Для этого сделаем в (36) обратную замену координат $\tau \rightarrow (t + x)/2$ и $\xi \rightarrow (x - t)/2$:

$$w(x, t) = 4 \arctan e^{(\lambda + \frac{1}{\lambda})x/2 - (\lambda - \frac{1}{\lambda})t/2 + \delta}. \quad (37)$$

Полученная функция совпадает с $u(x, t) = 4 \arctan(e^{\gamma(x - vt) + \delta})$ ($\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}$) если положить

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad v\gamma = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}.$$

Форма функции (37), деленной на π , при выборе $2\gamma = (\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 1$ и $(\lambda - \frac{1}{\lambda})t/2 - \delta = -4$ дана на Рис.4

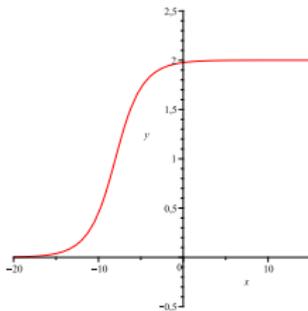


Рис. : 4. График функции $y = \frac{w}{\pi} = \frac{4}{\pi} \arctan(e^{x/2+4})$. Кинк ($\gamma > 0$).

и при $2\gamma = (\lambda + \frac{1}{\lambda}) = -1$ и $(\lambda - \frac{1}{\lambda})t/2 - \delta = 0$ дана на Рис.5

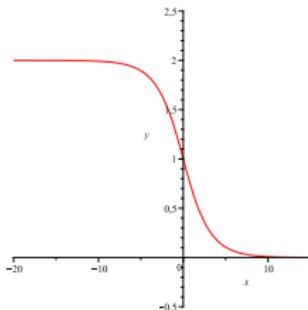


Рис. : 5. Функция $y = \frac{4}{\pi} \arctan(e^{-x/2})$. Антикинк ($\gamma < 0$; замена $\gamma \rightarrow -\gamma \leftrightarrow x \rightarrow -x$).

1. Двухсолитонное решение.

Заметим, что при выводе 1-солитонного решения с помощью преобразования Бэклунда, мы получили решение зависящее от λ . Применим преобразование Бэклунда несколько раз. Пусть на нулевом шаге как обычно $u = w_0 = 0$. Далее решение w_1 получается из $u = w_0 = 0$ при $\lambda = \lambda_1$, а решение w_2 получается из $u = w_0 = 0$ при $\lambda = \lambda_2$. После чего будем искать решение w_3 , которое получается из w_1 преобразованием Бэклунда с $\lambda = \lambda_2$, и это же решение w_3 получается из w_2 преобразованием с $\lambda = \lambda_1$.

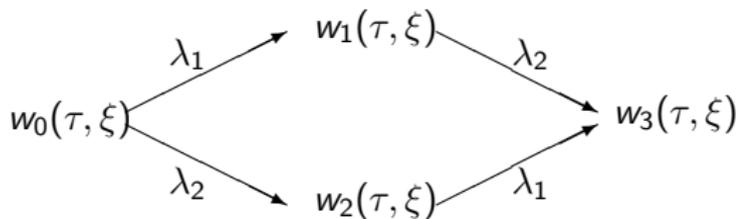


Рис. : 6. Построение двухсолитонного решения.

Требую коммутативность диаграммы на Рис.б, мы сводим задачу построения 2-солитонного решения уравнения синус-Гордона не к решению дифференциальных уравнений первого порядка, а к решению чисто алгебраической задачи. При этом мы будем использовать только первое уравнение (30) (можно использовать только второе уравнение (31)).

Действительно, дифференциальные уравнения (30) по ξ для решений w_1 и w_2 , возникающих на первом шаге при $w_0 = 0$, имеют вид (сравните с (32))

$$\left(\frac{w_1}{2}\right)_\xi = \lambda_1 \sin \frac{w_1}{2}, \quad \left(\frac{w_2}{2}\right)_\xi = \lambda_2 \sin \frac{w_2}{2}, \quad (38)$$

