Введение в теорию интегрируемых систем.

А. П. Исаев[1]

[1] Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, ОИЯИ, Дубна

Advanced Methods of Modern Theoretical Physics: Integrable and Stochastic Systems

21-26 July 2024

План

1. **Классическая теория интегр. систем. Иерархии КдФ и КП.**
   - 1. Гамильтонова структура для системы КдФ
   - 2. Пара Лакса. Интегрируемость уравнения КдФ.
   - 3. Псевдодифференциальные операторы и иерархия КдФ
   - 4. Иерархия Кадомцева-Петвиашвили (КП)
   - 5. Преобразования Бэклунда
   - 6. Многосолитонные решения КдФ. Билинейные уравнения Хироты.
   - 7. Метод Хироты получения N-солитонных решений КдФ.
   - 8. Функция Бейкера-Ахиезера для иерархии КП и τ-функция

Уравнение Кортевега-де Фриза

Дж. Скотт Рассел (1808-1882) следил за движением баржи, которую быстро тянули по узкому каналу пара лошадей. Когда баржа неожиданно остановилась, то масса воды, которую баржа приводила в движение, приняла форму волны, которая покатилась вперед вдоль канала не меняя своей формы и не снижая скорости. Так в августе 1834 г. он впервые столкнулся с необычным и красивым явлением, которое он назвал уединенной волной.

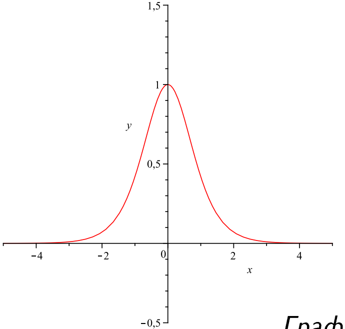

График функции $y = u(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

Любая колоколообразная функция $u(x - c\,t)$ будет описывать уединенную волну, бегущую со временем t вдоль оси x со скоростью c.

$$u(x,t) = \frac{\alpha}{\mathrm{ch}^2(\beta(x - c\,t + \delta)}\ , \tag{1}$$

где α, β, δ — параметры (δ – фаза). Функция (1) удовлетворяет

$$\dot{u}(x,t) := \partial_t\, u(x,t) = -c\,u'\ , \quad u'''(x,t) = \beta^2(4\,u' - \tfrac{12}{\alpha}\,u\,u')\ ,$$

где $u'(x,t) := \partial_x\, u(x,t)$. Выражая в последнем уравнении u' через $\dot{u}$, получаем, что (1) нелинейное уравнение

$$\dot{u} + \frac{3c}{\alpha}\,u\,u' + \frac{c}{4\beta^2}\,u''' = 0\ . \tag{2}$$

Делая растяжения координат $x \to \lambda\,x$ и $t \to \mu\,t$, мы можем убрать 2 параметра и упростить уравнение (2). Удобно зафиксировать $\frac{3c}{\alpha} = 6$ и $\frac{c}{4\beta^2} = 1$.

Т.о., мы получаем для (2) стандартный вид ***уравнения Кортевега-де Фриза***

$$\dot{u} + 6\, u\, u' + u''' = 0\ , \tag{3}$$

для которого имеется одно-солитонное решение

$$u(x,t) = \frac{c/2}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - c\,t + \delta)\right)}\ . \tag{4}$$

где скорость движения волны (солитона) c и фаза δ — произвольные параметры. Отметим, что ***чем выше волна тем больше ее скорость***.

- Доказать, что $I_1 = \int dx\, u(x)$ и $I_2 = \int dx\, u^2(x)$ являются интегралами движения для уравнения КдФ.
- Доказать, что колокообразная функция $v(x,t) = \frac{\alpha}{\mathrm{ch}^n(\beta(x - c\,t + \delta))}$ при $n = 1$ удовлетворяет *модифицированному* уравнению КдФ: $\dot{v} + \mu\,(v^2 + \lambda)\, v' + \nu\, v''' = 0$.

