

# Стохастическая динамика

Еще одно приближение – уравнение Ланжевена. Напомним, рассмотрим осциллятор в тепловом резервуаре.

Просто осциллятор:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad (1)$$

Уравнения гамильтона

$$\partial_t p = -kq = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2)$$

$$\partial_t q = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}$$



Учтем вязкое трение

$$\partial_t p = -kq - \Gamma \frac{p}{m} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \Gamma \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3)$$

$$\partial_t q = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Теперь вставим случайную силу

$$\partial_t p = -kq - \Gamma \frac{p}{m} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \Gamma \frac{\partial H}{\partial p} + f(t) \quad (3)$$

$$\partial_t q = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

и получим стандартное уравнение Ланжевена,  $\Gamma$  – коэффициент Онзагера,  $p, q$  – моды.

Для случайной силы – "белый шум":

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 0, \quad \langle f^2(t) \rangle \neq 0 \quad (4)$$

$$\langle f(t)f(t') \rangle = D\delta(t - t') \quad (5)$$

В полевой науке – по аналогии

Стохастическое уравнение Ланжевена (модель А)

$$\partial_t \phi(x, t) = -\Gamma \frac{\delta S}{\delta \phi(x, t)} + \zeta(x, t) \quad (6)$$

Усреднение ведется по случайной силе с

$$\langle \zeta \rangle = 0, \quad \langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle = D\delta(t - t')\delta(x - x') \quad (7)$$

Функция распределения случайной силы берется из принципа максимума энтропии с наложенным условием (7)

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{\text{Norm}_\zeta} e^{-\frac{1}{2}\zeta D^{-1}\zeta} \quad (8)$$

Для определенности

$$S = \frac{1}{2} \partial\phi\partial\phi + \frac{\tau}{2} \phi^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 - A\phi \quad (9)$$

Уравнение (6) имеет вид

$$L\phi = \zeta - \Gamma \frac{g}{6} \phi^3 \quad (9)$$

$$L = \partial_t + \Gamma(-\Delta + \tau) \quad (10)$$

Решение ур. (9):

Что  
счи-  
тают  
в  
дина-  
мике?

$$\phi_s = \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \sim - \frac{1}{6} \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \rightsquigarrow \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \rightsquigarrow \text{---} \rightsquigarrow \text{---} + \dots$$

$\rightsquigarrow = \zeta$                        $\text{---} \rightsquigarrow \text{---} = L^{-1}$

Корреляционная  
функция

$$C_n = \langle \phi(x_1, t_1) \dots \phi(x_n, t_n) \rangle_\zeta$$

функция отклика

$$G(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \frac{\delta \phi(x_1, t_1)}{\delta A(x_2, t_2)_{A=0}} \rangle_\zeta$$

Диаграммная техника Уальда.

Рассмотрим  $C_2 = \langle \phi\phi \rangle_\zeta$

после

усред-

нения

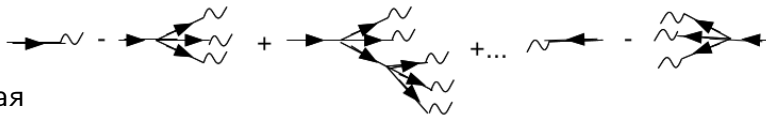
по  $\zeta$

волнистая

линия

–

коррелятор  $\langle \zeta\zeta \rangle$



Рассмотрим

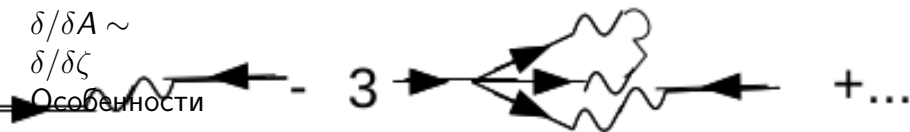
$G$ ,

$\delta/\delta A \sim$

$\delta/\delta \zeta$

Особенности

диа-



грамм-  
ной

техники:

1.

В

каж-

дую

вер-

шину

с

четырьмя хвостами входит одна линия со стрелкой

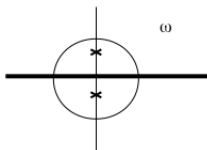
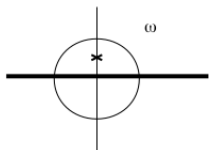
2, Замкнутые циклы линий со стрелками отсутствуют

3. Нет выкуумных петель

Два типа линий

$$G = \rightarrow - \frac{1}{2} \rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} + \dots$$

$$\rightarrow = \frac{1}{i\omega + \gamma(k^2 + \tau)} ; \rightarrow \text{---} \leftarrow = \text{---} = \frac{1}{i\omega + \gamma(k^2 + \tau)} D \frac{1}{-i\omega + \gamma(k^2 + \tau)}$$



Обратное Фурье по  $\omega$

$$\int \frac{d\omega e^{i\omega(t-t')}}{2\pi}$$

$$G_0 = L^{-1} = \Theta(t - t') e^{-\Gamma(k^2 + \tau)(t - t')},$$

$$\langle \phi\phi \rangle_0 = \frac{1}{2\Gamma(k^2 + \tau)} e^{-\Gamma(k^2 + \tau)|t - t'|}$$