а дифференциальные уравнения (30) по ξ для следующего решения $w = w_3$ при выборе начальных решений $u = w_1$ и $u = w_2$ в соответствии с диаграммой Рис.б, записываются следующим образом

$$\left(\frac{w_3 - w_1}{2}\right)_\xi = \lambda_2 \sin \frac{w_3 + w_1}{2}, \quad \left(\frac{w_3 - w_2}{2}\right)_\xi = \lambda_1 \sin \frac{w_3 + w_2}{2}. \quad (39)$$

Подставляя производные w_1 и w_2 из (38) в (39), мы получаем¹

$$\begin{aligned} \left(\frac{w_3}{2}\right)_\xi &\stackrel{(39)(1)}{=} \lambda_1 \sin \frac{w_1}{2} + \lambda_2 \sin \frac{w_3 + w_1}{2}, \quad \left(\frac{w_3}{2}\right)_\xi \stackrel{(39)(2)}{=} \lambda_2 \sin \frac{w_2}{2} + \lambda_1 \sin \frac{w_3 + w_2}{2} \Rightarrow \\ &\lambda_1 \left(\sin \frac{w_1}{2} - \sin \frac{w_3 + w_2}{2} \right) = \lambda_2 \left(\sin \frac{w_2}{2} - \sin \frac{w_3 + w_1}{2} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

¹ Данное алгебраическое уравнение между решениями уравнения синус-Гордон иногда называют уравнением Бьянки.

Применяя стандартные тригонометрические формулы, мы переписываем (40) в виде

$$\lambda_1 \sin \frac{w_3 + w_2 - w_1}{4} = \lambda_2 \sin \frac{w_3 + w_1 - w_2}{4} \Rightarrow \quad (41)$$

$$\lambda_1 \left(s \frac{w_3}{4} c \frac{w_2 - w_1}{4} + c \frac{w_3}{4} s \frac{w_2 - w_1}{4} \right) = \lambda_2 \left(s \frac{w_3}{4} c \frac{w_1 - w_2}{4} + c \frac{w_3}{4} s \frac{w_1 - w_2}{4} \right) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) s \frac{w_3}{4} c \frac{w_2 - w_1}{4} = (\lambda_1 + \lambda_2) c \frac{w_3}{4} s \frac{w_1 - w_2}{4} \Rightarrow \tan \frac{w_3}{4} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tan \frac{w_1 - w_2}{4}, \quad (42)$$

где мы использовали краткие обозначения $s a \equiv \sin a$ и $c a \equiv \cos a$.

Подставляя в (42) явные формулы для 1-солитонных решений w_1 и w_2

$$w_j = 4 \arctan e^{\theta_j}, \quad \theta_j = \lambda_j \xi + \frac{1}{\lambda_j} \tau + \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad (43)$$

и учитывая

$$\tan \frac{w_1 - w_2}{4} = \tan(\arctan e^{\theta_1} - \arctan e^{\theta_2}) = \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} e^{\theta_2}},$$

где мы воспользовались тождеством $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, мы получаем из (42) двухсолитонное решение

$$u(\tau, \xi) \equiv w_3(\tau, \xi) = 4 \arctan \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} e^{\theta_2}} \right). \quad (44)$$

2. Рассеяние кинков.

Покажем, что решение (44), где θ_j определены в (43), описывает рассеяние кинка и антикинка. Перейдем в решении (44) от координат светового конуса τ, ξ к временной и пространственной координатам t, x : $\tau = \frac{1}{2}(t + x)$, $\xi = \frac{1}{2}(x - t)$. В результате получим решение (44)

$$u(\tau, \xi) = 4 \arctan \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} e^{\theta_2}} \right).$$

где вместо (43) мы имеем

$$\theta_j = \gamma_j(x - v_j t) + \delta_j, \quad \gamma_j = \frac{1}{2} \left(\lambda_j + \frac{1}{\lambda_j} \right), \quad v_j = \frac{\lambda_j - \frac{1}{\lambda_j}}{\lambda_j + \frac{1}{\lambda_j}}.$$

Так как поле $u(x, t)$ – вещественное, то аргумент функции \arctan в (44) должен быть также вещественным. Имеется два важных случая, когда аргумент функции \arctan в (44) оказывается вещественным. Первый случай, когда параметры λ_i и δ_i – вещественные, соответствует рассеянию (анти)кинков. Второй случай, когда λ_i и δ_i – комплексные, соответствует связанному состоянию кинка и антикинка (бризеру).