Гамильтоновы структуры для КдФ

1. Рассмотрим Гамильтониан и скобки Пуассона (алгебра Вирассоро)

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_1 = \tfrac{1}{2}\int dx\,\big(u(x,t)\big)^2\,,\\ \{u(x),\ u(y)\}_1 = \alpha\delta'(x-y)\big(u(x)+u(y)\big) - \beta\delta'''(x-y)\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Тогда

$$\dot u = \{u,\ \mathcal{H}_1\}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot u = 3\alpha\, u\, u' - \beta\, u'''\,, \tag{6}$$

2. Имеется вторая гамильтонова структура для КдФ

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_2 = \int dx\Big(u(x,t)^3 - \tfrac{1}{2}u(x,t)'^2\Big)\,,\\ \{u(x,t),\ u(y,t)\}_2 = -\delta'(x-y)\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Тогда

$$\dot u = \{u,\ \mathcal{H}_2\}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot u + 6\, u\, u' + u''' = 0\,,\ . \tag{8}$$

Уравнение КдФ можно записать в виде условия коммутативности двух операторов L и $A = \partial_t + M$ (Питер Лакс (Peter Lax), 1968 г.)

$$[A,\ L] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\partial_t + M,\ L] = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{L} = [L,\ M]\ , \tag{9}$$

где 2 оператора A и L называются операторами Лакса (или парой Лакса)

$$L = \partial^2 + u(x,t) + z\ , \quad A = \partial_t + M\ , \quad M := 4\left(\partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u'\right)\ , \tag{10}$$

где z – произвольный спектральный параметр. Действительно, подставляя (10) в (9), получаем

$$\begin{aligned} 0 = [A,\ L] = [\partial_t + 4\left(\partial^3 + \tfrac{3}{2}u\partial + \tfrac{3}{4}u'\right),\ \partial^2 + u(x,t) + z] = \\ = \partial_t u + 4[\left(\tfrac{3}{2}u\partial + \tfrac{3}{4}u'\right),\ \partial^2] + 4[\left(\partial^3 + \tfrac{3}{2}u\partial\right),\ u(x,t)] = \\ = \dot{u} + 6uu' + u'''\ . \end{aligned} \tag{11}$$

Системы, уравнения которых записываются в виде (9), (11) как правило интегрируемы по Лиувиллю.

Определение. Говорят, что гамильтонова система, заданная в $2N$ мерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$, интегрируема по Лиувиллю, если для нее можно предъявить N *функционально независимых* интегралов движения $I_k|_{k=1,\dots,N}$ (функций на $\mathcal{M}$) *в инволюции* $\{I_k, I_\ell\} = 0$.
В частности, для интегрируемой системы, на подмногообразии $\mathcal{M}_{\vec{c}} \subset \mathcal{M}$, которое определяется уровнями ($c_1, \dots, c_N$ – константы)

$$I_1 = c_1 \ , \quad I_2 = c_2 \ , \dots \ , \quad I_N = c_N \ , \tag{12}$$

в локальной окрестности любой точки на $M_{\vec{c}}$ можно ввести "выпрямляющие" координаты $\{I_1, \dots, I_N, \phi_1, \dots, \phi_N\}$ (переменные действие-угол) такие, что

$$\dot{I}_k = 0 \ , \quad \dot{\phi}_k = \omega_k \ , \quad \{\phi_k, I_\ell\} = \delta_{k\ell} \ , \quad \{\phi_k, \phi_\ell\} = 0 \ .$$

где ω_k – константы.

Пример. Одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ и канонической скобкой Пуассона $\{q, \ p\} = 1$.
Уравнения движения:

$$\dot{p} = -\omega^2 q \ , \quad \dot{q} = p \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = -\omega^2 q.$$

Общее решение (a_1, a_2 – константы интегрирования)

$$q(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t, \quad p(t) = \omega(a_1 \cos \omega t - a_2 \sin \omega t).$$

Это решение лежит на поверхности уровня (эллипс в $\mathcal{M}$)

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \ = \ \frac{\omega^2}{2}(a_1^2 + a_2^2) \ = \ c_1$$

Введем удобные координаты ρ, ϕ, параметризующие эллипс,

$$p = \rho \cos \phi \ , \quad q = \frac{\rho}{\omega} \sin \phi \ , \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}\rho^2 \ ,$$

$$\{q, \ p\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \{\phi, \ \rho\} = \frac{\rho}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \{\frac{\omega}{\rho}\phi, \ \rho\} = 1 \ ,$$

$$\dot{p} = -\omega^2 q \ , \quad \dot{q} = p \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \ , \quad \dot{\phi} = \omega \ .$$

Т.е. ρ, ϕ – переменные действие-угол, которые после замены $\phi \to \phi \frac{\omega}{\rho}$, становятся "выпрямляющими" переменными.