Причинность, затухание, MSR



## Dynamic equations

$$\partial_t \varphi_a = -(\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi_b} + \xi_a, \quad \langle \xi_a(x) \xi_b(x') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta(x - x'), \quad (1)$$

$$\alpha = \alpha^T, \quad \beta = -\beta^T,$$

$$\frac{\delta \beta_{ab}}{\delta \varphi_a} = 0$$

Квантовая равновесная динамика  
(Двувременные функции Грина,  
Временные функции Грина при  
конечной температуре,  
Нестационарные функции Грина при  
конечной температуре, Неравновесные  
функции Грина)

The quantum statistical physics can be constructed using the field operators

$$\hat{\psi}^+(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})^*, \quad \hat{\psi}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} \hat{a}_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}),$$

$$\hat{H}_0 \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad \hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}),$$

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} [\hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \hat{H}_0 \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \int d\mathbf{y} \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) \hat{V}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}^+(\mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{y})]$$

## Time dependent at finite temperature Green functions

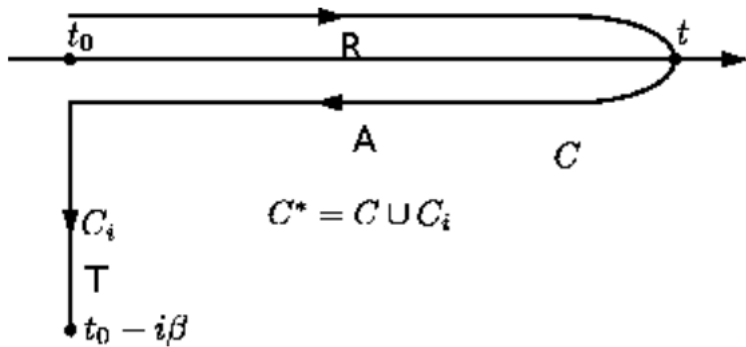
$$\begin{aligned} \text{Sp}(T(\hat{\psi}^+(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \hat{\psi}(\mathbf{x}_n, t_n))e^{-\beta\hat{H}}) &= \text{Sp}((\hat{\psi}^+(\mathbf{x}_1)e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} \dots \\ &\dots e^{-i\hat{H}(t_n-t_{n-1})}\hat{\psi}(\mathbf{x}_n, t_n))e^{-\beta\hat{H}}e^{-i(t_1-t_n)\hat{H}}) = \\ &= \int D\psi D\psi^+(\psi^+(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n, t_n))e^{iS} \end{aligned}$$

$$S(\psi, \psi^+) = \int d\mathbf{x} \int_C dt [\psi^+(\partial_t + i\frac{\Delta}{2m} + i\mu)\psi - i\frac{g}{4}(\psi^+\psi)^2],$$

$t$  is at the contour  $C^*$  which depends from the time and temperature.  
 $\text{Re}(t) \in (t_0, t_f)$ , where  $t_0$  and  $t_f$  are initial and final times,

$$\text{Im}t \in (0, -\beta), \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

# Keldysh-Schwinger contour



# Propagators of the theory

$R, A, T$  indicate the branches of  $C$  contour for times of fields

$$G_{RR} = e^{-i\epsilon(t-t')}(\Theta(t-t') + n(\epsilon)), \quad G_{AA} = e^{-i\epsilon(t-t')}(\Theta(t'-t) + n),$$

$$G_{TT} = e^{-i\epsilon(\tau-\tau')}(\Theta(\tau-\tau') + n), \quad G_{RT} = e^{-i\epsilon(t-t_0+i\tau')}n,$$

$$G_{RA} = e^{-i\epsilon(t-t')}n, \quad G_{AT} = e^{-i\epsilon(t-t_0+i\tau')}n, \quad G_{AR} = e^{-i\epsilon(t-t)}(n+1),$$

$$G_{TR} = e^{-i\epsilon(t_0-i\tau-t')}n, \quad G_{TA} = e^{-i\epsilon(t_0-i\tau-t')}n.$$

$$\langle \psi_i(t) \psi_j^\dagger(t') \rangle \equiv G_{ij}, \quad n(\epsilon) = 1/(e^{\beta\epsilon} - 1), \quad \epsilon \equiv p^2/(2m) - \mu.$$

$p$  is a momentum,  $\tau \equiv -\text{Im}t$ .

Unusual for QFT singularities of Tt diagram expansion at large  $t$  were found.

$\alpha$  regularization was introduced.  $n \Rightarrow t_0 \rightarrow -\infty$   $\xi = \psi_R + \psi_A$ ,

$$\eta = \psi_r - \psi_A$$

Renormalizable model

$$S' = 4\eta\alpha\eta^+ + \eta^+(\partial_t - iu\Delta - \alpha\Delta)\xi + \xi^+(\partial_t - iu\Delta + \alpha\Delta)\eta \\ + \frac{i\lambda\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi + \frac{i\bar{\lambda}\alpha}{2}\eta\xi\xi^+\xi^+,$$

Nonzero  $\alpha$  is generated due to the renormalization with the initial  $\alpha = 0$