В вещественном случае для определенности будем считать, что $\gamma_j > 0$ (эквивалентно $\lambda_j > 0$) и $v_2 > v_1$, что эквивалентно $\lambda_2^2 > \lambda_1^2$. Отметим, что при $\gamma_j > 0$ для решения (44) мы имеем $u|_{x=\pm\infty} = 0$, т.е. для этого решения $Q = 0$ и этот случай описывает рассеяние кинка и антикинка.

Можно показать, что при условии $\lambda_i > 0$ 2-солитонное решение, имеющее топологический заряд $Q = 0$, описывает рассеяние кинка на антикинке, при этом антикинк со скоростью v_1 переходит в антикинк с той же скоростью v_1 и сдвигом по фазе $(-2\delta'_1)$, а кинк со скоростью $v_2 > v_1$ – в кинк с той же скоростью v_2 и сдвинутый по фазе $+2\delta'_1$

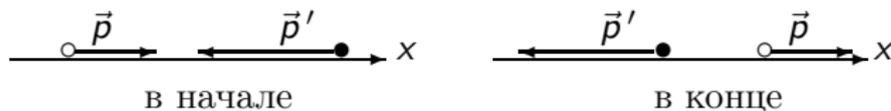


Рис. : Процесс рассеяния кинка (белый кружок) и антикинка (черный кружок) без перезарядки.

То есть решение (44) не описывает процесс перезарядки солитонов, который мог бы быть для решений с $Q = 0$. Более того известно, что не существует классического решения уравнения синус-Гордон, которое описывает рассеяние кинка на антикинке с перезарядкой, т.е. решения при котором кинк со скоростью v_2 переходит в антикинк с этой же скоростью, а антикинк со скоростью v_1 переходит в кинк с той же скоростью v_1 .

3. Бризеры.

Рассмотрим теперь второй случай, когда параметры λ_i и δ_i могут быть комплексными, но при этом двухсолитонное поле $u(x, t)$ в (44) остается вещественным. Воспользуемся тождеством

$$\frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} e^{\theta_2}} = \frac{e^{\theta_-} - e^{-\theta_-}}{e^{\theta_+} + e^{-\theta_+}}, \quad \theta_{\pm} = \frac{1}{2}(\theta_1 \pm \theta_2),$$

и перепишем двухсолитонное решение (44) в виде

$$u(\xi, \tau) = 4 \arctan \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{e^{\theta_-} - e^{-\theta_-}}{e^{\theta_+} + e^{-\theta_+}} \right). \quad (45)$$

где с учетом определений (43) для $\theta_j = \lambda_j \xi + \frac{1}{\lambda_j} \tau + \delta_j$, мы получаем

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2}(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm \lambda_2)\xi + \frac{1}{2}(\lambda_1^{-1} \pm \lambda_2^{-1})\tau + (\delta_1 \pm \delta_2). \quad (46)$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \lambda_1, \lambda_2$ – комплексные параметры, и рассмотрим решение (45) при следующих условиях

$$\delta_1 = \delta_2^* \equiv \delta, \quad \lambda_1 = \lambda_2^* \equiv \lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda).$$

Тогда

$$\theta_+ = \operatorname{Re}(\lambda)\xi + \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2}\tau + \operatorname{Re}(\delta), \quad \theta_- = i\left(\operatorname{Im}(\lambda)\xi - \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{|\lambda|^2}\tau + \operatorname{Im}(\delta)\right) \equiv i\bar{\theta}_-.$$

где $\theta_+, \bar{\theta}_- \in \mathbb{R}$. Поэтому 2-х солитонное решение – вещественное

$$u(\xi, \tau) = 4 \arctan \left(\frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{\operatorname{Im}(\lambda)} \frac{\sin(\bar{\theta}_-)}{\operatorname{ch}(\theta_+)} \right). \quad (47)$$

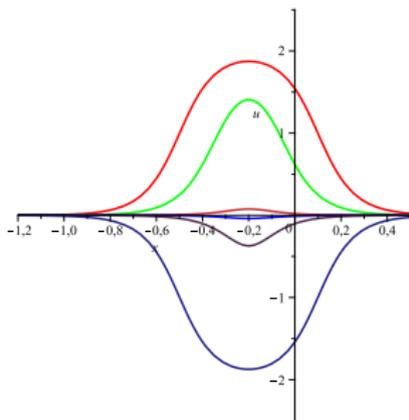


Рис. : На рисунке (сверху вниз) графики функций $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{10 \cdot \sin(t)}{\cosh(10x+2)}\right)$, соответствующие значениям $t = \pi/2, 0.2, 0.006, -0.003, -0.03, -\pi/2$. Данные графики демонстрируют профили неподвижного бризера (??), центр которого находится в точке $x = -0.2$.