- Рассмотреть N мерный осциллятор $H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(p_k^2 + \omega^2 q_k^2)$ и найти переменные действие-угол.

Оказывается, что для систем, допускающих представление Лакса $\dot{L} = [L, M]$, можно предъявить достаточное количество интегралов движения I_n, которые ***формально*** определяются следующим образом

$$I_n = \mathrm{Tr}(L^n)\ , \quad \dot{I}_n = \mathrm{Tr}\big(\dot{L}L^{n-1} + L\dot{L}L^{n-2} + \ldots L^{n-1}\dot{L}\big) =$$
$$= \mathrm{Tr}\big([L, M]L^{n-1} + L[L, M]L^{n-2} + \ldots L^{n-1}[L, M]\big) =$$
$$= \mathrm{Tr}\big((L\,M - ML)L^{n-1} + L(L\,M - ML)L^{n-2} + \ldots\big) = \mathrm{Tr}([L^n, M]) = 0\ ,$$

При доказательстве $\dot{I}_n = 0$ мы использовали циклическое свойство следа, которое вообще говоря не выполняется для б.м. операторов

$$0 = \mathrm{Tr}\big([\hat{q}, \hat{p}]\big) = \mathrm{Tr}\big(1\big) \neq 0\ .$$

Поэтому изложенная схема хорошо работает для конечномерных систем и не работает для б.м. систем типа КдФ.

Пример. Открытая цепочка Тоды – система n взаимодействующих частиц на прямой с координатами x_i, импульсами p_i $(i = 1, ..., n)$, канонической скобкой $\{x_i, p_k\} = \delta_{ik}$ и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(x_i - x_{i+1})} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 \ , \tag{13}$$

где $a_i = p_i \ , \quad b_i = e^{(x_i - x_{i+1})}$. Гамильтоновы уравнения $\dot{A} = \{A, H\}$:

$$\begin{gathered} \dot{x}_j = p_j \ , \quad \dot{p}_i = 2e^{2(x_{i-1}-x_i)} - 2e^{2(x_i - x_{i+1})} \qquad (i = 2, ..., n-1) \ , \\ \dot{p}_1 = -2e^{2(x_1 - x_2)} \ , \quad \dot{p}_n = 2e^{2(x_{n-1}-x_n)} \ , \end{gathered} \tag{14}$$

записываются в виде $\dot{L} = [L, \ M]$ с парой Лакса

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Интегралы движения $I_n = \mathrm{Tr}(L^n)$ (в инволюции!!!):

$$P = \mathrm{Tr}(L) = \sum_i p_i \ , \quad H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(L^2) \ , \quad I_3 \ = \ \mathrm{Tr}(L^3) \ = ??? \ .$$

Псевдодифференциальные операторы и иерархия КдФ

Для неформального построения интегралов движения системы КдФ необходимо использовать теорию псевдодифференциальных операторов. Определим производную ∂^{-1} как оператор, который удовлетворяет соотношениям $\partial^{-1}\partial = \partial\partial^{-1} = 1$, где $\partial := \partial_x$.

Определение. *Оператор*

$$P(x,\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)\,\partial^{k-m} = p_0(x)\,\partial^k + p_1(x)\,\partial^{k-1} + \dots\,, \tag{15}$$

называется псевдодифференциальным оператором порядка не выше k (или просто — псевдодифференциальным оператором порядка k).

Важное тождество для любого целого $m \in \mathbb{Z}$

$$\partial^m f(x) = \sum_{k\geq 0} X_m^k\,(\partial^k f)\,\partial^{m-k} \tag{16}$$

где $X_m^0 = 1$, $X_m^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$, $\forall k \geq 1$. Для $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ соотношение (16) дает стандартную формулу, вытекающую из правила Лейбница и мы имеем $X_m^k = C_m^k$.

