Разделение переменных на примере цепочки Тоды

Н. Белоусов, И. Буренёв, М. Минин, С. Деркачёв

Записки семинаров ПОМИ для весенней школы по матфизике в 2020 году

Содержание

1 Источники знаний

Перечислим основные работы, по которым написаны эти записки. Общая схема метода разделения переменных была придумана Е. Скляниным [1, 2]. Представление Меллина-Барнса для волновых функций цепочки Тоды (Секции 3, 4) было впервые построено С. Харчевым и Д. Лебедевым [3]. Построение представления Гаусса-Гивенталя (Секция 5) следует статье А. Силантьева [4]. Про R- и Q-операторы (Секции 6, 7) для цепочки Тоды хорошо написано в лекциях Е. Склянина [5]. Доказательство эквивалентности двух представлений для волновых функций (Секция 8) дано в работе К. Козловски [6].

2 Сохраняющиеся величины

Рассмотрим цепочку Тоды — одномерную систему из N одинаковых частиц с экспоненциальным взаимодействием. Гамильтониан такой системы

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2} + e^{x_i - x_{i+1}} \right), \tag{1}$$

где p_i и x_i — импульс и координата i-й частицы. Кроме того, нужно зафиксировать граничные условия. Вообще говоря, есть два распространённых выбора

- Открытая цепочка $x_{N+1} \to \infty$
- Периодическая цепочка $x_{N+1} = x_1$

При решении механической системы полезным оказывается знание интегралов движения, поэтому сейчас постараемся построить как можно больше таких величин. Во-первых, гамильтониан не имеет явной зависимости от времени, что говорит о сохранении энергии. Во-вторых, система трансляционно инварианта, а значит сохраняется общий импульс

$$P = \sum_{i=1}^{N} p_i. \tag{2}$$

Таким несложным образом мы нашли два интеграла движения, то есть теперь умеем решать задачу о цепочке из двух частиц. Однако для большей цепочки этого не хватит, и надо обзавестись каким-нибудь более универсальным способом построения сохраняющихся величин. К счастью, для цепочки Тоды такой способ существует.

Введём для каждой частицы некоторую $2{\times}2$ матрицу $L_n(u)$, которая зависит от комплексного параметра $u \in \mathbb{C}$,

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u - p_n & e^{-x_n} \\ -e^{x_n} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

и матрицу (монодромии) $T(u)$ как произведение L-матриц всех частиц

$$T_N(u) = L_N(u) \dots L_1(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь A, B, C, D — элементы матрицы T. Пока совершенно непонятно, каким образом введенные конструкции связаны с гамильтонианом (1). Чтобы это немного прояснить, рассмотрим цепочку из двух частиц

$$\begin{aligned} T_2(u) = L_2(u)L_1(u) = \begin{pmatrix} u - p_2 & e^{-x_2} \\ -e^{x_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - p_n & e^{-x_1} \\ -e^{x_1} & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (u-p_1)(u-p_2) - e^{x_1 - x_2} & (u-p_2)e^{-x_1} \\ -e^{x_2}(u-p_1) & -e^{x_2 - x_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

и внимательно посмотрим на элемент $A(u)$

$$A(u) = u^2 - u^1(p_1 + p_2) + u^0 \left(p_1 p_2 - e^{x_2 - x_1}\right). \tag{6}$$

При некоторой сноровке можно переписать его в виде

$$A(u) = u^2 - u^1 P + u^0 \left(\frac{1}{2}P^2 - H_{\text{откр.}}\right). \tag{7}$$

Получилось, что $A(u)$ — полином по u, коэффициенты которого представляют из себя сохраняющиеся величины для случая цепочки с открытыми граничными условиями. Чтобы получить цепочку с периодическими условиями, надо взять не элемент A, а след матрицы T

$$\operatorname{tr} T(u) = A(u) + D(u) = u^2 - u^1 P + u^0 \left(\frac{1}{2}P^2 - H_{\text{период.}}\right). \tag{8}$$

Пока что мы разобрались со случаем $N = 2$ и увидели там некоторую закономерность. Чтобы убедиться в том, что это не случайное совпадение, посмотрим на случай цепочки из трёх частиц

$$\begin{aligned} T_3(u) = \begin{pmatrix} u - p_3 & e^{-x_3} \\ -e^{x_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u-p_1)(u-p_2) - e^{x_1 - x_2} & (u-p_2)e^{-x_1} \\ -e^{x_2}(u-p_1) & -e^{x_2 - x_1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \prod\limits_{i=1}^{3}(u-p_i) - (u-p_3)e^{x_1-x_2} - (u-p_1)e^{x_2-x_3} & e^{-x_1}\prod\limits_{i=2}^{3}(u-p_i) - e^{x_2-x_3-x_1} \\ -e^{x_3}\prod\limits_{i=1}^{2}(u-p_i) + e^{x_1-x_2+x_3} & -(u-p_2)e^{x_3-x_1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражение для элемента A

$$A(u) = u^3 - u^2(p_1+p_2+p_3) + u^1(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3 - e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_3}) + \\ + u^0(p_3e^{x_1-x_2} + p_2e^{x_2-x_3} - p_1p_2p_3). \quad (10)$$

Получилось то же, что и раньше, то есть

$$A(u) = u^3 - u^2P + u^1\left(\frac{1}{2}P^2 - H_{\text{откр.}}\right) + \ldots \quad (11)$$

и для периодической

$$A(u) + D(u) = u^3 - u^2P + u^1\left(\frac{1}{2}P^2 - H_{\text{период.}}\right) + \ldots \quad (12)$$

Первые коэффициенты оказались сохраняющимися величинами, посмотрим, не будет ли интегралом движения коэффициент при u^0. *Делайте сами*

Покажем, что старшие коэффициенты полинома всегда будут равны $-P$ и $(1/2)P^2 - H$.

Theorem 1 *Матрица $T_N(u)$ имеет вид*

$$T_N(u) = u^N\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + u^{N-1}\begin{pmatrix}-P_N & e^{-x_1}\\ -e^{x_N} & 0\end{pmatrix} + \\ + u^{N-2}\begin{pmatrix}\sum\limits_{1\le i<k\le N} p_ip_k - \sum\limits_{i=1}^{N-1} e^{x_i-x_{i+1}} & -e^{-x_1}(P_N - p_1)\\ e^{x_N}(P_N - p_N) & -e^{x_N-x_1}\end{pmatrix} + \ldots \quad (13)$$

Доказывать это будем по индукции. База уже есть, так как для случая $N=3$ мы посчитали всё явно. Так что остаётся только сделать переход.

$$T_{N+1}(u) = L_{N+1}(u)T_N(u) = \\ = (uL^1 + L^0)(u^NT^N + u^{N-1}T^{N-1} + u^{N-2}T^{N-2} + \ldots) \quad (14)$$

Здесь мы временно ввели обозначения для коэффициентов в T и L.

$$L^1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad L^0 = \begin{pmatrix}-p_{N+1} & e^{-x_{N+1}}\\ -e^{x_{N+1}} & 0\end{pmatrix} \quad (15)$$

Проследим отдельно за всеми коэффициентами. Старший u^{N+1} получается только одним способом

$$L^1T^N = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (16)$$

Коэффициент при u^N можно получить уже двумя способами

$$L^1T^{N-1}+L^0T^N=\begin{pmatrix}-P_N & e^{-x_1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-p_{N+1} & 0\\ -e^{x_{N+1}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-P_{N+1} & e^{-x_1}\\ -e^{x_{N+1}} & 0\end{pmatrix} \quad (17)$$

И остался только коэффициент при u^{N-1}.

$$L^1T^{N-2}+L^0T^{N-1}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{1\le i<k\le N}p_ip_k-\sum\limits_{i=1}^{N-1}e^{x_i-x_{i+1}} & -e^{-x_1}(P_N-p_1)\\ 0 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}p_{N+1}P_N-e^{x_N-x_{N+1}} & -p_{N+1}e^{-x_1}\\ e^{x_{N+1}}P_N & -e^{x_{N+1}-x_1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sum\limits_{1\le i<k\le N+1}p_ip_k-\sum\limits_{i=1}^{N}e^{x_i-x_{i+1}} & -e^{-x_1}(P_{N+1}-p_1)\\ e^{x_N}(P_{N+1}-p_{N+1}) & -e^{x_{N+1}-x_1}\end{pmatrix} \quad (18)$$

Теперь мы видели достаточно, чтобы сформулировать предположение:

Интегралы движения — коэффициенты полинома $A(u)$ в открытой цепочке, и коэффициенты полинома $A(u)+D(u)$ в цепочке с периодическими граничными условиями.

То есть утверждается, что $A(u)$ можно представить как сумму

$$A(u)=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m u^{N-m}H_m, \quad (19)$$

где H_m — интегралы движения (знак выбран из соображений удобства). Можно заметить, что три из них мы уже знаем

$$H_0=1; \quad H_1=P_N; \quad H_2=\frac{1}{2}P^2-H. \quad (20)$$

Заметим, что если $\{A(u),A(v)\}=0$ при разных параметрах, это значит, что $\{H_m,H_n\}=0$. Действительно

$$\{A(u),A(v)\}=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}u^{N-m}v^{N-n}\,\{H_m,H_n\} \quad (21)$$

Всё рассуждение выше верно и на квантовом уровне, так как операторы, которые относятся к разным частицам, коммутируют

$$p_n=-i\partial_n, \qquad [x_k,p_n]=i\delta_{kn}.$$

3 Собственные функции в случае двух частиц

В первой части мы сформулировали, как найти какое-то количество интегралов движения для цепочки Тоды с открытыми (а также периодическими) граничными условиями. В этой части попробуем построить собственные функции Гамильтониана и оператора импульса

$$H\Psi = E\Psi \tag{22}$$

$$P\Psi = p\Psi \tag{23}$$

для открытой цепочки из двух частиц.

Для начала заметим, что поиск собственных функций, удовлетворяющих (22-23) эквивалентен поиску собственных функций $A_{N=2}(u)$

$$A_{N=2}(u)\Psi = a(u)\Psi, \tag{24}$$

где $a(u)$ — полином с коэффициентом 1 при старшей степени. Обратим внимание на то, что это уравнение — дифференциальное уравнение в частных производных, так как в $A(u)$ входят операторы импульса частиц.

В случае $N = 2$ оператор $A(u)$, как мы уже узнали ранее (6), принимает вид

$$A_{N=2}(u) = (u + i\partial_1)(u + i\partial_2) - e^{x_1 - x_2} \tag{25}$$

и собственное число $a(u)$ является полиномом второй степени

$$a(u) = (u - \lambda_1)(u - \lambda_2). \tag{26}$$

Получим явный вид волновых функций $\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2)$. Для этого перейдём в импульсное пространство (сделаем преобразование Фурье)

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \iint \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_2\, e^{i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2} F(\gamma_1, \gamma_2|\lambda_1, \lambda_2) \tag{27}$$

и подействуем оператором $A(u)$ на волновую функцию

$$\begin{aligned} A(u)\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) \\ = \iint \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_2\, (u - \gamma_1)(u - \gamma_2) e^{i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2} F(\gamma_1, \gamma_2|\lambda_1, \lambda_2) \\ - \iint \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_2\, e^{i(\gamma_1 - i)x_1} e^{i(\gamma_2 + i)x_2} F(\gamma_1, \gamma_2|\lambda_1, \lambda_2) \\ = (u - \lambda_1)(u - \lambda_2) \iint \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_2\, e^{i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2} F(\gamma_1, \gamma_2|\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \tag{28}$$

Во втором интеграле напрашивается замена переменных $\gamma_1 \to \gamma_1 + i$, $\gamma_2 \to \gamma_2 - i$, однако это поменяет контур интегрирования. Будем считать, что изначальный контур интегрирования проходил по вещественной оси. Тогда, если у Фурье-образа волновой функции $F(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2|\lambda_1, \lambda_2)$ нет полюсов в полосе $\mathrm{Im}\ \gamma_1 < \mathrm{Im}\ \tilde{\gamma} < \mathrm{Im}\ \gamma_1 - 1$ и $\mathrm{Im}\ \gamma_2 < \mathrm{Im}\ \tilde{\gamma} < \mathrm{Im}\ \gamma_1 - i$, то продеформируем контур так, чтобы он совпадал с изначальным. Позднее мы узнаем свойства подынтегрального выражения и переопределим изначальный контур интегрирования.

Сделаем замену переменных во втором интеграле, продеформируем контур к исходному виду и получим разностное уравнение на $F(\gamma_1, \gamma_2)$

$$(u-\gamma_1)(u-\gamma_2)F(\gamma_1,\gamma_2) - F(\gamma_1+i,\gamma_2-i) = (u-\lambda_1)(u-\lambda_2)F(\gamma_1,\gamma_2). \tag{29}$$

Рассмотрим коэффициенты при разных степенях u. Начнём с коэффициента при u^1

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_1 - \gamma_2)F(\gamma_1, \gamma_2) = 0. \tag{30}$$

«Обычная» функция, удовлетворяющая уравнению для любых γ_1, γ_2 тождественно равнялась бы нулю, но так как равенство выполняется под интегралом, мы можем искать решение в классе обобщённых функций. Нас интересует функция, равная нулю везде за исключением одной точки. Кажется, мы знаем одну такую

$$F(\gamma_1, \gamma_2|\lambda_1, \lambda_2) = \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_1 - \gamma_2)\ f(\gamma_1, \gamma_2). \tag{31}$$

Обратим внимание, что решением является дельта функция с точностью до произвольной функции от $f(\gamma_1, \gamma_2)$

Теперь рассмотрим равенство коэффициентов при степени u^0 уравнения (29)

$$(\gamma_1\gamma_2 - \lambda_1\lambda_2)F(\gamma_1, \gamma_2) = F(\gamma_1 + i, \gamma_2 - i) \tag{32}$$

Так как $F(\gamma_1, \gamma_2)$ пропорциональна δ-функции, можем безболезненно менять $\gamma_2 \to (\lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_1)$

$$\begin{aligned}(\gamma_1\gamma_2 - \lambda_1\lambda_2) &= \gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2) - \gamma_1^2 - \lambda_1\lambda_2 \\ &= -(\lambda_1 - \gamma_1)(\lambda_2 - \gamma_1) = i(\lambda_1 - \gamma_1)\ i(\lambda_2 - \gamma_1)\end{aligned} \tag{33}$$

Получаем, что функция $F(\gamma_1, \gamma_2)$ меняется следующим образом при сдвиге аргументов

$$F(\gamma_1 + i, \gamma_2 - i) = i(\lambda_1 - \gamma_1)\ i(\lambda_2 - \gamma_1)\ F(\gamma_1, \gamma_2) \tag{34}$$

Чтобы понять, что это за функция, посмотрим на пример попроще — функцию одной переменной

$$f(z+1) = zf(z), \tag{35}$$

и сразу признаем в ней гамма-функцию. Значит, решением (34) является произведение двух гамма-функций, то есть

$$F(\gamma_1, \gamma_2) = \Gamma(i(\lambda_1 - \gamma_1))\ \Gamma(i(\lambda_2 - \gamma_1))\ \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_1 - \gamma_2). \tag{36}$$

Таким образом, мы получили волновую функцию в виде

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \iint \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_1\, e^{i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2}\ F(\gamma_1, \gamma_2|\lambda_1, \lambda_2). \tag{37}$$

Поймём, когда этот интеграл сходится.