Представление нулевой кривизны для рассмотренного класса систем

$$[\partial_t - M(x, t; \lambda), \partial_x + U(x, t; \lambda)] = 0 \Leftrightarrow \partial_t U + \partial_x M - [M, U] = 0, \quad (48)$$

где λ - спектральный параметр и M, U - квадратные $K \times K$ матрицы, действующие в векторном пространстве $\mathcal{V}_K \equiv \mathbb{C}^K$. Матрицу U будем называть матричным потенциалом. Равенство (48) является условием совместности для системы линейных дифференциальных уравнений

$$(\partial_t - M(x, t; \lambda))\psi(x, t; \lambda) = 0, \quad (\partial_x + U(x, t; \lambda))\psi(x, t; \lambda) = 0. \quad (49)$$

Обычно рассматривают два типа задач.

1) *Быстроубывающий случай*, когда при $x \rightarrow \pm\infty$ плотность энергии системы стремится к нулю, и при этом существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x, t; \lambda) = U_{\pm}(\lambda), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} M(x, t; \lambda) = M_{\pm}(\lambda), \quad (50)$$

Примером в этом случае является система синус-Гордон на бесконечном интервале (см. ниже).

2) *Квазипериодический случай с периодом $2L$* . В этом случае матрицы U и M удовлетворяют условиям

$$M(x + 2L, t; \lambda) = Q^{-1} M(x, t; \lambda) Q, \quad U(x + 2L, t; \lambda) = Q^{-1} U(x, t; \lambda) Q, \quad (51)$$

где Q - некоторая невырожденная константная $K \times K$ матрица, в общем 

Введем один из основных объектов метода – $K \times K$ матрицу перехода $T(x, x_0; \lambda)$ (transfer matrix)

$$(\partial_x + U(x, t; \lambda)) T(x, x_0; \lambda) = 0 \quad (x \geq x_0), \quad T(x, x; \lambda) = I_K, \quad (52)$$

которая из решения $\psi(x_0, t; \lambda)$ уравнения $(\partial_x + U(x, t; \lambda))\psi(x, t; \lambda) = 0$ в точке x_0 дает решение этого уравнения

$$\psi(x, t; \lambda) = T(x, x_0; \lambda) \psi(x_0, t; \lambda), \quad (53)$$

в любой другой точке $x \geq x_0$. В дополнение к (52) мы имеем

$$\partial_y T(x, y; \lambda) - T(x, y; \lambda) U(y, t; \lambda) = 0. \quad (54)$$

Пусть имеется промежуточная точка $z \in [y, x]$. Тогда матрицу перехода $T(x, y; \lambda)$ из точки y в x можно рассматривать как композицию матрицы перехода $T(z, y; \lambda)$ из точки y в z и матрицы перехода $T(x, z; \lambda)$ из точки z в x :

$$T(x, y; \lambda) = T(x, z; \lambda) \cdot T(z, y; \lambda) \quad (x \geq z \geq y). \quad (55)$$

Разобьем конечный интервал $[y, x]$ на N отрезков длины Δ так, что сохраняется произведение $N\Delta = (x - y)$, и далее устремим $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$.