Пример. В качестве примера получим формулу (16) для $m = -1$.
Ищем $\partial^{-1} f$ в виде ПДО

$$\partial^{-1} f = \sum_{k\geq 1} \phi_k \partial^{-k} \quad \overset{\partial}{\Rightarrow} \quad f = \sum_{k\geq 1} (\phi_k' + \phi_k \partial)\partial^{-k} \quad \Rightarrow$$

$$\phi_{k+1} = -\phi_k' \,, \quad \phi_1 = f \quad \Rightarrow \quad \phi_k = (-1)^{k-1}\partial^{k-1} f \quad \Rightarrow$$

$$\partial^{-1} f = f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} - f'''\partial^{-4} + \dots .$$

Теперь можно посчитать $\partial^{-2} f = \partial^{-1}(\partial^{-1} f)$ и т.д.

Далее нам понадобится ПДО

$$L^{1/2} = (\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \sum_{k=1} f_k \, \partial^{-k}$$

$$(\partial + \sum_{k=1} f_k \, \partial^{-k})^2 = \partial^2 + u \quad \Rightarrow$$

$$2f_1 = u, \quad (2f_2 + f_1') = 0, \quad (2f_3 + f_2' + f_1^2) = 0, \dots \quad \Rightarrow$$

$$f_1 = \frac{u}{2} \,, \quad f_2 = -\frac{u'}{4} \,, \quad f_3 = \frac{1}{8}(u'' - u^2) \,, \quad f_4 = -\frac{1}{16}(u''' - 6uu') \,, \quad f_5 = ???, \dots ,$$

$$\boxed{L^{3/2} = (\partial^2 + u)(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u' + \frac{1}{8}(3u^2 + u'')\partial^{-1} + \dots}$$

Обозначим P_+ – проекцию ПДО $P = \sum\limits_{m=0} p_m(x)\, \partial^{k-m}$, содержащую только неотрицательные степени производной

$$P_+ := \sum_{m=0}^{k} p_m(x)\, \partial^{k-m}\,, \quad P_- := P - P_+ = \sum_{m=k+1}^{\infty} p_m(x)\, \partial^{k-m}\,, \tag{17}$$

Т.о.,

$$(L^{3/2})_+ = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u' \equiv \frac{1}{4}M\,,$$

и уравнение КдФ можно представить (после $t \to t/4$) в виде

$$\partial_t L = [(L^{3/2})_+,\ L]\,. \tag{18}$$

Утверждение. *Коммутатор $[(L^{n/2})_+,\ L]$, где $L = (\partial^2 + u)$, для всех нечетных n, оказывается не дифференциальным оператором, а функцией.*

Док-во.

Порядок ПДО $[L_1,\ L_2]$ равен $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$, если порядки ПДО L_1 и L_2 равны соответственно α_1 и α_2.

Тогда из $[L^{n/2},\ L] = 0 \quad \Rightarrow \quad [(L^{n/2})_+,\ L] = -[(L^{n/2})_-,\ L]$. Порядок ПДО в r.h.s. не превышает $-1 + 2 - 1 = 0$, а в l.h.s. – обычный ДО.

Т.о. $[(L^{n/2})_+,\ L]$ – функция.

Пользуясь данным Утверждением можно сформулировать высшие уравнения КдФ:

$$\partial_{t_n} L = [(L^{n/2})_+, \ L] \ , \qquad M = (L^{n/2})_+ \ , \qquad n = 3, 5, 7, \dots \ , \tag{19}$$

где для каждого нечетного n мы вводим свое время t_n (для четных n правая часть $[(L^{n/2})_+, \ L]$ равна нулю). В частности для $n = 1$ мы получаем

$$\partial_{t_1} L = [L_+^{1/2}, \ L] = [\partial, \ L] \quad \Rightarrow \quad t_1 = x \ .$$

Мы можем считать, что оператор L является функцией от всех времен $(t_1 = x, t_2, t_3, \dots)$, так как в силу (19) выполняется условие $[\partial_{t_k}, \ \partial_{t_n}]L = 0$, которое мы докажем для более общего случая иерархии уравнений Кадомцева-Петвиашвили.

==============================

Определение. Вычетом Res ПДО $P(x, \partial)$ порядка $k > 0$ называется коэффициент в $P(x, \partial) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) \, \partial^{k-m}$ при производной ∂^{-1}, то есть $\text{Res}(P(x, \partial)) = p_{k+1}(x)$.