Какие могут возникнуть проблемы? Во-первых, нужно, чтобы контур интегрирования не проходил через полюса. Во-вторых, вначале мы делали замену переменных $\gamma_1 \to \gamma_1 + i$, $\gamma_2 \to \gamma_2 - i$ и деформировали контур к исходному виду, полагая, что при деформировании не «цепляемся» за полюса.

Гамма-функция определяется через интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\ e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{38}$$

и имеет полюса в нуле и целых отрицательных числах, например, $\Gamma(i(\lambda_k - \gamma_1))$ имеет полюса в точках

$$\mathrm{Re}\ (i(\lambda_k - \gamma_1)) = m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{39}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\ \gamma_1 = \mathrm{Im}\ \lambda_k - m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Таким образом, достаточно, чтобы $\mathrm{Im}\ \gamma_1 > \mathrm{Im}\ \lambda_k$ для всех k, если $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Числа λ_k входят в полином $a(u)$ и соответствуют собственным числам физических операторов цепочки Тоды (гамильтониана и полного импульса), поэтому разумно требовать, чтобы λ_k были вещественными (хотя по нашему изложению, кажется, допустимым, например, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$).

Сделаем ещё несколько замечаний.

1. Интеграл сходится
   - Если контур интегрирования такой, что $\forall k\colon \mathrm{Im}\ \gamma_1 > \mathrm{Im}\ \lambda_k$, то не возникает проблем с полюсами
   - $\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z}$ при $|z| \to \infty$. Тогда гамма-функции под интегралом при $|\mathrm{Re}\ \gamma_1| \to \infty$

     $$|\Gamma(i(\lambda_k - \gamma_1))| \sim |\gamma_1|^{\mathrm{Im}\ (\gamma_1 - \lambda_k) - 1/2} e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma_1|} \tag{41}$$

     быстро убывают.

2. Интеграл по переменной γ_2 можно взять

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathrm{d}\gamma\, \Gamma(i(\lambda_1 - \gamma))\ \Gamma(i(\lambda_2 - \gamma)) e^{i(\lambda_1+\lambda_2-\gamma)x_2} e^{i\gamma x_1}. \tag{42}$$

Такое представление называют представлением Меллина-Барнса.

3. У нас получилось, что можно совершить переход от волновой функции цепочки Тоды из одной частицы

$$\Psi(x|\lambda) = e^{i\lambda x}. \tag{43}$$

к двум, подействовав некоторым интегральным оператором, что очень похоже на то, как работает оператор рождения.

Помимо представления Меллина-Барнса можно получить ещё одно полезное представление. Для этого преобразуем гамма-функции под интегралом. Сначала сделаем замену переменных $t = e^y$, $z = i\alpha$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha y} e^{-e^y}\, \mathrm{d}y\,. \tag{44}$$

Подставим гамма-функции в таком виде в волновую функцию и проинтегрируем сначала по γ

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2&|\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \iiint \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\, e^{i(\lambda_1-\gamma)y_1 - e^{y_1}} e^{i(\lambda_2-\gamma)y_2 - e^{y_2}} e^{i(\lambda_1+\lambda_2-\gamma)x_2} e^{i\gamma x_1},\end{aligned} \tag{45}$$

затем по y_2

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2&|\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \iint \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\, e^{i\lambda_1 y_1 - e^{y_1}} e^{i\lambda_2 y_2 - e^{y_2}} e^{i(\lambda_1+\lambda_2)x_2} \delta(x_1 - x_2 - y_1 - y_2) \\ &= \int \mathrm{d}y\, e^{i\lambda_1(y+x_1) + i\lambda_2(x_1-y)} e^{-e^y - e^{x_1-x_2-y}}\end{aligned} \tag{46}$$

и сделаем замену $y \to y - x_2$

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2&|\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \int \mathrm{d}y \exp\left(i\lambda_2(x_1 + x_2 - y) - e^{y-x_2} - e^{x_1-y}\right)\ e^{i\lambda_1 y}.\end{aligned} \tag{47}$$

Полученное представление называется представлением Гаусса-Гивенталя и снова напоминает интегральный оператор рождения частицы, но со свёрткой в другом пространстве.

В результате мы получили два представления волновой функции цепочки Тоды для случая $N = 2$: представление Меллина-Барнса

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathrm{d}\gamma\, \mathcal{M}(\gamma|\lambda_1, \lambda_2|x_2)\Psi(x_1|\gamma) \tag{48}$$

и Гаусса-Гивенталя

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathrm{d}y\, \mathcal{G}(y|x_1, x_2|\lambda_2)\Psi(y|\lambda_1). \tag{49}$$

4 Представление Меллина-Барнса

Собственная функция для двух частиц в обоих представлений получается применением некоторых интегральных операторов к собственной функции одночастичной задачи. Это наблюдение подсказывает, что в случае цепочки из N частиц собственные функции оператора A

$$A_N(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = (u - \lambda_1)\cdots(u - \lambda_N)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) \tag{50}$$

можно построить по индукции. Здесь мы обозначили наборы переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$.

На самом деле условие (50) ещё и фиксирует нам действие операторов B, C, D на Ψ. На L-матрицу существует следующее уравнение

$$R(u - v)\overset{1}{L}(u)\overset{2}{L}(v) = \overset{2}{L}(v)\overset{1}{L}(u)R(u - v), \tag{51}$$

где помимо пространства функций, в котором действуют элементы L-матриц, мы завели два двумерных пространства, а индекс сверху говорит, в каком из них L-матрица действует нетривиально:

$$\overset{1}{L}(u) = L(u) \otimes \mathbb{1}_2, \qquad \overset{2}{L}(v) = \mathbb{1}_2 \otimes L(v).$$

Кроме того, R — это матрица 4×4, которая действует (нетривиально) в обоих двумерных пространствах и представляет собой линейную комбинацию единичной матрицы и матрицы-перестановки

$$R(u) = u\mathbb{1}_4 + iP = \begin{pmatrix} u+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & i & 0 \\ 0 & i & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+i \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Это уравнение называется уравнением Янга-Бакстера и проверяется прямым вычислением. Из него следует аналогичное уравнение на матрицу монодромии для всей цепочки

$$R(u-v)\overset{1}{T}_N(u)\overset{2}{T}_N(v) = \overset{2}{T}_N(v)\overset{1}{T}_N(u)R(u-v), \tag{53}$$

в чем легко убедиться, рассмотрев случай $N=2$.

$$R(u-v)\overset{1}{T}_2(u)\overset{2}{T}_2(v) = R(u-v)\overset{1}{L}_2(u)\overset{1}{L}_1(u)\overset{2}{L}_2(v)\overset{2}{L}_1(v) = \ldots$$

На первом шаге мы меняем местами вторую и третью L-матрицы, поскольку они действуют нетривиально в различных пространствах (о чём говорят их индексы).

$$\ldots = R(u-v)\overset{1}{L}_2(u)\overset{2}{L}_2(v)\overset{1}{L}_1(u)\overset{2}{L}_1(v) = \overset{2}{L}_2(v)\overset{1}{L}_2(u)R(u-v)\overset{1}{L}_1(u)\overset{2}{L}_1(v) = \ldots$$

Здесь мы уже воспользовались уравнением Янга-Бакстера для первых двух L-матриц: R-матрица через них «проехала» и поменяла их местами. Точно так же можно сделать со второй парой L-матриц.

$$\ldots = \overset{2}{L}_2(v)\overset{1}{L}_2(u)\overset{2}{L}_1(v)\overset{1}{L}_1(u)R(u-v) = \overset{2}{L}_2(v)\overset{2}{L}_1(v)\overset{1}{L}_2(u)\overset{1}{L}_1(u)R(u-v).$$

Наконец, L-матрицы в середине снова коммутируют, и в последнем переходе мы их поменяли местами. В получившемся выражении легко распознать исходные матрицы монодромии.

$$\ldots = \overset{2}{T}_2(v)\overset{1}{T}_2(u)R(u-v).$$

Дальнейший план действий: уравнение на матрицу монодромии (53) поможет нам посчитать действие оператора C на собственные функции оператора A, что в свою очередь позволит нам построить их по индукции.

Равенство (21)-элементов в матричном соотношении (53) записывается как

$$(u-v)A(u)C(v) + iC(u)A(v) = (u-v+i)C(v)A(u). \tag{54}$$

Применим это соотношение к функции $\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})$, положив $v=\lambda_k$. Тогда, следуя условию (50), второе слагаемое слева уйдет, и мы получим

$$\begin{aligned}(u-\lambda_k)A(u)C(\lambda_k)\Psi &= (u-\lambda_k+i)C(\lambda_k)A(u)\Psi \\ &= (u-\lambda_k+i)\prod_{s=1}^{N}(u-\lambda_s)C(\lambda_k)\Psi.\end{aligned} \tag{55}$$

Сокращая $(u-\lambda_k)$ справа и слева,

$$A(u)C(\lambda_k)\Psi=(u-\lambda_k+i)\prod_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{N}(u-\lambda_s)C(\lambda_k)\Psi, \tag{56}$$

получаем, что $C(\lambda_k)\Psi$ тоже является собственной функцией оператора A, но с одним сдвинутым квантовым числом $\lambda_k\to\lambda_k-i$.

Поскольку условие (50) фиксирует собственные функции с точностью до нормировки, отнормируем их так, чтобы

$$C(\lambda_k)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})=i^{-N-1}\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}-i\boldsymbol{e}_k), \tag{57}$$

где $\boldsymbol{e}_k$ — набор из $N-1$ нуля и одной единицы на k-ом месте. Можно убедиться в том, что для уже привычной одночастичной функции $\Psi(x|\lambda)=e^{i\lambda x}$ это условие выполняется:

$$C_{N=1}(u)=-e^{x},\qquad C(\lambda)\Psi(x|\lambda)=-e^{i(\lambda-i)x}=i^{-2}\Psi(x|\lambda-i).$$

Оно также выполняется для построенной ранее двухчастичной функции. Такой выбор нормировки как-то связан с теорией представлений и векторами Виттекера — узнаем потом.

Поскольку $C(u)$ — полином $N-1$ степени по u, его действие при произвольном u можно восстановить, воспользовавшись интерполяционной формулой Лагранжа,

$$C(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})=i^{-N-1}\sum_{k=1}^{N}\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}-i\boldsymbol{e}_k)\prod_{m\neq k}\frac{u-\lambda_m}{\lambda_k-\lambda_m}. \tag{58}$$

Аналогично можно посчитать действие операторов B (он будет повышать λ_k на i) и D, но пока нам пригодится только эта формула.

