Методы квантовой теории поля в задачах статистической физики: развитая гидродинамическая турбулентность

Н. М. Гулицкий

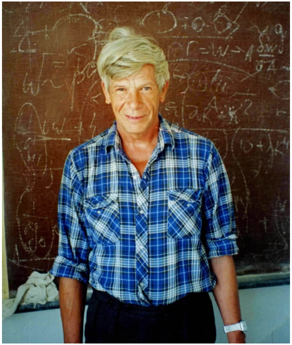
доцент кафедры Физики высоких энергий и элементарных частиц

The International School "Advanced Methods of Modern Theoretical Physics: Integrable and Stochastic Systems"

21-26 июля 2024

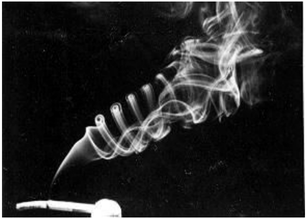
Научная группа

А. Н. Васильев (1940 – 2006)



Ученики и соавторы: Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, М. Ю. Налимов, М. Гнатич, М. В. Компаниец

Турбулентность



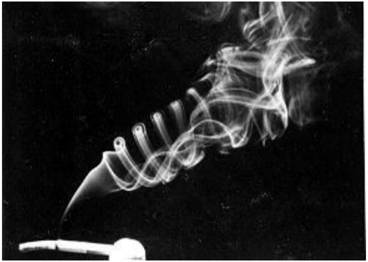
Турбулентность

Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\partial_t v_i + \boxed{(v_k \partial_k) v_i} = \boxed{\nu \partial^2 v_i} - \partial_i p$$

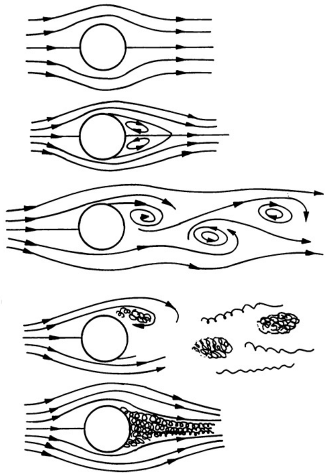
Характерным параметром является **число Рейнольдса**

$$\mathrm{Re} = \frac{L_0 V_0}{\nu} = \frac{\boxed{\text{инерция}}}{\boxed{\text{диссипация}}}$$



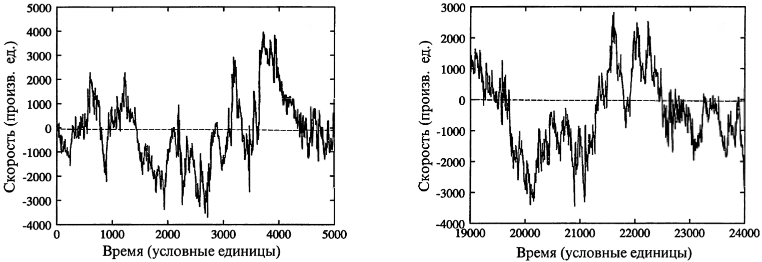
$\mathrm{Re} \to \infty$: **развитая турбулентность**, характеризуется восстановлением симметрий (однородности, изотропности) в **статистическом смысле**.

Турбулентность: что происходит при увеличении числа Рейнольдса Re



Вероятностное описание турбулентности

Развитая турбулентность – хаотическое движение. Сигнал из аэродинамической трубы имеет вид

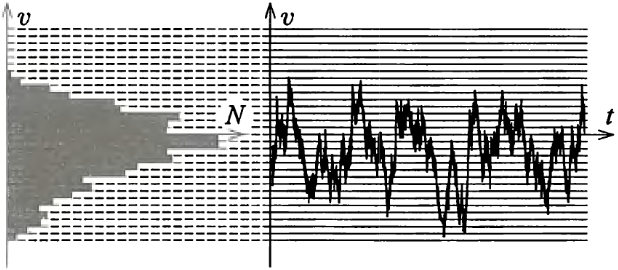


Свойства:

- неорганизованность + структуры разных масштабов;
- детали поведения непредсказуемы;
- в то же время: некоторые свойства постоянно воспроизводятся.