Утверждение. *Для двух любых ПДО P и Q их коммутатор $[P,\ Q]$ обладает свойством*

$$\mathrm{Res}([P,\ Q]) = \partial_x(...)\ . \tag{20}$$

Док-во. Прямое вычисление. ■

Рассмотрим функции $I_n(x,t) = \mathrm{Res}(L^{n/2})$, где $L = \partial^2 + u$. Для четных $n = 2r$ мы имеем $I_{2r}(x,t) = \mathrm{Res}(L^r) = 0$.

Утверждение. *Функции (коэффициенты Гельфанда-Дикого) $I_n(x,t) = \mathrm{Res}(L^{n/2})$, для всех нечетных n определяют плотности интегралов движения уравнения КдФ*

$$\partial_t I_n(x,t) + \partial_x(\dots) = 0\ . \tag{21}$$

Док-во. $\partial_t I_n(x,t) \equiv \mathrm{Res}(\partial_t L^{n/2}) = \mathrm{Res}([L_+^{n/2},\ L^{n/2}]) = \partial(...)$. ■

Пример.

$$\mathrm{Res}(L^{1/2}) = \frac{u}{2}\ , \quad \mathrm{Res}(L^{3/2}) = \frac{1}{8}(3u^2 + u'')\ , \quad \mathrm{Res}(L^{5/2}) = ???\ . \tag{22}$$

Отметим, что $\mathrm{Res}(L^{3/2}) \sim H_1$.

Иерархия Кадомцева-Петвиашвили (КП)

Обсуждении иерархии КдФ начинается с $L_{KdV} = \partial^2 + u(x,t)$ и потом строится ПДО $L_{KdV}^{1/2}$ первого порядка и $M = (L_{KdV}^{3/2})_+$.

Обобщение иерархии КдФ возникает, если вместо $L_{KdV}^{1/2}$ берется самый общий ПДО первого порядка

$$L = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \partial^{-i} \;, \qquad (23)$$

который зависит от бесконечного числа полей $u_i|_{i=1,2,3,\ldots}$. Далее строятся M-операторы

$$M_n \equiv (L^n)_+ \qquad (24)$$

которые приводят к иерархии интегрируемых уравнений

$$[\partial_{t_n} - M_n,\ L] = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{t_n} L = [(L^n)_+,\ L] \;, \qquad \forall n \geq 1 \;. \qquad (25)$$

Здесь t_n — времена, соответствующие эволюциям, задаваемым операторами (24). Иерархия интегрируемых уравнений (25) называется *иерархией Кадомцева-Петвиашвили* (КП).

Для иерархии КП мы имеем $\partial_{t_n}\partial_{t_m}L = \partial_{t_m}\partial_{t_n}L$, т.е. все времена t_k независимы и L-оператор (23) можно считать функцией от всех времен: $L(t_1 = x, t_2, t_3, \dots)$.

Пример. Положим $u_1 = u(x, y, t)$, $t_2 = y$ и $t_3 = t$, тогда второй и третий потоки $n = 2, 3$ в (25) будут приводить к системе уравнений, из которых следует уравнение Кадомцева-Петвиашвили

$$3u_{yy} + \partial_x(-4u_t + u_{xxx} + 12u\, u_x) = 0\ . \qquad (26)$$

Действительно, для $L = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \partial^{-i}$ имеем

$$(L^2)_+ = \partial^2 + 2u_1\ , \quad (L^3)_+ = \partial^3 + 3u_1\partial + (3u_2 + 3u_1')\ ,$$

$$\partial_y L = [\partial^2 + 2u_1,\ L]\ , \quad \partial_t L = [\partial^3 + 3u_1\partial + (3u_2 + 3u_1'),\ L]$$

$$\begin{gathered} u_{1y} = u_{1xx} + 2\, u_{2x}\ , \quad u_{2y} = u_{2xx} + 2\, u_{3x} + 2u_1 u_{1x}\ , \dots \\ u_{1t} = u_{1xxx} + 3u_{2xx} + 3u_{3x} + 6\, u_1\, u_{1x}\ , \dots \end{gathered} \qquad (27)$$

Исключаем u_2, u_3 и получаем (26).