Собственные функции будем строить индуктивным образом. Пусть знаем собственную функцию $\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})$ для $N-1$ частицы; здесь мы обозначили $\boldsymbol{x}'=(x_1,\ldots,x_{N-1})$, $\boldsymbol{\gamma}'=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{N-1})$. Тогда искомую N-частичную функцию, как и в случае $N=2$, разложим по $(N-1)$-частичным и одночастичным функциям

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})=\int \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\,\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}')e^{i\mu x_N}F(\mu,\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}). \tag{59}$$

Контура интегрирования выберем так, чтобы этот интеграл сходился. Заметим, что одно интегрирование снова снимется дельта-функцией. В соотношении (50) при u^{N-1} слева, как мы уже знаем, стоит оператор полного импульса

$$\Big(-\sum_{j=1}^{N} p_j\Big)\Psi = \Big(-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\Big)\Psi.$$

Подставляя наше разложение в последнюю формулу (для $N-1$ верна аналогичная формула с γ_j), сразу получаем условие на F

$$\Big(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j - \sum_{j=1}^{N-1}\gamma_j - \mu\Big)F = 0. \tag{60}$$

Отсюда следует, что F содержит дельта-функцию от выражения в скобках, и интегрирование по μ можно снять

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\, \Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}')e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma)x_N}F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}). \tag{61}$$

Чтобы найти F, нужно действовать на эту функцию оператором A_N. На элементы матрицы монодромии

$$T_N(u) = \begin{pmatrix} u-p_N & e^{-x_N} \\ -e^{x_N} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{N-1}(u) & B_{N-1}(u) \\ C_{N-1}(u) & D_{N-1}(u)\end{pmatrix}, \tag{62}$$

очевидно, есть индукционные соотношения, выпишем два из них:

$$A_N(u) = (u-p_N)A_{N-1}(u) + e^{-x_N}C_{N-1}(u), \tag{63}$$
$$C_N(u) = -e^{x_N}A_{N-1}(u). \tag{64}$$

Условия (50), (58) выполнены для $(N-1)$-частичной функции, поэтому с учётом предпоследней формулы легко написать действие оператора A_N

$$A_N(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}' \Bigg[\prod_{k=1}^{N-1}(u-\gamma_k)\Big(u-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j+\sum_{j=1}^{N-1}\gamma\Big)\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}')e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma)x_N}$$
$$+i^{-N}\sum_{k=1}^{N-1}\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}'-i\boldsymbol{e}_k)\prod_{m\neq k}\frac{u-\gamma_m}{\gamma_k-\gamma_m}e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma+i)x_N}\Bigg]F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}). \tag{65}$$

С другой стороны, эта функция будет собственной, если

$$A_N(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{s=1}^{N}(u-\lambda_s)\int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\,\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}')e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma)x_N}F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}). \tag{66}$$

Чтобы получить отсюда условие на F, нужно сделать замену $\gamma_k \to \gamma_k + i$ и сдвинуть контур вниз на i к исходному в соответствующих слагаемых в действии оператора A_N (подразумевается, что контура интегрирования выбраны так, что при сдвиге мы не задеваем особенностей функции F). Проделав это, получим разностное уравнение на F

$$\prod_{k=1}^{N-1}(u-\gamma_k)\Big(u-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j+\sum_{j=1}^{N-1}\gamma_j\Big)F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda})$$
$$+\,i^{-N}\sum_{k=1}^{N-1}F(\boldsymbol{\gamma}'+i\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{\lambda})\prod_{m\neq k}\frac{u-\gamma_m}{\gamma_k-\gamma_m+i}=\prod_{s=1}^{N}(u-\lambda_s)F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}). \quad (67)$$

Положим в нём $u=\gamma_j$, тогда

$$F(\boldsymbol{\gamma}'+i\boldsymbol{e}_j|\boldsymbol{\lambda})=i^N\prod_{m\neq j}\frac{\gamma_j-\gamma_m+i}{\gamma_j-\gamma_m}\prod_{s=1}^{N}(\gamma_j-\lambda_s)F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}). \quad (68)$$

Индекс j пробегает значения $1\ldots N-1$. Решение такой системы из $N-1$ уравнения записывается через гамма-функции

$$F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda})=\frac{\prod_{j=1}^{N-1}\prod_{s=1}^{N}\Gamma(i(\lambda_s-\gamma_j))}{\prod_{j<m}\Gamma(i(\gamma_m-\gamma_j))\Gamma(i(\gamma_j-\gamma_m))}. \quad (69)$$

Для проверки этого утверждения нужно знать только, что $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

Убедимся, что и нормировка полученной функции такая, как надо:

$$\begin{aligned}
&C_N(\lambda_k)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})\\
&\quad=-e^{x_N}A_{N-1}(\lambda_k)\int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\,\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}')e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma)x_N}F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda})\\
&\quad=-\int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\prod_{j=1}^{N-1}(\lambda_k-\gamma_j)\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}')e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma-i)x_N}F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda})\\
&\quad=i^{-N-1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\,\Psi(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma-i)x_N}F(\boldsymbol{\gamma}'|\boldsymbol{\lambda}-i\boldsymbol{e}_k), \quad (70)
\end{aligned}$$

где мы воспользовались явным видом F. Коэффициент перед интегралом получился правильный.

Итак, собственные функции в представлении Меллина-Барнса получаются итерационной процедурой как

$$\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})=\int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}'\,\frac{\prod_{j=1}^{N-1}\prod_{s=1}^{N}\Gamma(i(\lambda_s-\gamma_j))}{\prod_{j\neq m}\Gamma(i(\gamma_m-\gamma_j))}e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma)x_N}\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}'). \quad (71)$$

Подынтегральная функция имеет полюса в точках

$$\lambda_s = \gamma_j - ik, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \tag{72}$$

поэтому, чтобы интеграл сходился и мы могли безопасно сдвигать контур вниз на i, контура интегрирования должны быть в области $\operatorname{Im}\gamma_j > \operatorname{Im}\lambda_s$ для всех j, s.

5 Представление Гаусса-Гивенталя

Научимся строить другое интегральное представление для собственных функций цепочки Тоды — представление Гаусса-Гивенталя. Его появление уже было анонсировано, когда разбирался случай двух частиц (47).

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathrm{d}y \exp\left(i\lambda_2(x_1 + x_2 - y) - e^{y-x_2} - e^{x_1-y}\right)\ e^{i\lambda_1 y}.$$

Как обсуждалось в начале, $A_N(u)$ — полином по u, где в качестве коэффициентов хранятся интегралы движения (19)

$$A_N(u) = \sum_{m=0}^{N}(-1)^m u^{N-m} H_m.$$

Мы решаем задачу на собственные функции (50)

$$A_N(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = (u - \lambda_1)\cdots(u - \lambda_N)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}),$$

или, что почти то же самое,

$$\forall j,\ A_N(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})\Big|_{u=\lambda_j} = 0. \tag{73}$$

Все H_m коммутируют, значит одновременно диагонализуются, а их спектр определяется набором $\{\lambda_i\}$

$$H_m\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = E_m\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}), \quad E_m = \sum_{j_1<\ldots<j_m} \lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_m}. \tag{74}$$

Причём мы будем искать их в предположении, что собственные функции симметричны относительно перестановок λ_i

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \Psi(\boldsymbol{x}|\sigma(\boldsymbol{\lambda})). \tag{75}$$

Условие симметричности позволяет вместо (73) требовать

$$A(\lambda_1)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = 0, \tag{76}$$

а равенство нулю во всех остальных точках выполнится по симметрии.

Строить новое представление опять будем по индукции. Отличие в том, что при итерации свёртка будет идти по координатам, а не по параметрам λ, как это было в представлении Меллина-Барнса.

Начнём с того, что сделаем некоторый трюк (Паскье-Годена). Применим к L-матрице (3) преобразование.

$$\tilde{L}_n = K_n L_n(u) {K_{n-1}}^{-1}, \tag{77}$$

где

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ie^{y_n} & 1 \end{pmatrix}, \quad {K_n}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ie^{y_n} & 1 \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Тогда новая матрица (монодромии) $\tilde{T}$ аналогичная (4)

$$\tilde{T}_N(u) = \tilde{L}_N \dots \tilde{L}_1 = K_N T_N(u) {K_0}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_N(u) & \tilde{B}_N(u) \\ \tilde{C}_N(u) & \tilde{D}_N(u) \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Элементы $\tilde{T}_N$ выражаются через T при помощи

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_N(u) & \tilde{B}_N(u) \\ \tilde{C}_N(u) & \tilde{D}_N(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ie^{y_N} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ie^{y_0} & 1 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Нам будет нужен явный вид только $\tilde{C}_N(u)$, выпишем его

$$\tilde{C}_N(u) = ie^{y_N} A_N(u) + e^{y_N+y_0} B_N(u) + C_N(u) - ie^{y_0} D_N(u). \tag{81}$$

Трюк сделали, но пока непонятно как всё это связано с изначальной задачей по поиску собственных функций $A_N(u)$. Для того, чтобы добавить немного ясности, посмотрим на предел

$$-i\tilde{C}_N(u)e^{-y_N} \xrightarrow[\substack{y_0\to-\infty,\\ y_N\to+\infty}]{} A_N(u) \tag{82}$$

То есть теперь вместо того, чтобы искать функции на которых оператор $A_N(u)$ равен нулю, мы можем искать такие для $\tilde{C}_N(u)$. Это оказывается гораздо удобнее при итерационном построении. Действительно, выберем для каждого оператора $\tilde{L}_n(u)$ «вакуум», то есть функцию w_n такую, что

$$\left(\tilde{L}_n(u)\right)_{21} w_n = 0. \tag{83}$$

Умножение верхнетреугольных матриц устроено таким образом, что в качестве глобального «вакуума» можно взять произведение w_n во всех узлах, то есть

$$\left(\tilde{T}_N(u)\right)_{21}\prod_{n=1}^{N} w_n = \tilde{C}_N(u)\prod_{n=1}^{N} w_n = 0. \tag{84}$$

После чего взять от найденной функции предел, соответствующий (82).

План построения собственных функций $A_N(u)$ у нас есть, значит пора приступать к его исполнению. Начнём с того, что найдём явно w_n.

Из явного вида L-матрицы (3) и (81) несложно получить

$$\begin{aligned}\left(\tilde{L}_n(u)\right)_{21} &= ie^{y_n}(u-\hat{p}_n) + e^{y_n+y_{n-1}}e^{-x_n} - e^{x_n}\\ &= ie^{y_n}(u-\hat{p}_n - ie^{y_{n-1}-x_n} + ie^{x_n-y_n}).\end{aligned} \tag{85}$$

Задача (83) сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка, с разделяющимися переменными. Таким образом,

$$w_n = \exp\left[iu(x_n - y_{n-1}) - e^{y_{n-1}-x_n} - e^{x_n-y_n}\right], \tag{86}$$

а глобальный «вакуум»

$$W = \prod_{n=1}^{N} w_n = \exp\left[iu\sum_{n=1}^{N}(x_n - y_{n-1}) - \sum_{n=1}^{N}\left(e^{y_{n-1}-x_n} + e^{x_n-y_n}\right)\right]. \tag{87}$$

Перед тем, как переходить к пределу, немного изменим «вакуум»

$$\tilde{C}_N(u)W = 0 \Rightarrow -i\tilde{C}_N(u)e^{-y_N}\cdot We^{iuy_0} = 0. \tag{88}$$

Первый множитель в пределе обращается в $A_N(u)$, а второй

$$We^{iuy_0} \xrightarrow[\substack{y_0\to-\infty,\\ y_N\to+\infty}]{} \Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},u), \tag{89}$$

где

$$\Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}',u) = \exp\left[iu\sum_{n=1}^{N}x_n - iu\sum_{n=1}^{N-1}y_n - \sum_{n=1}^{N-1}\left(e^{y_n-x_{n+1}} + e^{x_n-y_n}\right)\right]. \tag{90}$$

То есть получили, что

$$A_N(u)\Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},u)\Big|_{u=\lambda_j} = 0. \tag{91}$$

Теперь попробуем построить собственные функции итерационно, используя $\Lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},u)$ как ядро интегрального оператора. Иными словами

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}^{N-1}\boldsymbol{y}\,\Lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\lambda_N)\Psi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\lambda}'), \tag{92}$$

здесь используется обозначение $\boldsymbol{\lambda}' = \{\lambda_i\}_{i=1}^{N-1}$. Для того, чтобы полученный результат действительно был собственной функцией, надо показать, что он симметричен. Это можно сделать напрямую, но мы воспользуемся диаграммной техникой.

Диаграммная техника

В этой главе мы получили представление Гаусса-Гивенталя для N-частичной волновой функции

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}^{N-1}\boldsymbol{y}\,\Lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\lambda_N)\Psi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\lambda}'), \tag{93}$$

где ядро оператора задаётся соотношением

$$\Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}',u) = \exp\left[iu\sum_{n=1}^{N} x_n - iu\sum_{n=1}^{N-1} y_n - \sum_{n=1}^{N-1}\left(e^{y_n - x_{n+1}} + e^{x_n - y_n}\right)\right]. \tag{94}$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_N)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ и $\boldsymbol{y}' = (y_1,\dots,y_{N-1})$.

Однако нам ещё осталось показать, что такая волновая функция инвариантна относительно перестановок квантовых чисел $\{\lambda_i\}_1^N$. Оказывается, что это довольно просто сделать при помощи диаграммной техники. Заведем правила Фейнмана в следующем виде

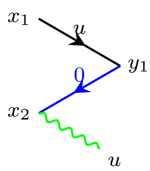
$$\begin{aligned} x \xrightarrow{\;\;v\;\;} y \quad &= \exp\left(iv(x-y) - e^{x-y}\right) \\ x \overset{v}{\rightsquigarrow} \quad &= \exp\left(ivx\right) \end{aligned} \tag{95}$$

Чтобы проиллюстрировать, как пользоваться правилами, построим ядро оператора Λ_N для $N=2$

$$\Lambda_2(x_1,x_2|y_1,u) = \exp\left[iu(x_1+x_2) - iuy_1 - \left(e^{y_1-x_2} + e^{x_1-y_1}\right)\right]. \tag{96}$$

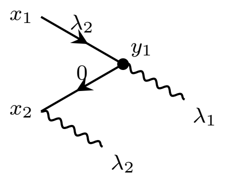
Перегруппируем слагаемые в экспоненте и нарисуем диаграмму

$$\exp\left[iu(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2} + iux_2\right] = \tag{97}$$

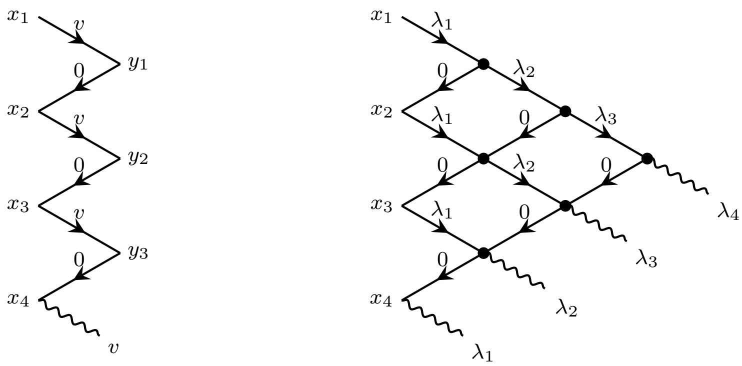


Теперь построим двухчастичную волновую функцию. Для этого нужно свернуть оператор Λ_2 с одночастичной волновой функцией

$$\Psi_2(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathrm{d}y\, \Lambda(x_1, x_2|y, \lambda)\; e^{i\lambda y} = \tag{98}$$



По выделенной вершине проводится интегрирование. Посмотрев внимательно на эти примеры, можно построить ядро оператора Λ_N и волновую функцию в случае N частиц.