Тогда в силу (55) для матрицы перехода (52), (54) мы имеем представление в виде предела

$$T(x, y; \lambda) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} T(x, x - \Delta; \lambda) T(x - \Delta, x - 2\Delta; \lambda) \cdots T(y + \Delta, y; \lambda), \quad (56)$$

где в правой части для всех факторов в пределе $\Delta \rightarrow 0$ согласно (??) мы имеем представление

$$T(x + \Delta, x; \lambda) = e^{-\Delta U(x, t; \lambda)}, \quad (57)$$

и следовательно матрица перехода (56) записывается в виде упорядоченной P -экспоненты

$$T(x, y; \lambda) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} T(x, x - \Delta; \lambda) \cdots T(y + \Delta, y; \lambda) = P \exp\left(\int_y^x dz U(z, t; \lambda)\right). \quad (58)$$

Утверждение. Для матрицы перехода $T(x, y; \lambda)$, которая определена в (52), справедливо уравнение

$$\partial_t T(x, y; \lambda) = M(x) T(x, y; \lambda) - T(x, y; \lambda) M(y). \quad (59)$$

В квазипериодическом случае (51) матрица перехода $T_x(\lambda) = T(2L + x, x; \lambda)$ на полный период $2L$ называется **матрицей монодромии**.

Компоненты матрицы монодромии $T(\lambda)$ интерпретируются как данные рассеяния. В терминах этих данных рассеяния динамические уравнения (48), как правило решаются гораздо проще, чем в терминах изначальных переменных. В частности, имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Для систем с квазипериодическими граничными условиями (51) след матрицы монодромии

$$\tau(\lambda) = \text{Tr}(T(2L + x, x; \lambda) \cdot Q) , \quad (60)$$

не зависит от x и t , то есть $\partial_x \tau(\lambda) = 0$ и $\partial_t \tau(\lambda) = 0$. Таким образом $\tau(\lambda)$ является производящей функцией для **интегралов движения** (для переменных типа действие).

Для квантования двумерных полевых систем их необходимо перенести на решетку. Далее мы будем рассматривать только квазипериодический случай и в качестве пространства x возьмем окружность с N узлами и интервалом $\Delta = 2L/N$ между узлами.

Вместо непрерывного набора матриц $M(t, x; \lambda)$ будем рассматривать дискретный набор матриц $M_n(t; \lambda) := M(x_n, t; \lambda)$, а вместо $U(x, t; \lambda)$ введем набор $L_n(t; \lambda)$ (связь между $U(x_n, t; \lambda)$ и $L_n(t; \lambda)$ будет дана ниже).

Утверждение. Аналогом условия нулевой кривизны (48) на решетке является следующее уравнение

$$\partial_t L_n(\lambda) = M_{n+1}(\lambda) \cdot L_n(\lambda) - L_n(\lambda) \cdot M_n(\lambda), \quad (61)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$, и на все $K \times K$ матрицы налагаются квазипериодические условия

$$L_{N+k}(\lambda) = Q^{-1} L_k(\lambda) Q, \quad M_{N+k}(\lambda) = Q^{-1} M_k(\lambda) Q, \quad \forall k. \quad (62)$$

Доказательство. Достаточно предъявить правило перехода к непрерывному пределу $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$, которое переводит (61) в (48). Будем осуществлять этот переход с помощью соотношений

$$L_n(\lambda) = I_K - \Delta U(x_n; \lambda) + \Delta^2 \dots, \quad M_n(\lambda) = M(x_n; \lambda), \quad (63)$$

где $2L = N \cdot \Delta$ и $x_n = n\Delta$, после чего рассмотрим в (61) предел $\Delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ такой, что произведение $N\Delta = 2L$ – фиксировано.

В результате в первом порядке по Δ соотношение (61) дает (для краткости мы опускаем зависимость от λ)

$$-\Delta \partial_t U(x_n) = \Delta \left(\frac{M(x_{n+1}) - M(x_n)}{\Delta} \right) + \Delta (U(x_n) \cdot M(x_n) - M(x_{n+1}) \cdot U(x_n)) + \Delta^2 \dots,$$

откуда в пределе $\Delta \rightarrow 0$ возникает условие нулевой кривизны (48). Условия (62) являются прямым следствием условий (51).

Решеточный аналог матрицы перехода (52), (55) имеет вид ($n \geq m$)

$$T(n, m; \lambda) = L_{n-1}(\lambda) L_{n-2}(\lambda) \cdots L_m(\lambda), \quad T(n, n; \lambda) = I, \quad (64)$$

где, как мы видим, $L_n(\lambda)$ выступает в роли матрицы перехода на один узел $T(n+1, n; \lambda)$ и называется L -оператором. Наконец производная по t с учетом (61) имеет вид

$$\partial_t T(n, m; \lambda) = \sum_{k=m}^{n-1} L_{n-1} \cdots \partial_t L_k \cdots L_m = M(x_n) T(n, m; \lambda) - T(n, m; \lambda) M(x_m), \quad (65)$$

что в пределе $\Delta \rightarrow 0$ эквивалентно (59).