Преобразования Бэклунда связывают решения одного нелинейного уравнения с решениями другого (возможно тоже нелинейного) уравнения. Если решения второго уравнения известны, то мы можем найти решения первого уравнения. Автопреобразования Бэклунда связывают разные решения одного и того же нелинейного уравнения

Уравнение КдФ. Преобразование Миуры

В качестве первого примера рассмотрим преобразование Бэклунда, которое связывает решение u уравнения КдФ (3):

$$P(u) \equiv u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \,, \tag{28}$$

с решением v модифицированного уравнения КдФ:

$$Q(v) \equiv v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0 \,. \tag{29}$$

Это преобразование имеет вид

$$u = -(v_x + v^2 + \lambda) \qquad \Rightarrow \qquad L = \partial^2 + u = (\partial + v)(\partial - v) - \lambda \,, \tag{30}$$

где λ — некоторый параметр, и известно как ***преобразование Миуры***. Подставим выражение для u из (30) в (28)

$$P(u) \equiv u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -(\partial_x + 2v)\, Q(v) \,. \tag{31}$$

Заметим, что уравнение mКдФ (29) инвариантно относительно замены $v \to -v$. Поэтому, если v удовлетворяет (29), то обе функции

$$u = v_x - v^2 - \lambda \,, \quad \tilde{u} = v_x - v^2 - \lambda \,, \tag{32}$$

также удовлетворяют уравнению КдФ. Положим $\tilde{u} = 0$. Тогда для v имеем дифференциальное уравнение $v_x = v^2 + \lambda$, которое легко решается

$$v = \sqrt{\lambda} \tan\Big(\sqrt{\lambda}(x + f(t))\Big) \,, \tag{33}$$

где функция $f(t) = 4\lambda t + \delta$ (δ – произвольная константа) фиксируется тем, что поле v из (33) должно удовлетворять мКдФ (29). Подстановка решения (33) в (30) дает функцию

$$u = -2(v^2 + \lambda) = \frac{-2\lambda}{\cos^2(\sqrt{\lambda}(x + f(t)))} \,, \tag{34}$$

которая для $\lambda = -c/4 < 0$, когда $\sqrt{\lambda}$ – чисто мнимая величина, и $f(t) = -c\, t + \delta$, переходит в одно-солитонное решение КдФ (1).

- Получить 2х-солитонное решение КдФ указанным способом.

Отметим, что преобразование Бэклунда типа преобразования Миуры (30) позволяет не только получать солитонные решения уравнения КдФ, но и находить для этого уравнения нетривиальные законы сохранения. Действительно, рассмотрим следующую модификацию преобразования Миуры (30):

$$u = -(\epsilon w_x + \epsilon^2 w^2 + w) \ . \tag{35}$$

где ϵ – произвольный параметр, которая связывает решение уравнения КдФ с решение уравнения ***Гарднера***

$$(w)_t - (2\epsilon^2 w^3 + 3w^2 - w_{xx})_x = 0 \ . \tag{36}$$

Далее, разложим решение уравнения (36) по малому параметру ϵ:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \epsilon^k \ , \tag{37}$$

где первые коэффициенты w_k легко находятся из соотношения (35), в котором правую часть надо разложить по ϵ. В результате имеем сохраняющиеся токи

$$w_0 = -u \,, \quad w_1 = u' \,, \quad w_2 = -u'' - u^2 \,, \quad w_3 = -w_2' - 2w_0 w_1 = u''' + 4u'u \,,$$
$$w_4 = -w_3' - w_1^2 - 2w_0 w_2 = -u'''' - 6(u'u)' + (u')^2 - 2u^3 \,, \ldots \,.$$

Вместо односолитонного решения (4) уравнения КдФ (3) можно найти более общее решение уравнения КдФ, описывающее N-солитонов. Такое N-солитонное решение с граничными условиями $u \to 0$ при $|x| \to \infty$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
u = 2(\log F)_{xx} \,, \qquad F = \det(F_{nm}) \,, \\
F_{nm} := \delta_{nm} + \tfrac{2(\alpha_n \alpha_m)^{1/2}}{\alpha_n + \alpha_m} \, f_n \,, \\
f_n = \exp \theta_n \,, \quad \theta_n \equiv \left(\alpha_n (x - x_n) - \alpha_n^3 \, t \right) \,,
\end{gathered}
\tag{38}
$$

где $n, m = 1, \dots, N$ и $\alpha_n, x_n \in \mathbb{R}$ — параметры. Возникновение коэффициента α_n^3 при t в определении f_n (аналогичный факт имеет место и для односолитонного решения) связан с тем, что при $u \to 0$ уравнение КдФ переходит в линейное уравнение $u_t + u_{xxx} = 0$, решением которого является функция $e^{(\alpha x - \alpha^3 t)}$.