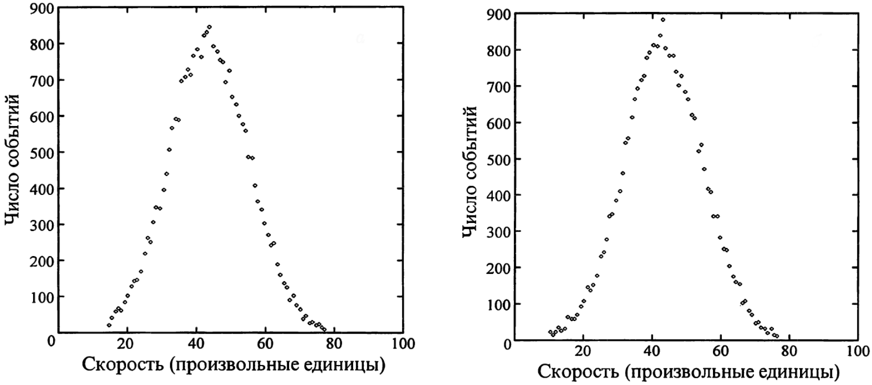
Вероятностное описание турбулентности

Построение гистограммы поля скорости



Вероятностное описание турбулентности

Гистограмма поля скорости



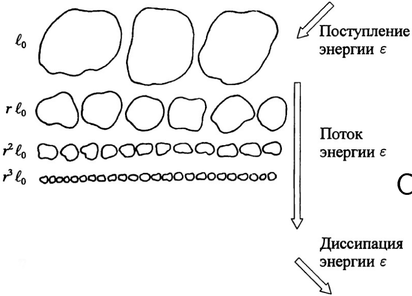
В основном совпадают!

Развитая турбулентность

Развитая турбулентность характеризуется:

- Полная скорость есть $V_i(\mathbf{x}, t) = v_i(\mathbf{x}, t) + u_i(\mathbf{x}, t)$, где $u_i(\mathbf{x}, t)$ есть гладкая ламинарная компонента, $v_i(\mathbf{x}, t)$ – относительно небольшая стохастическая (нерегулярная) компонента;
- статистическими характеристиками (объектами изучения) являются корреляционные функции и функции отклика (функции Грина в теории поля);
- развитая турбулентность наблюдается для жидкостей и газов и подчиняется одинаковым законам.

Развитая турбулентность: Каскад Ричардсона



Уравнение Навье-Стокса:

$$\partial_t v_i + \boxed{(v_k\partial_k)v_i} = \nu\partial^2 v_i - \boxed{\partial_i p}$$

Существует два нелокальных члена, переносящих энергию по спектру!

Развитая турбулентность

Ключевыми параметрами в соответствии гипотезами Колмогорова являются

- W и L – мощность накачки энергией от внешнего источника и связанный с ней макромасштаб; для тропосферы $L \sim 5$ км.
- ν и l – вязкость жидкости и связанный с ней микромасштаб; для тропосферы $l \sim 1$ см.

Развитая турбулентность: $\mathrm{Re} \gg 1 \Rightarrow L \gg l \Rightarrow$
существует инерционный интервал масштабов $l \ll r \ll L$.

Теория Колмогорова «K41»

Рассмотрим одновременные структурные функции:

$$S_n(\mathbf{r}) = \left\langle \left[v_r(t, \mathbf{x}) - v_r(t, \mathbf{x}') \right]^n \right\rangle ,$$

где v_r является компонентой поля скорости по направлению $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.

Гипотеза Колмогорова No.1: при $r \ll L$ распределение зависит от мощности накачки W, но не зависит от деталей устройства данной накачки, в частности от L.

Гипотеза Колмогорова No.2: при $r \gg l$ распределение не зависит от вязкости ν и, как следствие, от l.

Теория Колмогорова «K41»

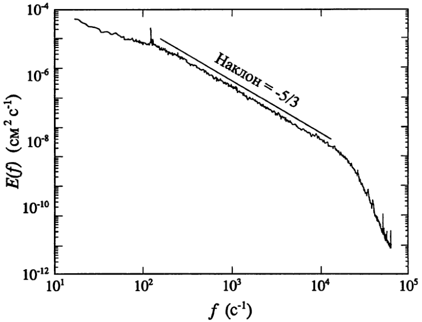
Из двух гипотез Колмогорова следует, что в инерционном интервале масштабов $l \ll r \ll L$

$$S_p(\mathbf{r}) = C_p \left(Wr\right)^{\zeta_p}$$

с точными показателями степеней $\zeta_p = p/3$ и универсальными амплитудами (константы Колмогорова) C_p.

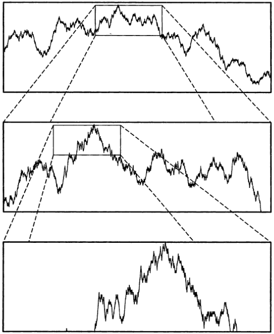
Теория Колмогорова «K41»: эксперимент

Структурная функция $S_2 \propto r^{n-1}$, энергетический спектр $E(k) \propto k^{-n} \Rightarrow$ закон 2/3 для S_2 эквивалентен закону $-5/3$ для $E(k)$.



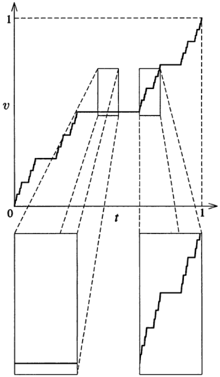
Перемежаемость

Ключевой момент теории K41 – самоподобие, т. е. статистические свойства каждого участка графика не зависят от того, где этот участок расположен.