Понятно, что решеточный аналог следа матрицы монодромии (60) задается следующим образом

$$\tau(\lambda) = \text{Tr}(T(m + N, m; \lambda) \cdot Q) . \quad (66)$$

Функция $\tau(\lambda)$ не зависит от m и является производящей функцией интегралов движения, то есть $\partial_t \tau(\lambda) = 0$, для решеточной системы с квазипериодическими граничными условиями (62).

Покажем, что цепочку Тоды можно рассматривать как интегрируемую модель на решетке, динамика которой определяется уравнением (61), где операторы $L_m(\lambda)$ и $M_n(\lambda)$ реализуются как матрицы 2×2 (то есть, $K = 2$). Введем операторы

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - p_n & e^{-x_n} \\ -e^{x_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-x_n} \\ e^{x_{n-1}} & \lambda \end{pmatrix} + aI_2, \quad (67)$$

где a – произвольная константа и I_2 – единичная 2×2 матрица. Тогда подстановка матриц (67) в (61) дает уравнения для открытой цепочки Тоды (с точностью до канонической замены $x_i \rightarrow 2x_i$, $p_i \rightarrow \frac{1}{2}p_i$) с учетом граничных условий $e^{-x_{N+1}} = 0 = e^{x_0}$.

Следует отметить, что уравнения (61) для операторов (67) справедливы и в квантовом случае, т.к. дают согласованные квантовые уравнения (квантовые аналоги уравнений $\dot{x}_n = p_n$) $\partial_\tau e^{x_n} = e^{x_n} p_n$, $\partial_\tau e^{-x_n} = -p_n e^{-x_n}$.

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} T(\lambda) &:= T(N+1, 1; \lambda) = L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) = \\ &= \lambda^N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^{N-1} \begin{pmatrix} -P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^{N-2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P^2 - H & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (68)$$

которое очевидно является полиномом N -ой степени от λ .

В формуле (68) коэффициенты разложения элемента $T_{11}(\lambda)$:

$$P = \sum_k p_k, \quad H = \frac{1}{2} \sum_k p_k^2 + \sum_{k=1}^{N=1} e^{x_k - x_{k+1}}, \dots \quad (69)$$

являются интегралами движения открытой цепочки Тоды. Действительно, из уравнений (61) следует равенство

$$\dot{T}_{11}(\lambda) = (M_{N+1}(\lambda)T(\lambda) - T(\lambda)M_1(\lambda))_{11} = -e^{-x_{N+1}} T_{21} - T_{12} e^{x_0} = 0,$$

где мы учли граничные условия. Отметим, что элемент T_{11} представляется в виде

$$T_{11} = \text{Tr}(T(\lambda)\bar{Q}), \quad \bar{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След матрицы монодромии

$$\tau(\lambda) = \text{Tr}(T(\lambda)Q) = \text{Tr}(L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda)Q),$$

оказывается производящей функцией интегралов движения для квазипериодической цепочки Тоды с условиями $M_{N+1} = Q^{-1}M_1Q$.

$$\{U_{b_1}^{a_1}(x; \lambda), U_{b_2}^{a_2}(y; \mu)\} = \delta(x - y) \left((r_{d_1 b_2}^{a_1 a_2}(\lambda, \mu) U_{b_1}^{d_1}(x, \lambda) - U_{d_1}^{a_1}(x, \lambda) r_{b_1 b_2}^{d_1 a_2}(\lambda, \mu)) + \right. \\ \left. + (r_{b_1 d_2}^{a_1 a_2}(\lambda, \mu) U_{b_2}^{d_2}(x, \mu) - U_{d_2}^{a_2}(x, \mu) r_{b_1 b_2}^{a_1 d_2}(\lambda, \mu)) \right), \quad (70)$$

где $r_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}(\lambda, \mu)$ – константная матрица, действующая в пространстве $\mathcal{V}_K^{\otimes 2}$. Матрица U для модели синус-Гордон имеют скобки Пуассона такого типа.