Примеры.

1. Рассмотрим простейший случай $N = 1$. В этом случае

$$F = 1 + f \; , \quad f = e^{\theta} \; , \quad \theta = (\alpha x - \alpha^3 t + \delta) \; . \tag{39}$$

Тогда из первой формулы в (38) мы получаем (после отождествления $\alpha = \sqrt{c}$) односолитонное решение КдФ (4)

$$u = 2(\log F)_{xx} = 2\alpha\Big(\frac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}}\Big)_x = \frac{2\alpha^2}{(e^{\theta/2}+e^{-\theta/2})^2} = \frac{\alpha^2/2}{\mathrm{ch}^2(\theta/2)} \; . \tag{40}$$

2. В двухсолитонном случае $N=2$ для решения (38) имеем

$$||F_{nm}|| = \begin{pmatrix} 1+f_1 & \frac{2(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}}{\alpha_1+\alpha_2} f_1 \\ \frac{2(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}}{\alpha_1+\alpha_2} f_2 & 1+f_2 \end{pmatrix} , \tag{41}$$

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \tfrac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} f_1 f_2 = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2} ,$$

$$u = 2(\log F)_{xx} = 2\partial_x\left(\frac{F_x}{F}\right) = 2\partial_x\left(\frac{\alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A(\alpha_1+\alpha_2)e^{\theta_1+\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2}}\right) , \tag{42}$$

где $A = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}$. Далее мы покажем, как в асимптотике $t \to \pm\infty$ это решение переходит в суперпозицию двух односолитонных решений.

3. Для иллюстрации приведем выражение для детерминанта $F = \det ||F_{nm}||$ в случае $N=3$:

$$F = 1 + \sum_{i=1}^{3} f_i + \sum_{i<k} \frac{(\alpha_i-\alpha_k)^2}{(\alpha_i+\alpha_k)^2} f_i f_k + \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_3)^2(\alpha_2+\alpha_3)^2} f_1 f_2 f_3 \, . \tag{43}$$

Функция F в литературе часто обозначается как τ и называется тау-функцией. С помощью этой функции удается сформулировать ***прямой метод*** построения многосолитонных решений уравнения КдФ.

Метод Хироты

Подставим в уравнение КдФ (3) выражение для u из первой формулы в (38):

$$u = 2(\log F)_{xx} = 2\partial_x\left(\frac{F_x}{F}\right) = 2\frac{F_{xx}}{F} - 2\left(\frac{F_x}{F}\right)^2 . \tag{44}$$

в результате получаем

$$u_t + 6\,u\,u_x + u_{xxx} = 2\partial_x\left(\frac{F_{xt}}{F} - \frac{F_x F_t}{F^2} + 3\frac{F_{xx}^2}{F^2} + \frac{F_{xxxx}}{F} - 4\frac{F_x F_{xxx}}{F^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_{xt}\,F - F_x\,F_t + 3F_{xx}^2 + F_{xxxx}\,F - 4F_xF_{xxx} = 0 \quad (= c(t)\cdot F^2)\,. \tag{45}$$

Это уравнение называется ***билинейным уравнением Хироты***. Решение уравнения (45) ищется в виде ряда по некоторому параметру ϵ

$$F(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i\, f^{(i)}(x,t)\,. \tag{46}$$

Подстановка (46) дает бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений на $f^{(i)}(x,t)$. Обрыв цепочки на шаге N, когда $f^{(N+1)}(x,t) = 0$, дает детерминантное N-солитонное решение.