(a) (b)

Рис. 1: Диаграммы в случае $N = 4$ для: (a) оператора Λ_n, (b) волновой функции Ψ_N.

С диаграммами мы разобрались, теперь покажем инвариантность построенной функции относительно перестановок параметров λ. Если докажем для транспозиции двух параметров, то автоматически получим доказательство для произвольной перестановки.

Для доказательства нам понадобятся несколько диаграммных тождеств. Основным тождеством является сплетающее соотношение, изображённое на рисунке 2. Это тождество позволяет нам переставлять параметры на рёбрах, протаскивая вспомогательное ребро S_{u-v} через диаграмму.

Сейчас предъявим функцию S_{u-v}, а доказательство вынесем в аппендикс A

$$S_{u-v}(y, x) = \left(1 + e^{y-x}\right)^{-i(u-v)}. \tag{99}$$

Заметим, что функция 99 удовлетворяет тождеству

$$S_{u-v}(y, x) \cdot S_{v-u}(y, x) = 1, \tag{100}$$

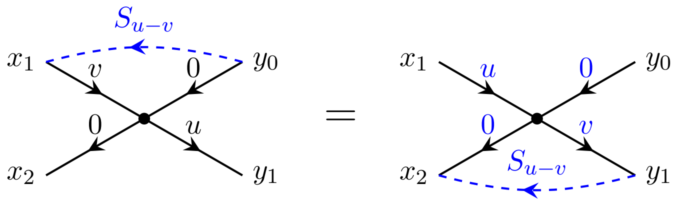
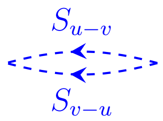


Рис. 2: Сплетающее соотношение

что на языке диаграмм позволяет нам вставлять тождественную единицу внутрь диаграммы между двумя произвольными вершинами



$$= 1. \tag{101}$$

Чтобы поменять два параметра $u \leftrightarrow v$ в диаграмме вставим тождественную единицу внутрь диаграммы и, используя сплетающие соотношение, пронесём вспомогательные рёбра до верхней и нижней границ, как показано на рисунке 3. Теперь нам нужно обработать края и избавиться от вспомогательных рёбер S_{u-v}.

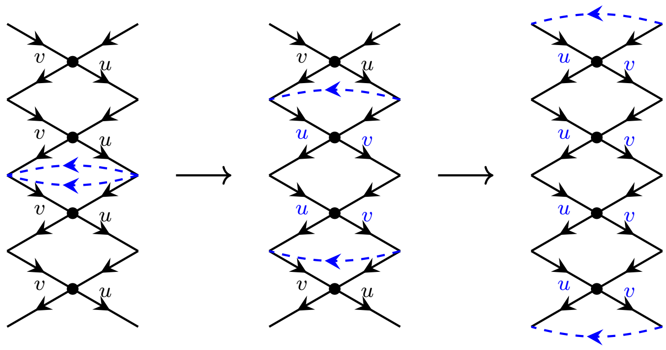
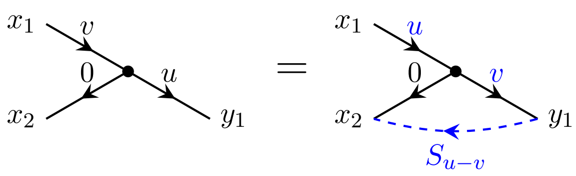


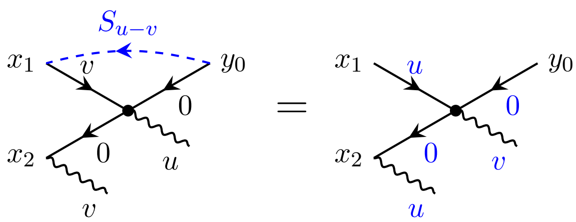
Рис. 3

Для этого нам понадобятся ещё два диаграммных тождества, изображённые на рисунке 4, вывод которых тесно связан со сплетающим соотношением, и доказательства которых также можно посмотреть аппендиксе A.

Таким образом, мы аннигилируем вспомогательные рёбра на границах, переставив параметры нужным образом. В результате получаем, что волновая функция инвариантна относительно элементарных транспозиций и следовательно, относительно любой перестановке параметров.



(a) Тождество для верхней границы



(b) Тождество для нижней границы

Рис. 4

6 Ещё раз о том же самом

В этой части мы расскажем про ещё один способ построить представление Гаусса-Гивенталя для собственных функций цепочки из N частиц. Вспомним, что в случае двух частиц

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathrm{d}y \exp\left(i\lambda_2(x_1 + x_2 - y) - e^{x_1 - y} - e^{y - x_2}\right) e^{i\lambda_1 y}.$$

Заметим (в который раз), что это выражение можно записать как действие интегрального оператора на одночастичную функцию $\Psi(x_1|\lambda_1) = e^{i\lambda_1 x_1}$. Введём R-оператор, действующий на функциях от двух переменных,

$$\begin{aligned}&\big(R_{12}(v)f\big)(x_1, x_2)\\ &= \int \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \exp\left(iv(x_1 - y_1) - e^{x_1 - y_1} - e^{y_1 - x_2}\right) \delta(y_2 - x_1) f(y_1, y_2).\end{aligned} \tag{102}$$

Нижние индексы у оператора говорят, по каким переменным x_j он действует. Тогда волновая функция запишется как

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = e^{i\lambda_2 x_2} R_{12}(\lambda_2) \cdot \Psi(x_1|\lambda_1). \tag{103}$$

Эта, на первый взгляд, замысловатая конструкция (зачем мы выделили одну экспоненту?) даст плоды, когда мы перейдем к N частицам. Оказывается, что введенный R-оператор играет какую-то более глубокую роль, и дальше мы покажем, что с помощью него собственная функция строится по индукции

$$\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = e^{i\lambda_N x_N} R_{N-1\,N}(\lambda_N) \cdots R_{1\,N}(\lambda_N) \cdot \Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\lambda}'), \tag{104}$$

где $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$, $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1})$.

Знаменитому уравнению Янга-Бакстера (51) с R-матрицей[1] (52), помимо уже привычной нам L-матрицы цепочки Тоды, удовлетворяет L-матрица другой физической модели, которая называется DST-цепочкой (*dimer self-trapping*). Иначе говоря, обозначив, чтобы не спутать с Тодой, эту новую L-матрицу буквой M

$$M(u) = \begin{pmatrix} u - p & e^{-x} \\ -ie^{x}p & i \end{pmatrix},$$

[1] R-матрица и введенный выше R-оператор — разные объекты, которые в литературе часто обозначаются одной буквой. Но читатель может вздохнуть спокойно, поскольку это последнее место, где они встречаются рядом.

можно проверить выполнение уравнения

$$R(u-v)\overset{1}{M}(u)\overset{2}{M}(v) = \overset{2}{M}(v)\overset{1}{M}(u)R(u-v).$$

Как это все связано? Оказывается, что возникший в двухчастичной задаче R-оператор переставляет местами L-операторы для Тоды и DST-цепочки

$$R_{12}(v)L_1(u)M_2(u-v) = M_2(u-v)L_1(u)R_{12}(v). \tag{105}$$

Матрицы L и M действуют здесь в одном двумерном пространстве, а их элементы в разных пространствах функций (по x_1 и x_2); R-оператор действует тривиально в этом двумерном пространстве и как интегральный оператор по обеим переменным. Это соотношение доказывается прямой подстановкой, и доказательство можно найти в аппендиксе B, *который написал Миша*.

Чтобы добыть из последней формулы собственную функцию, немного её продеформируем, домножив слева на e^{ivx_2},

$$e^{ivx_2}R_{12}(v)L_1(u)M_2(u-v) = \hat{M}_2(u,v)L_1(u)e^{ivx_2}R_{12}(v), \tag{106}$$

где, чтобы справа поднести экспоненту к R, мы обернули матрицу M

$$\hat{M}(u,v) = e^{ivx}M(u-v)e^{-ivx} = \begin{pmatrix} u+i\partial & e^{-x} \\ -e^{x}(-iv+\partial) & i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что у матриц $\hat{M}(u,v)$ и $L(u)$ одинаковые первые строчки. Поэтому, если в выражении (106) подействовать на функцию только от x_1 и посмотреть на (11)-элементы, получается формула

$$(u-v)\, e^{ivx_2}R_{12}(v)\, A_1(u)\, f(x_1) = A_2(u)\, e^{ivx_2}R_{12}(v)\, f(x_1).$$

От матрицы M слева остался только множитель $(u-v)$, поскольку первый её столбец содержит производные по x_2, которые зануляются при действии на $f(x_1)$. Теперь если взять $f = \Psi(x_1|\lambda_1)$, с точностью до переобозначения $v = \lambda_2$ возникнет уже известная формула (103) для собственной функции оператора A_2.

Из локального соотношения следует уравнение для всей цепочки

$$\begin{aligned} &e^{ivx_N}R_{N-1\,N}(v)\cdots R_{1\,N}(v)\, L_{N-1}(u)\cdots L_1(u)\, M_N(u-v) \\ &\qquad = \hat{M}_N(u,v)\, L_{N-1}(u)\cdots L_1(u)\, e^{ivx_N}R_{N-1\,N}(v)\cdots R_{1\,N}(v). \end{aligned}$$

Оно получается, если пронести каждый оператор $R_{j\,N}$ слева направо, переставляя местами соответствующие матрицы L_j и M_N по правилу

(105). Последний R-оператор идёт вместе с экспонентой, поэтому на M в конце надевается шляпа, как в (106).

Если, как и раньше, посмотреть на равенство (11)-элементов, то на пространстве функций от переменных $x_1, \ldots, x_{N-1}$ получим

$$\begin{aligned} &A_N(u)\, e^{ivx_N} R_{N-1\,N}(v) \cdots R_{1\,N}(v)\, f(x_1, \ldots, x_{N-1}) \\ &\qquad = (u-v)\, e^{ivx_N} R_{N-1\,N}(v) \cdots R_{1\,N}(v)\, A_{N-1}(u)\, f(x_1, \ldots, x_{N-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, взяв в качестве функции f собственную функцию оператора A_{N-1}

$$A_{N-1}(u)\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\lambda}') = (u-\lambda_1)\cdots(u-\lambda_{N-1})\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\lambda}') \tag{107}$$

и положив $v = \lambda_N$, находим

$$\begin{aligned} &A_N(u) \left[e^{i\lambda_N x_N} R_{N-1\,N}(\lambda_N) \cdots R_{1\,N}(\lambda_N)\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\lambda}')\right] \\ &\quad = (u-\lambda_1)\cdots(u-\lambda_N)\left[e^{i\lambda_N x_N} R_{N-1\,N}(\lambda_N) \cdots R_{1\,N}(\lambda_N)\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\lambda}')\right]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках, очевидно, является собственной функцией оператора A_N.

Как и в прошлый раз, наша волновая функция снова получилась применением интегрального оператора к функции меньшего числа частиц

$$\begin{aligned} \Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) &= e^{i\lambda_N x_N} R_{N-1\,N}(\lambda_N) \cdots R_{1\,N}(\lambda_N)\, \Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\lambda}') \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{y}\, \Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}, \lambda_N)\Psi_{N-1}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\lambda}'), \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{N-1})$. При этом ядро оператора перехода не зря снова названо Λ_N. Используя определение R-оператора (102), находим

$$\Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}, v) = \exp\left(iv\sum_{j=1}^{N} x_j - iv\sum_{j=1}^{N-1} y_j - \sum_{j=1}^{N-1} e^{x_j - y_j} - \sum_{j=1}^{N-1} e^{y_j - x_{j+1}}\right),$$

что совпадает с формулой (90).

Итого, мы предъявили ещё один способ построить собственную функцию в представлении Гаусса-Гивенталя. Но остаётся много вопросов. Как связаны друг с другом эти два способа? Почему вдруг здесь возникла ещё одна модель — DST-цепочка? Где течёт река Нева? А когда же спит сова? И так далее.

В представлении Меллина-Барнса собственная функция получалась симметричной автоматически, а для Гаусса-Гивенталя это было показано с помощью диаграммной техники. Возникает вопрос, эквивалентны ли эти представления? Иначе говоря, можно ли явно совершить переход от одного к другому, как это получилось сделать в случае $N = 2$. Всё это мы обсудим в следующих частях после того, как ещё немного узнаем о свойствах R-оператора.

7 Q-оператор

В этой части мы определим так называемый Q-оператор Бакстера. В будущем он нам пригодится, когда будем делать переход от одного представления собственной функции к другому. А может, и ещё зачем-то пригодится.

Вернемся к формуле (105). Применяя её N раз, получаем глобальное соотношение

$$\begin{aligned} R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v)\,L_N(u)\cdots L_1(u)\,M_{N+1}(u-v) \\ = M_{N+1}(u-v)\,L_N(u)\cdots L_1(u)\,R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v). \end{aligned} \tag{108}$$

Вспоминая, что

$$M_{N+1}(u-v) = \begin{pmatrix} u-v+i\partial_{N+1} & e^{-x_{N+1}} \\ -e^{x_{N+1}}\partial_{N+1} & i \end{pmatrix}$$

$$L_N(u)\cdots L_1(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix},$$

выпишем отдельно равенство (11)-элементов

$$\begin{aligned} R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v)\Big(A_N(u)(u-v+i\partial_{N+1}) - B_N(u)e^{x_{N+1}}\partial_{N+1}\Big) \\ = \Big((u-v+i\partial_{N+1})A_N(u) + e^{-x_{N+1}}C_N(u)\Big)R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v). \end{aligned}$$

Если мы подействуем в этом выражении на функцию только от переменных $x_1,\ldots,x_N$, производные по x_{N+1} в левой части уйдут. Справа производная из первого слагаемого упадёт на каждый R-оператор в произведении

$$\begin{aligned} \partial_{N+1}R_{j\,N+1}(v) &\doteq \partial_{x_{N+1}}\exp\big(iv(x_j-y_j) - e^{x_j-y_j} - e^{y_j-x_{N+1}}\big)\delta(y_{N+1}-x_j) \\ &= e^{y_j-x_{N+1}}\exp\big(iv(x_j-y_j) - e^{x_j-y_j} - e^{y_j-x_{N+1}}\big)\delta(y_{N+1}-x_j), \end{aligned}$$

где символ $\doteq$ переводится как "имеет ядро". Теперь когда, подействовав на функцию $f(x_1,\dots,x_N)$, мы отправим $x_{N+1}\to\infty$, как видно из формулы выше, слагаемые с производными от R-операторов уйдут, и точно так же уйдет слагаемое с $e^{-x_{N+1}}C_N$ справа. Останется

$$(u-v)\lim_{x_{N+1}\to\infty} R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v)\,A_N(u)\,f(x_1,\dots,x_N)$$
$$= (u-v)\,A_N(u)\lim_{x_{N+1}\to\infty} R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v)\,f(x_1,\dots,x_N). \quad (109)$$

Возможно стоит сначала рассмотреть случай $N = 2/3$.