Утверждение. Если скобки Пуассона для элементов матрицы $U_b^a(x, t; \lambda)$ имеют вид (70), или в безиндексных обозначениях

$$\{U_1(x; \lambda), U_2(y; \mu)\} = \delta(x - y) [r_{12}(\lambda, \mu), U_1(x, \lambda) + U_2(x, \mu)], \quad (71)$$

то скобки Пуассона для элементов матрицы монодромии $T_b^a(x, y, t; \lambda)$ представляются следующим образом

$$\{T_1(x, y; \lambda), T_2(x, y; \mu)\} = [T_1(x, y; \lambda) \cdot T_2(x, y; \mu), r_{12}(\lambda, \mu)], \quad (72)$$

где 1, 2 – номера векторных пространств \mathcal{V}_K в произведении $\mathcal{V}_K \otimes \mathcal{V}_K$, в которых соответствующие матрицы действуют нетривиально, то есть

$$U_1(x; \lambda) \equiv U(x; \lambda) \otimes I_K, \quad U_2(x; \lambda) \equiv I_K \otimes U(x; \lambda),$$

$$T_1(x, y; \lambda) \cdot T_2(x, y; \mu) \equiv T(x, y; \lambda) \otimes T(x, y; \mu).$$

Утверждение. Если скобки Пуассона для элементов матриц $L_b^a(n; \lambda)$ имеют вид

$$\{L_1(k; \lambda), L_2(n; \mu)\} = \delta_{kn} [L_1(k; \lambda) \otimes L_2(n; \mu), r_{12}(\lambda, \mu)] , \quad (73)$$

(где индексы 1, 2 нумеруют векторные пространства в произведении $V_K \otimes V_K$) то скобки Пуассона для матрицы монодромии $T_b^a(n, m|\lambda)$ представляются следующим образом

$$\{T_1(n, m; \lambda), T_2(n, m; \mu)\} = [T_1(n, m; \lambda) \cdot T_2(n, m; \mu), r_{12}(\lambda, \mu)] . \quad (74)$$

$$[r_{12}(\lambda, \mu), r_{13}(\lambda, \nu) + r_{23}(\mu, \nu)] + [r_{13}(\lambda, \nu), r_{23}(\mu, \nu)] = 0 . \quad (75)$$

Если

$$[Q_1 \cdot Q_2, r_{12}(\lambda, \mu)] = 0 , \quad (76)$$

то следы матриц монодромии (60) и (66) коммутируют относительно скобок Пуассона

$$\{\tau(\lambda), \tau(\mu)\} = 0 . \quad (77)$$

$$R_{12}(\lambda - \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) = T_2(\mu) T_1(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu) , \quad (78)$$

$$R_{12}(\lambda - \mu) R_{13}(\lambda - \nu) R_{23}(\mu - \nu) = R_{23}(\mu - \nu) R_{13}(\lambda - \nu) R_{12}(\lambda - \mu) \in \text{End}(V^{\otimes 3}) .$$

Будем говорить, что решение $R_{12}(\lambda)$ уравнения Янга–Бакстера обладает квазиклассическим поведением, если матрица $R_{12}(\lambda)$ зависит от дополнительного параметра \hbar , причем при $\hbar \rightarrow 0$ мы имеем разложение

$$R_{12}(\lambda) = I + i \hbar r_{12}(\lambda) + \hbar^2 \dots \quad (79)$$

Подстановка (79) в уравнение Янга–Бакстера дает во втором порядке по \hbar уравнение (ср. с (75))

$$[r_{12}(\lambda - \mu), r_{13}(\lambda - \nu) + r_{23}(\mu - \nu)] + [r_{13}(\lambda - \nu), r_{23}(\mu - \nu)] = 0, \quad (80)$$

которое называется **квази-классическим уравнением Янга–Бакстера**.

Подстановка (79) в RTT -соотношение (78) определяет квазиклассическое разложение

$$[T_1(\lambda), T_2(\mu)] = i \hbar [T_1(\lambda) \cdot T_2(\mu), r_{12}(\lambda, \mu)] + \hbar^2 \dots \quad (81)$$

Теперь, вспоминая правило квантования Дирака $[\cdot, \cdot] = i \hbar \{ \cdot, \cdot \}$, из разложения (81) в пределе $\hbar \rightarrow 0$ возникает скобка Пуассона (72).