То, что 2-х солитонное решение описывает взаимодействие и рассеяние 2-х солитонов проверяется в асимптотике $\theta_1 \sim 0$ (или $\theta_2 \sim 0$) при $t \to \pm\infty$. Действительно, запишем 2-х солитонное решение в виде:

$$u = 2(\log F)_{xx} = 2\partial_x\left(\frac{F_x}{F}\right) = 2\partial_x\left(\frac{\alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A(\alpha_1+\alpha_2)e^{\theta_1+\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2}}\right),$$

где $A = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}$ и $\theta_i = \alpha_i x - \alpha_i^3 t - \delta_i$. Будем считать для определенности $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ и зафиксируем $\theta_1 \sim 0$, то есть x и t связаны соотношением $x \sim \alpha_1^2 t - \delta_1/\alpha_1$. Тогда θ_2 ведет себя как

$$\theta_2 \sim \alpha_2(x - \alpha_2^2 t) + \delta_2 = \alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)t - \delta_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \delta_2 \tag{47}$$

т.е. $\theta_2 \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty$. Поэтому, если $t \to -\infty$, то $e^{\theta_2} \to 0$, и формула для u переходит в одно-солитонное решение

$$u = 2\partial_x\left(\frac{\alpha_1 e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1}}\right) = \frac{\alpha_1^2/2}{\mathrm{ch}^2(\frac{\theta_1}{2})} \tag{48}$$

Таким образом, в рассматриваемой асимптотике мы наблюдаем только один солитон с амплитутой $\alpha_1^2/2$, двигающийся вправо по оси x со скоростью α_1^2 и фазой $\frac{\delta_1}{\alpha_1}$.

Для обоснования подстановки $u = 2(\log F)_{xx}$ нам необходимо понять как такая подстановка связана со спектральной задачей

$$L\,\psi = z\,\psi\,, \quad \Big(\partial_m - M_m\Big)\psi = 0\,, \tag{49}$$

для которой условие совместности записывается в виде:

$$[\partial_m - M_m,\ L - z] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_m L = [(L^m)_+,\ L]\,,$$

где z – спектральный параметр и $\partial_m := \frac{\partial}{\partial t_m}$, а операторы L и M_m:

$$L = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} u_i\,\partial^{-i}\,, \qquad M_m := (L^m)_+ = \partial^m + m\,u_1\,\partial^{m-2} + ... + (...)\,\partial^0\,, \tag{50}$$

и $\partial := \partial_x$. Функция ψ называется функцией Бейкера-Ахиезера.
Утверждение. *Функция Бейкера с точностью до нормировки представима в виде*

$$\psi(z,t) = \Big(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(t)\,z^{-i}\Big)\exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} t_m\,z^m\Big)\,, \tag{51}$$

где функции $\omega_i(t)$ от времен $t = \{t_1, t_2, t_3, ...\}$ выражаются через поля u_i.

Функция Бэйкера, которая является решением системы уравнений

$$L\,\psi = z\,\psi\,, \qquad \Big(\partial_m - M_m\Big)\psi = 0\,,$$

представляется следующим образом

$$\psi(t,z) = \frac{\tau\big(\{t_m - \frac{1}{mz^m}\}\big)}{\tau(t)}\; e^{\xi(t,z)}\,, \qquad \xi(t,z) := \sum_{i=1}^{\infty} z^i\, t_i\,, \tag{52}$$

где $\{t_m - \frac{1}{mz^m}\} = \{t_1 - \frac{1}{z}, t_2 - \frac{1}{2z^2}, \ldots\}$. В литературе формула (52) для $\psi(t,z)$ называется формулой Сато.

Т.о. ряд

$$\big(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(t)\, z^{-i}\big) = \frac{\tau\big(\{t_m - \frac{1}{mz^m}\}\big)}{\tau(t)}\,,$$

позволяет выразить $\omega_i(t)$ через τ-функцию. Т.к. коэффициенты $\omega_i(t)$ однозначно выражаются через поля u_i иерархии КП, то мы можем выразить поля u_i через τ-функцию. В частности для поля u_1 имеем

$$u_1 = (\log\tau)_{xx}\,.$$

Из формулы Сато следует, что тау-функция $\tau(t_m)$ иерархии КП удовлетворяет билинейному уравнению Хироты

$$\mathrm{Res}_z\, \tau\Big(\{t_m - \frac{1}{mz^m}\}\Big)\, \tau\Big(\{t'_m + \frac{1}{mz^m}\}\Big) e^{\xi(t-t',z)} = 0\ . \tag{53}$$