Наконец, введем Q-оператор

$$Q_N(v) = \lim_{x_{N+1}\to\infty} R_{N\,N+1}(v)\cdots R_{1\,N+1}(v)\Big|_{\mathcal{H}[x_1,\dots,x_N]}.$$

Под последним символом имеется в виду сужение на пространство функций от переменных $x_1,\dots,x_N$, что на языке ядер означает интегрирование по переменной y_{N+1}

$$Q_N \doteq \lim_{x_{N+1}\to\infty}\int \mathrm{d}y_{N+1}\,\big(R_{N\,N+1}\cdots R_{1\,N+1}\big)(x_1,\dots,x_{N+1}|y_1,\dots,y_{N+1}).$$

Из соотношения (109) следует, что Q-оператор коммутирует с оператором A (при разных параметрах u и v)

$$[Q_N(v), A_N(u)] = 0. \quad (110)$$

Значит, их можно одновременно диагонализовать, и чуть позже мы покажем, что найденные нами собственные функции оператора A будут собственными и для Q-оператора.

Как выглядит ядро Q-оператора? В простейших случаях, пользуясь определением, находим

$$N=1:\qquad Q_1(v)\doteq \exp\big(iv(x_1-y_1)-e^{x_1-y_1}\big),$$
$$N=2:\qquad Q_2(v)\doteq \exp\big(iv(x_1+x_2-y_1-y_2)-e^{x_1-y_1}-e^{y_1-x_2}-e^{x_2-y_2}\big). \quad (111)$$

Как всегда, подразумевается, что интегрируем по y_j. Экспонент нечётное количество, поскольку в каждом R-операторе их по две, и x_{N+1} был отправлен на бесконечность. В общем случае

$$Q_N(v)\doteq \exp\left(iv\sum_{j=1}^{N}x_j - i\lambda\sum_{j=1}^{N}y_j - \sum_{j=1}^{N}e^{x_j-y_j} - \sum_{j=1}^{N-1}e^{y_j-x_{j+1}}\right).$$

Помимо коммутирования с производящей функцией сохраняющихся величин (110), Q-оператор обычно обладает ещё двумя свойствами. Во-первых, он коммутирует сам с собой

$$[Q_N(v), Q_N(u)] = 0,$$

и это свойство легко доказывается с помощью диаграммной техники *Написать док-во, когда появятся диаграммы* . Кроме того, из локального соотношения (105) при одинаковых параметрах $u = v$ можно вывести так называемое *уравнение Бакстера*, которое для этой модели принимает вид

$$Q_N(u)A_N(u) = (-i)^N Q_N(u-i).$$

Для полноты картины приведём здесь его вывод. Чтобы это сделать, нам понадобится немного переписать (105).

Матрицу M можно разложить на верхнюю и нижнюю треугольные:

$$M(u) = \begin{pmatrix} u+i\partial & e^{-x} \\ -e^{x}\partial & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ -e^{x}\partial & i \end{pmatrix} = U \cdot V.$$

Тогда из уравнения (105) (пока что $u \neq v$)

$$R_{12}(v)L_1(u)M_2(u-v) = M_2(u-v)L_1(u)R_{12}(v)$$

получаем, домножая на соответствующие матрицы слева и справа,

$$U_2^{-1}\, R_{12}(v)L_1(u)\, U_2 = V_2(u-v)\, L_1(u)R_{12}(v)\, V_2^{-1}(u-v),$$

причём обратная к V равна

$$V^{-1}(u) = \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ -iu^{-1}e^{x}\partial & -i \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц в правой части, если их всех перемножить, можно переписать в виде

$$\mathrm{RHS} = \begin{pmatrix} (u-v)R_{12}(v) - iR_{12}(v-i) & -i(u-v)e^{-x_1}R_{12}(v) \\ -e^{x_1}R_{12}(v+i) & ie^{x_2-x_1}\partial_2 R_{12}(v) \end{pmatrix}.$$

Здесь мы воспользовались явным видом R-оператора (102). Это вычисление довольно громоздкое и приведено в аппендиксе. *написать аппендикс*

Как видно, при $v=u$ справа остаётся треугольная матрица, то есть

$$U_2^{-1}R_{12}(u)L_1(u)U_2=\begin{pmatrix}-iR_{12}(u-i) & 0\\ -e^{x_1}R_{12}(u+i) & ie^{x_2-x_1}\partial_2 R_{12}(u)\end{pmatrix}.$$

Хочется отсюда получить формулу для Q-оператора. Для этого применим это тождество N раз и посчитаем

$$U_{N+1}^{-1}\,R_{N\,N+1}(u)\cdots R_{1\,N+1}(u)\,L_N(u)\cdots L_1(u)\,U_{N+1}$$
$$=\begin{pmatrix}(-i)^N R_{N\,N+1}(u-i)\cdots R_{1\,N+1}(u-i) & 0\\ \star & \star\end{pmatrix}.$$

Из-за того, что в локальном соотношении нам удалось заполучить справа треугольную матрицу, здесь в глобальном соотношении мы их легко перемножаем. Что стоит в нижней строчке, нам сейчас не важно, мы посмотрим только на элементы (1,1)

$$\begin{pmatrix}1 & -ie^{-x_{N+1}}\end{pmatrix}R_{N\,N+1}(u)\cdots R_{1\,N+1}(u)\begin{pmatrix}A_N(u)\\ C_N(u)\end{pmatrix}$$
$$=(-i)^N R_{N\,N+1}(u-i)\cdots R_{1\,N+1}(u-i).$$

Наконец, отправив $x_{N+1}\to\infty$, мы уничтожим слагаемое с C_N, и сузившись на функции от $x_1,\ldots,x_N$, получаем с обеих сторон Q-операторы

$$Q_N(u)A_N(u)=(-i)^N Q_N(u-i).$$

Это и есть анонсированное ранее уравнение Бакстера. Альтернативный вывод можно найти в лекциях Склянина, там используется трюк (77), но нам хотелось показать, что это уравнение можно получить и из соотношения на L-матрицы (105).

Последняя вещь, которую мы поймём про Q-оператор, — это то, как он действует на собственные функции оператора A. Оказывается, что эти функции являются собственными и для Q, а собственные числа выражаются через гамма-функции

$$Q_N(v)\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda})=\Gamma(i(v-\lambda_1))\cdots\Gamma(i(v-\lambda_N))\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}).$$

Для проверки этого утверждения, ввиду (92), достаточно посмотреть на то, как Q коммутирует с одним оператором перехода

$$Q_N(v)\Lambda_N(u)=\Gamma(i(v-u))\Lambda_N(u)Q_{N-1}(v).$$

Эту формулу легче всего доказать, посмотрев на соответствующую диаграмму. *написать док-во*

Последнее свойство нам понадобится, когда мы в следующей части будем доказывать эквивалентность двух представлений.

8 От Меллина-Барнса к Гауссу-Гивенталю

В этой части мы покажем, как из одного представления получить другое. Для наглядности, мы рассмотрим только случай $N = 3$, поскольку все трудности и идеи возникают уже там.

В случае двух частиц переход к представлению Гаусса-Гивенталя требовал только знания определения гамма-функции. Теперь простого превращения гамма-функций в интегралы от экспонент нам не хватит, в случае $N > 2$ гамма-функции есть ещё и в знаменателе (71). Чтобы убрать их из знаменателя и написать похожее представление, нам понадобится два ингредиента.

Первый из них — Q-оператор и то, как он действует на собственные функции

$$Q_2(\lambda)\Psi(x_1, x_2|\gamma_1, \gamma_2) = \Gamma(i(\lambda - \gamma_1))\Gamma(i(\lambda - \gamma_2))\Psi(x_1, x_2|\gamma_1, \gamma_2).$$

Здесь у нас всё схвачено из предыдущего параграфа.

Вторым ингредиентом перехода к другому представлению является следующий интеграл с гамма-функциями

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2 2!} \int \mathrm{d}\gamma_1\,\mathrm{d}\gamma_2\, &\frac{\prod_{j=1}^{2}\Gamma(i(\lambda_j - \gamma_1))\Gamma(i(\lambda_j - \gamma_2))}{\Gamma(i(\gamma_1 - \gamma_2))\Gamma(i(\gamma_2 - \gamma_1))} \\ &\times \Gamma(i(\gamma_1 - \alpha))\Gamma(i(\gamma_2 - \alpha))e^{i(\gamma_1+\gamma_2)s} \\ &= \exp(i(\lambda_1 + \lambda_2)s - e^s)\Gamma(i(\lambda_1 - \alpha))\Gamma(i(\lambda_2 - \alpha)), \end{aligned} \tag{112}$$

где контур интегрирования находится в области $\mathrm{Im}\ \alpha < \mathrm{Im}\ \gamma_{1,2} < \mathrm{Im}\ \lambda_{1,2}$.

Для доказательства этого соотношения воспользуемся так называемым *первым интегралом Густафсона*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2 2!} \int \mathrm{d}\gamma_1\,\mathrm{d}\gamma_2\, &\frac{\prod_{j=1}^{3}\Gamma(i(\lambda_j - \gamma_1))\Gamma(i(\lambda_j - \gamma_2))\Gamma(i(\gamma_1 - \alpha_j))\Gamma(i(\gamma_2 - \alpha_j))}{\Gamma(i(\gamma_1 - \gamma_2))\Gamma(i(\gamma_2 - \gamma_1))} \\ &= \frac{\prod_{j,k=1}^{3}\Gamma(i(\lambda_j - \alpha_k))}{\Gamma(i(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3))}, \end{aligned}$$

интегрирование в котором идет при $\mathrm{Im}\ \alpha_{1,2,3} < \mathrm{Im}\ \gamma_{1,2} < \mathrm{Im}\ \lambda_{1,2,3}$. Наша задача — превратить его в (112), и мы сделаем это в два шага. Шаг первый: положим

$$\lambda_3 = Ke^{-t}, \quad \alpha_3 = -K, \qquad K, t \in \mathbb{R},$$

разделим левую и правую части на $\Gamma^2(iKe^{-t})\Gamma^2(iK)$ и устремим $K \to +\infty$. В обеих частях у нас возникнут отношения гамма-функций с комплексным аргументом, стремящимся к бесконечности, для которых можно воспользоваться формулой Стирлинга

$$\frac{\Gamma(i(Ke^{-t}-\beta))}{\Gamma(iKe^{-t})} \sim \big(iKe^{-t}\big)^{-i\beta} e^{i\beta}, \quad \frac{\Gamma(i(\beta+K))}{\Gamma(iK)} \sim \big(iK\big)^{i\beta} e^{-i\beta},$$
$$\frac{\Gamma(i(Ke^{-t}+K))}{\Gamma(i(Ke^{-t}+K+\beta))} \sim \big(iK(1+e^{-t})\big)^{-i\beta} e^{i\beta},$$

где в роли β будут выступать $\lambda_j, \gamma_j, \alpha_j$ и $\lambda_1+\lambda_2-\alpha_1-\alpha_2$. Применяя эти соотношения к интегралу Густафсона, в пределе получаем формулу

$$\frac{1}{(2\pi)^2 2!} \int \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_2\, \frac{\prod_{j=1}^{2} \Gamma(i(\lambda_j-\gamma_1))\Gamma(i(\lambda_j-\gamma_2))\Gamma(i(\gamma_1-\alpha_j))\Gamma(i(\gamma_2-\alpha_j))}{\Gamma(i(\gamma_1-\gamma_2))\Gamma(i(\gamma_2-\gamma_1))}$$
$$\times e^{i(\gamma_1+\gamma_2)t} = \big(1+e^t\big)^{i(\alpha_1+\alpha_2-\lambda_1-\lambda_2)t} e^{i(\lambda_1+\lambda_2)t} \prod_{j,k=1}^{2} \Gamma(i(\lambda_j-\alpha_k)).$$

Следующий шаг — ещё одна редукция, положим

$$\alpha_2 = -K, \quad t = s - \ln(iK), \qquad K, s \in \mathbb{R},$$

разделим обе части на $\Gamma^2(iK)$ и снова устремим $K \to +\infty$. Выпишем множители, содержащие K, под интегралом слева

$$\frac{\Gamma(i(\gamma_1+K))\Gamma(i(\gamma_2+K))}{\Gamma^2(iK)} e^{-i(\gamma_1+\gamma_2)\ln(iK)} \longrightarrow 1,$$

и также справа

$$\frac{\Gamma(i(\lambda_1+K))\Gamma(i(\lambda_2+K))}{\Gamma^2(iK)} e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)\ln(iK)} \big(1+e^s/iK\big)^{i(\alpha_1-\lambda_1-\lambda_2)-iK}$$
$$\longrightarrow \exp(-e^s).$$

Получившееся в этом втором пределе соотношение совпадает с (112) после замены $\alpha_1 \to \alpha$.