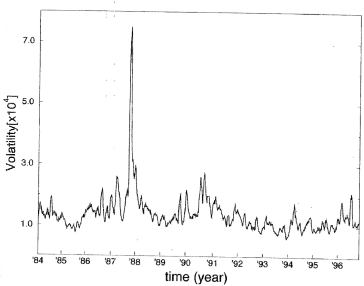
Перемежаемость

Бывает и не так! «Чертова лестница» – чем меньше изучаемый объект, тем точнее нужно прицелиться.



Аномальный секйлинг

Перемежаемость – редкие конфигурации системы дают определяющий вклад.

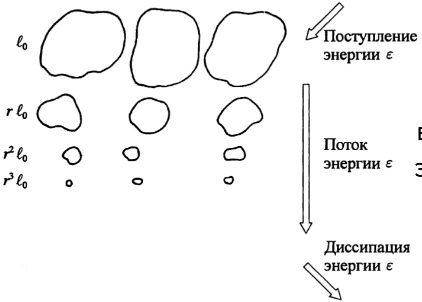


Данное явление связано с сильными флуктуациями потока энергии и ведет к нарушению классической теории K41:

$$S_p(\mathbf{r}) \cong (Wr)^{p/3} \, (r/L)^{\gamma_p}$$

с сингулярной зависимостью от L и бесконечным набором независимых показателей γ_p.

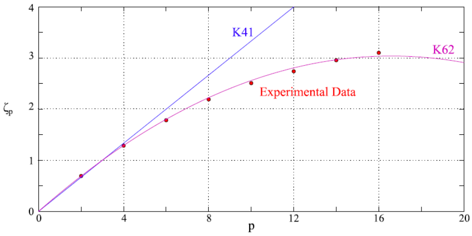
Теория «K62» (Колмогоров-Обухов)

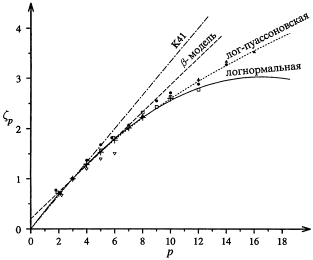


На каждой ступени каскада Ричардсона число дочерних вихрей выбирается так, что доля занимаемого ими объема в β раз меньше.

β есть параметр модели.

Теория «K62»: эксперимент





Проблема: неконтролируемое приближение.

Задача: вычисление показателей γ_p в рамках некоторого **регулярного** разложения.

Стохастическая постановка задачи

Турбулентность моделируется с помощью случайной силы f_i, имитирующей накачку энергии в систему:

$$\partial_t v_i + (v_k \partial_k) v_i = \nu \partial^2 v_i - \partial_i p + f_i .$$

Для f_i выбирается гауссово распределение с нулевым средним и парной корреляционной функцией

$$\langle f_i(t, \boldsymbol{x}) f_j(t', \boldsymbol{x}') \rangle = \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d} \int_{k>m} d\boldsymbol{k} P_{ij}(\boldsymbol{k}) d(k) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')},$$

$$d(k) = g_0 \nu_0^3 k^{4-d-\varepsilon} .$$

Стохастическая постановка задачи

В выражении выше
$P_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор,
g_0 – константа связи,
ε – ультрафиолетовый регуляризатор, свободный параметр.
$\varepsilon = 4$ отвечает накачке энергией с масштаба $L \to \infty$.

$d(k)$ связан с оператором диссипации $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{d-1}{2(2\pi)^d} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, d(k).$$

Функционал действия

Утверждение: любое стохастическое уравнение вида

$$\partial_t \phi(x) = U(x, \phi) + f(x), \quad \left\langle f(x) f(x') \right\rangle = D(x, x'),$$

где $\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$ – случайное поле, $U(x, \phi)$ – заданный t-локальный функционал от полей и их производных, $f(x)$ – случайная сила, эквивалентно некоторой модели квантовой теории поля с удвоенным числом полей $\widetilde{\phi} = \{\phi, \phi'\}$ и функционалом действия

$$S[\varphi] = \underbrace{\frac{1}{2}\varphi' D \varphi'}_{\text{шум}} + \varphi' \underbrace{\left[-\partial_t \varphi + U\right]}_{\text{динамика}};$$

интегрирование по t и $\mathbf{x}$ подразумевается.

Функционал действия

Для уравнения Навье-Стокса данное действие имеет вид

$$S(\varphi) = \frac{v_i' D_{ik} v_k'}{2} + v_i' \left[-\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + \nu_0 \partial^2 v_i \right].$$

Что это означает:

- статистическому усреднению отвечает функциональный интеграл с весом $\exp S[\phi]$;
- классическое случайной поле $\rightarrow$ квантовое поле;
- применим весь аппарат квантовой теории поля: фейнмановские диаграммы, ренормализационная группа, операторное разложение, ...