Теперь все ингредиенты собраны, и мы можем осуществить переход от Меллина-Барнса к Гауссу-Гивенталю. Первая мысль: нужно увидеть интеграл (112) в выражении для собственной функции

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}\gamma_1\, \mathrm{d}\gamma_2\, \frac{\prod_{j=1}^{3} \Gamma(i(\lambda_j-\gamma_1))\Gamma(i(\lambda_j-\gamma_2))}{\Gamma(i(\gamma_1-\gamma_2))\Gamma(i(\gamma_2-\gamma_1))}$$
$$\times\, e^{i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\gamma_1-\gamma_2)x_3} \Psi(x_1, x_2|\gamma_1, \gamma_2)$$

Для этого под интегралом воспользуемся Q-оператором, чтобы убрать две гамма-функции, и запишем двухчастичную функцию в представлении Меллина-Барнса

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = Q_2(\lambda_3)e^{i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x_3}\int \mathrm{d}\gamma_1\,\mathrm{d}\gamma_2\,\mathrm{d}\alpha\,\frac{\prod_{j=1}^2\Gamma(i(\lambda_j-\gamma_1))\Gamma(i(\lambda_j-\gamma_2))}{\Gamma(i(\gamma_1-\gamma_2))\Gamma(i(\gamma_2-\gamma_1))}$$
$$\times\Gamma(i(\gamma_1-\alpha))\Gamma(i(\gamma_2-\alpha))e^{i(\gamma_1+\gamma_2)(x_2-x_3)}e^{i\alpha(x_1-x_2)}.$$

Получился нужный интеграл с $s = x_2 - x_3$. Возьмём интегралы по $\gamma_{1,2}$, тогда

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = Q_2(\lambda_3)e^{i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x_3}\int \mathrm{d}\alpha\,\Gamma(i(\lambda_1-\alpha))\Gamma(i(\lambda_2-\alpha))$$
$$\times\exp\bigl(i(\lambda_1+\lambda_2)(x_2-x_3)-e^{x_2-x_3}\bigr)e^{i\alpha(x_1-x_2)}.$$

Интеграл по α снова дает нам двухчастичную функцию, а значит, вспоминая, как выглядит Q-оператор при $N = 2$ (111),

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) &= Q_2(\lambda_3)\exp\bigl(i\lambda_3x_3-e^{x_2-x_3}\bigr)\Psi(x_1,x_2|\lambda_1,\lambda_2)\\ &= \int \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\exp\bigl(i\lambda_3(x_1+x_2+x_3-y_1-y_2)\\ &\qquad -e^{y_2-x_3}-e^{x_2-y_2}-e^{y_1-x_2}-e^{x_1-y_1}\bigr)\Psi(y_1,y_2|\lambda_1,\lambda_2),\end{aligned}$$

мы получаем собственную функцию в представлении Гаусса-Гивенталя.

Итого, для трех частиц показали эквивалентность двух представлений, что символически (с точностью до числовых коэффициентов, которые мы по дороге забывали) можно записать так

$$\begin{aligned}\Psi(x_1,x_2,x_3|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\gamma}\,\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|\gamma_1,\gamma_2,x_3)\Psi(x_1,x_2|\gamma_1,\gamma_2)\\ &= \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{y}\,\mathcal{G}(x_1,x_2,x_3|y_1,y_2,\lambda_3)\Psi(y_1,y_2|\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned}$$

На самом деле, даже не слишком внимательный читатель заметит, что мощное тождество (112), которое нас здесь спасло, мы не доказали честно, но вывели из более известного интеграла Густафсона. Открытая проблема: как вывести его независимо (в том числе при произвольном N) и относительно просто (из какого-нибудь локального соотношения, например). Или же вывести интеграл Густафсона как-то по-простому, а не как это сделано в оригинальной статье.

Кроме того, в ходе вычисления мы несколько раз переставляли пределы и интегралы местами. Аккуратный вывод со всеми нужными оговорками (и при произвольном N) можно посмотреть у Кароля Козловски.

9 Разделение переменных

К текущему моменту мы уже три раза построили волновую функцию для гамильтониана цепочки Тоды. Сперва, мы попробовали получить волновую функцию напрямую, рассматривая действие оператора $A_N(u)$ и получили представление Меллина-Барнса (71)

$$\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\, \frac{\prod_{j=1}^{N-1}\prod_{s=1}^{N}\Gamma(i(\lambda_s-\gamma_j))}{\prod_{j\neq m}\Gamma(i(\gamma_m-\gamma_j))} e^{i(\sum\lambda-\sum\gamma)x_N}\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}),$$

потом при помощи трюка Паскье-Годена с введением новых параметров и рисования картинок получили представление Гаусса-Гивенталя (92)

$$\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}^{N-1}\boldsymbol{y}\, \Lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\lambda_N)\Psi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\lambda}'),$$

с ядром (90)

$$\Lambda_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}',u) = \exp\left[iu\sum_{n=1}^{N}x_n - iu\sum_{n=1}^{N-1}y_n - \sum_{n=1}^{N-1}\left(e^{y_n-x_{n+1}}+e^{x_n-y_n}\right)\right].$$

Дальше получили это представление другим способом, воспользовавшись тем, что существует другая модель (DST), которая удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера с R-матрицей цепочки Тоды. Наконец, мы даже убедились, что эти представления совпадают. Может показаться, что уже поработали достаточно, но это не повод останавливаться. Попробуем решить эту задачу ещё одним способом, а именно разделим переменные.

9.1 Представление разделённых переменных

Во все предыдущие разы мы строили волновые функции в x-представлении. Мы ищем собственные функции оператора $\hat{A}_N(u)$, который представляет из себя полином степени N с единичным старшим коэффициентом. А значит его собственное число $A_N(u)$ можно определить по корням $\{\lambda_j\}$ этого полинома. То же можно сказать и про собственное состояние. В формализме «бра-кет» это можно выразить как

$$\hat{A}_N(u)\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle = A_N(u)\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \prod_{k=1}^{N}(u-\lambda_k)\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{113}$$

Задача на поиск волновой функции в x-представлении формулируется

$$\hat{A}_N(u)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{k=1}^{N}(u-\lambda_k)\Psi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) \tag{114}$$

или

$$\langle\boldsymbol{x}|\,\hat{A}_N(u)\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \prod_{k=1}^{N}(u-\lambda_k)\,\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{115}$$

Пускай мы уже решили задачу с $N-1$ частицей, и у нас на руках есть полный набор состояний $|\boldsymbol{\gamma}\rangle$

$$\hat{A}_{N-1}\,|\boldsymbol{\gamma}\rangle = \prod_{k=1}^{N-1}(u-\gamma_k)\,|\boldsymbol{\gamma}\rangle \tag{116}$$

Можно интерпретировать $\{\gamma_k\}$ как новый полный набор наблюдаемых. То есть считать, что определены коммутирующие самосопряжённые операторы $\hat{\gamma}_k$, которые действуют на базисных векторах-состояниях как

$$\hat{\gamma}_k\,|\boldsymbol{\gamma}\rangle = \gamma_k\,|\boldsymbol{\gamma}\rangle \tag{117}$$

Чтобы получить решать задачу с N частицами надо добавить к этому набору ещё один оператор. Таким оператором будет полный импульс $\hat{P}_N$.

Задача на поиск волновой функции собственного для A состояния в новом представлении выглядит как

$$\hat{A}_N(u)\Phi(\boldsymbol{\gamma},P_N|\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{k=1}^{N}(u-\lambda_k)\Phi(\boldsymbol{\gamma},P_N|\boldsymbol{\lambda}) \tag{118}$$

или

$$\langle\boldsymbol{\gamma},P_N|\,\hat{A}_N(u)\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \prod_{k=1}^{N}(u-\lambda_k)\,\langle\boldsymbol{\gamma},P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{119}$$

Для перехода между представлениями надо вставить единицу

$$\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \sum_{\boldsymbol{\gamma},P}\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma},P_N\rangle\,\langle\boldsymbol{\gamma},P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{120}$$

здесь $\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma},P_N\rangle$ — собственные функции операторов $\hat{\gamma}$ и $\hat{P}_n$ в x-представлении

$$\hat{\gamma}_k\,\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma},P_N\rangle = \gamma_k\,\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma},P_N\rangle\,, \qquad \hat{P}_N\,\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma},P_N\rangle = P_N\,\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma},P_N\rangle\,. \tag{121}$$

выделим зависимость от общего импульса и получим, что эти функции имеют вид

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma}, P_N\rangle = \exp\left[i\left(P_N - \sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\right)x_N\right]\langle \boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}\rangle = \\ = \exp\left[i\left(P_N - \sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\right)x_N\right]\Psi_{N-1}\left(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}\right)\end{aligned} \tag{122}$$

здесь, как и всегда раньше $\boldsymbol{x}'$ — набор $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$

Переход из этого представления в x

$$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \sum_{\boldsymbol{\gamma}, P_N}\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma}, P_N\rangle\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{123}$$

Вставка единицы на языке функций это интегрирование с некоторой мерой $\mu(\boldsymbol{\gamma})$

$$\sum_{\boldsymbol{\gamma}, P_N}|\boldsymbol{\gamma}, P_N\rangle\langle\boldsymbol{\gamma}, P_N| = \int \mu(\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N, \tag{124}$$

а переход в x-представление — интегральное преобразование

$$\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mu(\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N\; e^{i\left(P_N - \sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\right)x_N}\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\right) \tag{125}$$

Обратное преобразование

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \sum_{\boldsymbol{x}}\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \sum_{\boldsymbol{x}}\overline{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma}, P_N\rangle}\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{126}$$

Отнормируем $\boldsymbol{x}$ так, чтобы

$$\sum_{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}| = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{127}$$

тогда на языке интегралов (126)

$$\Phi_N(\boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\; e^{-i\left(P_N - \sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\right)x_N}\overline{\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})}\Psi\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\right) \tag{128}$$

То есть переход к новому представлению для N частиц это интегральное преобразование, ядро которого — волновая функция для $N-1$ частицы. Как мы увидим чуть позже этот переход приведёт нас в представление разделённых переменных.

9.2 Унитарность перехода между представлениями

Чтобы преобразование было унитарным, надо, чтобы и при прямом и при обратном переходе мы бы вставляли единицу

$$\begin{aligned} &\sum_{\boldsymbol{\gamma},P_N} \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\gamma}, P_N\rangle \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle = \langle \boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle = \delta_{\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}}, \\ &\sum_{\boldsymbol{x}} \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{x}\rangle \left\langle \boldsymbol{x}\middle|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tilde{P}_N\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N\middle|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tilde{P}_N\right\rangle = \frac{\delta_{\boldsymbol{\gamma},\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}\delta_{P_N,\tilde{P}_N}}{\mu(\boldsymbol{\gamma})} \end{aligned} \tag{129}$$

Это требование совпадает с условиями ортогональности и полноты волновых функций задачи для $N-1$ частицы в x-представлении. Действительно, зависимость от P_N это просто плоские волны, поэтому выделив её получим

$$\begin{aligned} &\int \mu(\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\ \Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})\overline{\Psi_{N-1}(\boldsymbol{\gamma}|\tilde{\boldsymbol{x}}')} = \delta(\tilde{\boldsymbol{x}}' - \tilde{\boldsymbol{x}}') \\ &\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}'\ \overline{\Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})}\Psi_{N-1}\left(\boldsymbol{x}'|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \frac{1}{\mu(\boldsymbol{\gamma})}\ \delta_s(\boldsymbol{\gamma} - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \end{aligned} \tag{130}$$

В правых частях уравнений (130) стоят ядра единичных операторов для «обычных» функций многих переменных

$$\delta\left(\tilde{\boldsymbol{x}}' - \tilde{\boldsymbol{x}}'\right) = \prod_{j=1}^{N-1} \delta\left(x_j - \tilde{x}_j\right) \tag{131}$$

и для симметричных функций (как мы уже знаем волновые функции симметричны по квантовым числам)

$$\delta_s\left(\boldsymbol{\gamma} - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma\in S_{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} \delta\left(\gamma_j - \tilde{\gamma}_{\sigma(j)}\right) \tag{132}$$

Чтобы убедить себя в том, что преобразование действительно унитарно, проверим полноту и ортогональность волновых функций для случая $N = 2$.

9.2.1 Полнота и ортогональность в двухчастичной задаче

Волновая функция для двухчастичной задачи может быть выражена через функции Макдональда *в этих записках такого пока нет*

$$\Psi(x_1, x_2|\lambda_1, \lambda_2) = \frac{e^{i(\lambda_1+\lambda_2)Q}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2(\lambda_{1,2})\sinh\pi(\lambda_{1,2})}}{\pi} K_{i(\lambda_{1,2})}(2e^q) \tag{133}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \lambda_1 - \lambda_2, \quad Q = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad q = \frac{x_1 - x_2}{2}. \tag{134}$$

Для доказательства ортогональности и полноты этого набора нам понадобятся два свойства функций Макдональда

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} K_{i\lambda}(\alpha) K_{i\lambda'}(\alpha) = \left[\frac{2}{\pi^2}\lambda \sinh(\pi\lambda)\right] \cdot \frac{1}{2}\left(\delta(\lambda - \lambda') + \delta(\lambda + \lambda')\right) \tag{135}$$

Чтобы это стало больше похоже на нашу задачу надо сделать замену переменных $\alpha = 2e^q$

$$\int_\infty^\infty \mathrm{d}q K_{i\lambda}(2e^q) K_{i\lambda'}(2e^q) = \left[\frac{2}{\pi^2}\lambda \sinh(\pi\lambda)\right] \cdot \frac{1}{2}\left(\delta(\lambda - \lambda') + \delta(\lambda + \lambda')\right) \tag{136}$$

Второе свойство

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}q}{\pi^2 \alpha} q \sinh(\pi q) K_{iq}(\alpha) K_{iq}(\alpha') = \delta(\alpha - \alpha') \tag{137}$$

Проверим ортогональность

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \overline{\Psi\left(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2\right)} \Psi\left(x_1, x_2 | \mu_1, \mu_2\right) = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{4\mu_{1,2}\lambda_{1,2} \sinh \pi\lambda_{1,2} \sinh \pi\mu_{1,2}}}{\pi^2} \times \\ \times \int 2\mathrm{d}Q\mathrm{d}q \; e^{iQ(\mu_1 + \mu_2 - \lambda_1 - \lambda_2)} K_{i\lambda_{1,2}}(2e^q) K_{i\mu_{1,2}}(2e^q)\end{aligned} \tag{138}$$

Если теперь воспользоваться ортогональностью плоских волн и функций Макдональда (136) получим,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \overline{\Psi\left(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2\right)} \Psi\left(x_1, x_2 | \mu_1, \mu_2\right) = \\ = \delta(\mu_1 + \mu_2 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{1}{2}\left(\delta(\lambda_{1,2} - \mu_{1,2}) + \delta(\lambda_{1,2} + \mu_{1,2}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\delta(\lambda_1 - \mu_1)\delta(\lambda_2 - \mu_2) + \delta(\lambda_1 - \mu_2)\delta(\lambda_2 - \mu_1)\right)\end{aligned} \tag{139}$$

То есть ортогональность получили. Теперь возьмёмся за полноту

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \; \Psi(y_1, y_2 | \lambda_1, \lambda_2) \overline{\Psi(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2)} = \\ = \int \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \frac{1}{4\pi} \exp\left[i(\lambda_1 + \lambda_2)(Q_y - Q_x)\right] \times \\ \times \frac{2\lambda_{1,2} \sinh \pi\lambda_{1,2}}{\pi^2} K_{i\lambda_{1,2}}(2e^{q_x}) K_{i\lambda_{1,2}}(e^{2q_y})\end{aligned} \tag{140}$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$\mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathrm{d}(\lambda_1-\lambda_2) \tag{141}$$

после чего воспользуемся полнотой функций Макдональда (137). Тогда получится, что

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ \Psi(y_1,y_2|\lambda_1,\lambda_2)\overline{\Psi(x_1,x_2|\lambda_1,\lambda_2)} = \\ = \frac{1}{2}\delta\left(Q_x-Q_y\right)\delta\left(2e^{q_x}-2e^{q_y}\right)\left(2e^{q_x}\right) = \\ = \delta\left(x_1+x_2-y_1-y_2\right)\delta\left(x_1-x_2-y_1+y_2\right)\end{aligned} \tag{142}$$

и, наконец, перегруппировав δ-функции

$$\int \mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ \Psi(y_1,y_2|\lambda_1,\lambda_2)\overline{\Psi(x_1,x_2|\lambda_1,\lambda_2)} = \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2) \tag{143}$$

То есть получили, что собственные функции цепочки Тоды из двух частиц образуют полный и ортогональный набор.

Чтобы связь с последующим выбором меры прослеживалась более явно заметим, что

$$\begin{cases}\Gamma(iq)\Gamma(1-iq) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi iq)} \\ \Gamma(1-iq) = -iq\Gamma(-iq)\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(i\lambda_{1,2})\Gamma(-i\lambda_{1,2})} = \frac{\lambda_{1,2}\sinh(\pi\lambda_{1,2})}{\pi} \tag{144}$$

то есть сейчас мера интегрирования по $\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$

$$\mu(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\Gamma(i(\lambda_1-\lambda_2))\Gamma(i(\lambda_2-\lambda_1))} \tag{145}$$

9.3 Волновые функции в разделённых переменных

Пусть мы уже оказались в представлении γ, P_N. Найдём в нём собственные функции оператора $\hat{A}_N(u)$. То есть решим задачу

$$\langle\boldsymbol{\gamma},P_N|\,\hat{A}_N(u)\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \prod_{j=1}^{N}(u-\lambda_j)\,\langle\boldsymbol{\gamma},P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{146}$$

Заметим, что нам необходим оператор, который будет отличать разные состояния. Напомним, что в качестве состояний $|\boldsymbol{\gamma}\rangle$ мы взяли собственные состояния оператора $\hat{A}_{N-1}(u)$, поэтому такой оператор хорошо подойдёт для определения $\boldsymbol{\gamma}$. Вспомнив рекуррентное соотношение на (64)

$$\hat{C}_N = -e^{\hat{x}_N}\hat{A}_{N-1}(u) \tag{147}$$

заметим, что в качестве отличающего оператора замечательно подойдёт оператор $\hat{C}$. Его действие на базисный вектор

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \hat{C}_N(u) = \prod_{j=1}^{N-1} (u - \gamma_j) \cdot \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N + i | \,. \tag{148}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в импульсном представлении

$$\hat{x}_N = i \frac{\partial}{\partial p_N} \tag{149}$$

а значит экспонента от этого оператора соответствует сдвигу общего импульса, то есть

$$e^{\hat{x}_N} \hat{P}_N = (\hat{P}_N + i) e^{\hat{x}_N} \tag{150}$$

Можно поступить так же, как мы делали при выводе представления Меллина-Барнса и записать рекурренту на оператор $\hat{A}_N(u)$, и установить каким образом оператор $\hat{C}_{N-1}(u)$ действует на собственные функции оператора $\hat{A}_{N-1}(u)$. Но так мы уже делали, поэтому здесь пойдём немного другим путём. А именно заметим, что оператор $\hat{A}_N(u)$ можно зафиксировать его действием на базисный вектор $\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N |$ как

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \hat{A}_N(u) = \left(u - P_N + \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k \right) \prod_{j=1}^{N-1} (u - \gamma_j) \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{u - \gamma_j}{\gamma_k - \gamma_j} \right) \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \hat{A}_N(\gamma_k) \end{aligned} \tag{151}$$

То есть мы воспользовались тем, что оператора $\hat{A}_N(u)$ полином, и выразили его действие при произвольном параметре u, при помощи действий в точках $u = \gamma_k$. Теперь надо определить действие $\hat{A}_N(\gamma_k)$. Для этого нам понадобится коммутационное соотношение на $\hat{A}$ и $\hat{C}$ (54)

$$(u - v)\hat{A}(u)\hat{C}(v) + i\hat{C}(u)\hat{A}(v) = (u - v + i)\hat{C}(v)\hat{A}(u). \tag{152}$$

Подействуем им на базисный вектор $\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N |$. А дальше подставим $u = \gamma_k$ и заметим, что второе слагаемое в левой части обратится в ноль, согласно (147). В итоге получим, что

$$(\gamma_k - v) \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \hat{A}_N(\gamma_k)\hat{C}_N(v) = (\gamma_k - v + i) \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \hat{C}_N(v)\hat{A}_N(\gamma_k) \tag{153}$$

Действие оператора $\hat{C}_N(v)$ на базисный вектор мы знаем (148). Воспользовавшись этим получим, что

$$\Big[\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\, \hat{A}_N(\gamma_k)\Big] \cdot \hat{C}_N(v) = \\ = (v-\gamma_1)\dots(v-\gamma_k-i)\dots(v-\gamma_{N-1})\,\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N+i|\, \hat{A}_N(\gamma_k) \quad (154)$$

Учитывая, что оператор $\hat{C}_N$ определяет квантовые числа γ_kполучили, что

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\, \hat{A}_N(\gamma_k) = \langle \boldsymbol{\gamma}+i\boldsymbol{e}_k, P_N|\,(-i)^{-N} \quad (155)$$

Множитель $(-i)^{-N}$ здесь нормировочный, и он заиграет в полную силу в дальнейшем при построении решений и восстановлении меры. Подставив действие оператора $\hat{A}$ в (151) получим действие оператора $\hat{A}_N(u)$ на базисные вектора

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\, \hat{A}_N(u) = \left(u - P_N + \sum_{k=1}^{N-1}\gamma_k\right)\prod_{j=1}^{N-1}(u-\gamma_j)\,\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N| + \\ + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1}\frac{u-\gamma_j}{\gamma_k-\gamma_j}\right)\langle \boldsymbol{\gamma}+i\boldsymbol{e}_k, P_N| \quad (156)$$

Подставим это в задачу на поиск собственных функций и получим уравнение на $\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|$

$$\prod_{j=1}^{N}(u-\lambda_j)\,\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \left(u - P_N + \sum_{k=1}^{N-1}\gamma_k\right)\prod_{j=1}^{N-1}(u-\gamma_j)\,\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1}\frac{u-\gamma_j}{\gamma_k-\gamma_j}\right)(-i)^{-N}\,\langle \boldsymbol{\gamma}+i\boldsymbol{e}_k, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle \quad (157)$$

В левой части коэффициент при u^{N-1} равен $\sum\lambda$, а в правой P_N. Поэтому зависимость от общего импульса можно выделить в $\delta(P_N - \sum\lambda)$. Дальше заметим, что если подставить $u=\gamma_k$ то получится система из $N-1$ уравнения, каждое из которых имеет вид

$$\prod_{j=1}^{N}(\gamma_k-\lambda_j)\,\langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle = (-i)^{-N}\,\langle \boldsymbol{\gamma}+i\boldsymbol{e}_k, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle \quad (158)$$

а если перенести множитель $(-i)^{-N}$

$$\left(\prod_{j=1}^{N} i(\lambda_j - \gamma_k)\right) \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \boldsymbol{\lambda} \rangle = \langle \boldsymbol{\gamma} + i\boldsymbol{e}_k, P_N | \boldsymbol{\lambda} \rangle \tag{159}$$

Отсюда видно, что естественно будет искать решение в виде разделённых переменных

$$\langle \boldsymbol{\gamma} | \boldsymbol{\lambda} \rangle = \prod_{k=1}^{N-1} \phi(\gamma_k) \tag{160}$$

где $\phi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi(z+i) = \prod_{j=1}^{N} i(\lambda_j - z)\phi(z) \tag{161}$$

решение (с точностью до константы) такого уравнение это Γ-функция

$$\phi(z) = \prod_{j=1}^{N} \Gamma(i(\lambda_j - z)) \tag{162}$$

Теперь если собрать все вышесказанные аргументы, мы получим собственную функцию оператора $\hat{A}_N$ в представлении разделённых переменных

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma}, P_N | \boldsymbol{\lambda}) = \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N | \boldsymbol{\lambda} \rangle = \delta\left(P_N - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right) \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{j=1}^{N} \Gamma(i(\lambda_j - \gamma_k)) \tag{163}$$

Если подставить эту собственную функцию в формулу перехода из представления разделённых переменных в координатное (125), то это выражение начнёт напоминать рекуррентное соотношение для представления Меллина-Барнса. Но пока неизвестным элементом является мера интегрирования.

9.4 Выбор меры интегрирования

К настоящему моменту мы использовали «бра-кет» формализм немного нечестно. Дело в том, что мы пользовались самосопряжённостью операторов не введя скалярного произведения. Сейчас этим и займёмся.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\boldsymbol{\gamma}, P_N} \langle f|\boldsymbol{\gamma}, P_N\rangle \langle \boldsymbol{\gamma}, P_N|g\rangle = \int \mu(\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N\ \overline{f(\boldsymbol{\gamma}, P_N)}g(\boldsymbol{\gamma}, P_N) \quad (164)$$

Воспользуемся представлением $\hat{A}_N(u)$ в виде интерполяционного полинома и посмотрим на действие одного из слагаемых

$$\left\langle f, \hat{A}_N(u)g\right\rangle \sim \int \mu(\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N\ \overline{f(\boldsymbol{\gamma}, P_N)} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{u-\gamma_j}{\gamma_k-\gamma_j}\right) (\hat{A}(\gamma_k)g)(\boldsymbol{\gamma}, P_N) =$$

$$= \int \mu(\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N\ \overline{f(\boldsymbol{\gamma}, P_N)} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{u-\gamma_j}{\gamma_k-\gamma_j}\right) \cdot (-i)^{-N} g(\boldsymbol{\gamma}+i\boldsymbol{e}_k, P_N) \quad (165)$$

соответствующее слагаемое при действии $\hat{A}_N(u)$ на f

$$\left\langle \hat{A}_N(u)f, g\right\rangle \sim \int \mu(\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N\ \overline{(\hat{A}_N(u)f)(\boldsymbol{\gamma}, P_N)} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{u-\gamma_j}{\gamma_k-\gamma_j}\right) g(\boldsymbol{\gamma}, P_N) =$$

$$= \int \mu(\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N\ (i)^{-N}\overline{f(\boldsymbol{\gamma}-i\boldsymbol{e}_k, P_N)} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{u-\gamma_j}{\gamma_k-\gamma_j}\right) \cdot g(\boldsymbol{\gamma}, P_N) \quad (166)$$

Сделав в интеграле (166) замену $\gamma_k \to \gamma_k + i$ и потребовав равенства этого интеграла (165) получим условие на меру

$$\mu(\boldsymbol{\gamma}+i\boldsymbol{e}_k)(i)^{-N} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{1}{\gamma_k+i-\gamma_j} = \mu(\boldsymbol{\gamma})(-i)^{-N} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{1}{\gamma_k-\gamma_j} \quad (167)$$

Перепишем это условие чуть аккуратнее

$$\mu(\gamma+i\boldsymbol{e}_k) = \mu(\boldsymbol{\gamma})(-1)^N \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} \frac{\gamma_k-\gamma_j+i}{\gamma_k-\gamma_j} \quad (168)$$

Такое условие получается из каждого слагаемого. Это соотношение мы уже решали при выводе представления Меллина-Барнса (68). Ответ

$$\mu(\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{j<k}^{N-1} \frac{1}{\Gamma(i(\gamma_k - \gamma_j)\Gamma(i(\gamma_j - \gamma_k))} \tag{169}$$

Эта мера отличается от двухчастичной (145) умножением на константу. Ещё заметим, что это второе место, где сыграл нормировочный множитель действия $\hat{A}_N(u)$.

9.5 Переход к координатному представлению

Теперь у нас в руках есть все элементы чтобы перейти обратно в координатное представление. Воспользуемся формулой (125)

$$\Psi_N(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mu(\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}P_N \; e^{i\left(P_N - \sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\right)x_N} \Psi_{N-1}(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\right)$$

подставим туда явный вид собственной функции $\hat{A}_N(u)$ в представлении разделённых переменных (163)

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}) = \langle\boldsymbol{\gamma}, P_N|\boldsymbol{\lambda}\rangle = \delta\left(P_N - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)\prod_{k=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{N}\Gamma(i(\lambda_j - \gamma_k))$$

и выражение для меры (169)

$$\mu(\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{j<k}^{N-1} \frac{1}{\Gamma(i(\gamma_k - \gamma_j)\Gamma(i(\gamma_j - \gamma_k))}.$$

В итоге получится

$$\begin{aligned}\Psi_N\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}\right) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\frac{\prod_{k=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{N}\Gamma(i(\lambda_j - \gamma_k))}{\prod_{j<k}^{N-1}\Gamma(i(\gamma_k - \gamma_j)\Gamma(i(\gamma_j - \gamma_k))}\times& \\ \times\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - \sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\right]\Psi_{N-1}\left(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{\gamma}\right)&\end{aligned} \tag{170}$$

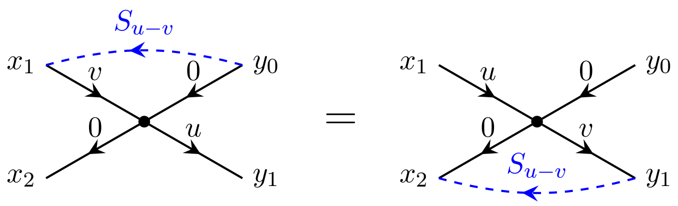
а это в точности совпадает с представлением Меллина-Барнса (71).

A Сплетающее соотношение

В главе про представление Гаусса-Гивенталя мы использовали диаграммную технику для доказательства инвариантности волновых функций относительно перестановок параметров. Для доказательства этого факта мы пользовались сплетающим соотношением и ещё двумя диаграммными тождествами. Сейчас мы их докажем, но для начала стоит напомнить правила Фейнмана,

$$\begin{aligned} x \xrightarrow{\quad v \quad} y &= \exp\left(iv(x-y) - e^{x-y}\right) \\ x \overset{v}{\rightsquigarrow} \quad &= \exp\left(ivx\right) \end{aligned} \tag{171}$$

а также вид сплетающего соотношения



Докажем это тождество и найдём функцию S_{u-v}.

Пользуясь правилами Фейнмана, запишем левую часть явно через интегралы

$$\begin{aligned} \text{LHS} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \exp\Big[& iv(x_1 - w) - e^{x_1 - w} - e^{y_0 - w} \\ & + iu(w - y_1) - e^{w - y_1} - e^{w - x_2}\Big] \cdot S_{u-v}(y_0, x_1). \end{aligned} \tag{172}$$

Немного перегруппируем

$$\begin{aligned} \text{LHS} = e^{ivx_1 - iuy_1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \exp\Big[& i(u-v)w - e^{w}\left(e^{-y_1} + e^{-x_2}\right) \\ & - e^{-w}\left(e^{x_1} - e^{y_0}\right)\Big] \cdot S_{u-v}(y_0, x_1) \end{aligned} \tag{173}$$

и сделаем замену $t = e^{w}$

$$\begin{aligned} \text{LHS} = e^{ivx_1 - iuy_1} \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} t^{i(u-v)} \exp\Big[& -t\left(e^{-y_1} + e^{-x_2}\right) \\ & - \frac{1}{t}\left(e^{x_1} + e^{y_0}\right)\Big] \cdot S_{u-v}(y_0, x_1). \end{aligned} \tag{174}$$

Теперь сделаем ещё одну замену $t = s\left(\frac{e^{x_1}+e^{y_0}}{e^{-y_1}+e^{-x_2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\mathrm{LHS} = e^{ix_1 v - iy_1 u}\left(\frac{e^{x_1}+e^{y_0}}{e^{-y_1}+e^{-x_2}}\right)^{\frac{i(u-v)}{2}} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, s^{i(u-v)-1} \\ \cdot \exp\left[\sqrt{\left(e^{x_1}+e^{y_0}\right)\left(e^{-y_1}+e^{-x_2}\right)}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right] \cdot S_{u-v}(y_0, x_1). \quad (175)$$

Внимательно посмотрим на это выражение и заметим, что подынтегральное выражение без функции S_{u-v} при инверсии меняет параметры u, v местами.

Цепочка аналогичных преобразований для правой части сплетающего соотношения приводит к следующему выражению

$$\mathrm{RHS} = e^{ix_1 u - iy_1 v}\left(\frac{e^{x_1}+e^{y_0}}{e^{-y_1}+e^{-x_2}}\right)^{\frac{i(v-u)}{2}} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, s^{i(u-v)-1} \\ \cdot \exp\left[\sqrt{\left(e^{x_1}+e^{y_0}\right)\left(e^{-y_1}+e^{-x_2}\right)}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right] \cdot S_{u-v}(y_1, x_2). \quad (176)$$

Сравнивая (175) и (176) получаем условие на функцию S_{u-v}, при котором сплетающее выражение выполняется

$$\frac{S_{u-v}(y_0, x_1)}{S_{u-v}(y_1, x_2)} = e^{i(u-v)(x_1+y_1)}\left(\frac{e^{x_1}+e^{y_0}}{e^{-y_1}+e^{-x_2}}\right)^{i(v-u)} = \left(\frac{e^{y_1-x_2}+1}{e^{y_0-x_1}+1}\right)^{i(u-v)} \quad (177)$$

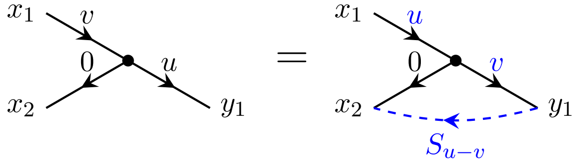
Одним из решений такого уравнения является

$$S_{u-v}(y, x) = \left(1+e^{y-x}\right)^{-i(u-v)}. \quad (178)$$

Заметим также, что выполняется условие (101), то есть

$$S_{u-v}(y, x) \cdot S_{v-u}(y, x) = 1. \quad (179)$$

Теперь докажем ещё два диаграммных тождества, позволяющих убирать вспомогательное ребро S_{u-v} на границах. Первое тождество:



Доказательство получается автоматически из сплетающего соотношения. Рассмотрим пределе $y_0 \to -\infty$. Тогда левая часть сплетающего соотношения (175)

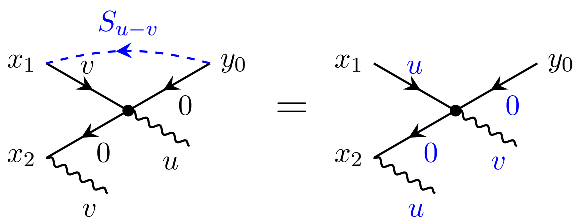
$$\mathrm{LHS} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \exp\left[iv(x_1 - w) - e^{x_1 - w} - e^{y_0 - w}\right.$$
$$\left. + iu(w - y_1) - e^{w - y_1} - e^{w - x_2}\right] \cdot \left(1 + e^{y_0 - x_1}\right)^{-i(u-v)} \quad (180)$$

в пределе $y_0 \to -\infty$ равна

$$\mathrm{LHS} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \exp\left[iv(x_1 - w) - e^{x_1 - w} + iu(w - y_1) - e^{w - y_1} - e^{w - x_2}\right], \quad (181)$$

что в точности соответствует левой части доказываемого тождества. Предел правой части сплетающего соотношения ещё проще: мы просто избавляемся от лишней ноги в вершине y_0. Таким образом, тождество на верхней границе доказано.

Наконец разберёмся с диаграммным тождеством для нижней границы.



Для этого честно распишем интегралы. Интеграл в левой части

$$\mathrm{LHS} = \left(1 + e^{y_0 - x_1}\right)^{-i(u-v)} e^{ix_2 v + ix_1 v}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \exp\left[iw(u - v) - e^{x_1 - w} - e^{y_0 - w} - e^{w - x_2}\right] \quad (182)$$

Делаем точно такие же замены переменных, как и в доказательстве сплетающего соотношения и получаем

$$\mathrm{LHS} = \left(1 + e^{y_0 - x_1}\right)^{-i(u-v)} e^{ix_2 v + ix_1 v} \left(\frac{e^{y_0} + e^{x_1}}{e^{-x_2}}\right)^{\frac{i(u-v)}{2}}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \cdot \exp\left[\sqrt{(e^{x_1})\left(e^{-y_1} + e^{-x_2}\right)}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right] \quad (183)$$

Правая часть

$$\mathrm{RHS} = e^{ix_2u+ix_1u}\left(\frac{e^{-x_2}}{e^{y_0}+e^{x_1}}\right)^{\frac{i(u-v)}{2}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \cdot \exp\left[\sqrt{(e^{x_1})\left(e^{-y_1}+e^{-x_2}\right)}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right] \quad (184)$$

Значит, для чтобы тождество выполнялось, необходимо, чтобы

$$\left(1+e^{y_0-x_1}\right)^{-i(u-v)} e^{ix_2v+ix_1v}\left(\frac{e^{y_0}+e^{x_1}}{e^{-x_2}}\right)^{i(u-v)} = e^{ix_2u+ix_1u}. \quad (185)$$

Это равенство выполняется. Мы победили.

B Тождество с R-оператором

В параграфе о представлении Гаусса-Гивенталя, утверждается, что R-оператор, заданный как интегральный оператор на функциях двух переменных,

$$\left(R_{12}(v)f\right)(x_1,x_2) = \int \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \exp\left(iv(x_1-y_1)-e^{x_1-y_1}-e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1)f(y_1,y_2) \quad (186)$$

переставляет местами L-операторы для цепочки Тоды и DST-цепочки

$$R_{12}(v)L_1(u)M_2(u-v) = M_2(u-v)L_1(u)R_{12}(v). \quad (187)$$

Напоминаю, что L-операторы для цепочки Тоды и DST-цепочки имеют следующий вид:

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u-p_n & e^{-x_n} \\ -e^{x_n} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_n(u) = \begin{pmatrix} u-p_n & e^{-x_n} \\ -ie^{x_n}p_n & i \end{pmatrix}. \quad (188)$$

Докажем утверждение (187) прямой проверкой. Для дальнейшего удобства сначала запишем матрицы $L_1(u)M_2(u-v)$ и $M_2(u-v)L_1(u)$ в явном виде

$$L_1(u)M_2(u-v) = \begin{pmatrix} (u+i\partial_1)(u-v+i\partial_2)-e^{x_2-x_1}\partial_2 & (u+i\partial_1)e^{-x_2}+ie^{-x_1} \\ -(u-v+i\partial_2)e^{x_1} & -e^{x_1-x_2} \end{pmatrix} \quad (189)$$

$$M_2(u-v)L_1(u) = \begin{pmatrix} (u+i\partial_1)(u-v+i\partial_2) - e^{x_1-x_2} & (u-v+i\partial_2)e^{-x_1} \\ -(u+i\partial_1)e^{x_2}\partial_2 - ie^{x_1} & -e^{x_2-x_1}\partial_2 \end{pmatrix} \quad (190)$$

Начнём проверку с самого простого элемента — $(2,2)$. Запишем ядра операторов в левой и правой части уравнения (187). Ядро оператора в левой части

$$\mathrm{LHS}_{22} \doteq \exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1)\left(-e^{y_1-y_2}\right)$$

Здесь и далее символ «$\doteq$» обозначает равенство ядер. Ядро оператора в правой части

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}_{22} &\doteq -e^{x_2-x_1}\partial_{x_2}\exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1) \\ &= -e^{y_1-x_1}\exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1)\end{aligned}$$

В ядре оператора с δ-функцией от переменных x_1 и y_2 эти переменные можно безболезненно заменять друг на друга, поэтому получаем равенство тождественное равенство ядер операторов для элементов $(2,2)$ в правой и левой части.

Проделаем аналогичные действия для элементов $(2,1)$. Ядро оператора в левой части

$$\begin{aligned}&\mathrm{LHS}_{21} \\ &\quad \doteq \exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1)(-u+v-i\partial_{y_2})e^{y_1}.\end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям, то есть перебросим производную ∂_{y_2} с функции двух переменных на остальное подынтегральное выражение. Тогда ядро интегрального оператора преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}_{21} \doteq{}& \exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right) \\ &\times\left[(v-u)\delta(y_2-x_1) + i\delta'(y_2-x_1)\right]e^{y_1}\end{aligned}$$

Ядро оператора в правой части

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}_{21} \doteq{}& \left(-(u+i\partial_{x_1})e^{x_2}\partial_{x_2} - ie^{x_1}\right) \\ &\times\exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1)\end{aligned}$$

Распишем преобразования по шагам, чтобы не запутаться. Сначала продифференцируем по x_2

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}_{21} \doteq{}& \left(-(u+i\partial_{x_1})e^{y_1} - ie^{x_1}\right) \\ &\times\exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)\delta(y_2-x_1),\end{aligned}$$

затем возьмём производную по x_1. Обратим внимание, что производная также действует на δ-функцию

$$\mathrm{RHS}_{21} \doteq \left[\left(-u+v+ie^{x_1-y_1})e^{y_1} - ie^{x_1}\right)\delta(y_2-x_1) + i\delta'(y_2-x_1)\right] \\ \times \exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right)$$

Аккуратно преобразуем и получим выражение для ядра

$$\mathrm{RHS}_{21} \doteq \left[(v-u)\delta(y_2-x_1) + i\delta'(y_2-x_1)\right] e^{y_1} \\ \times \exp\left(iv(x_1-y_1) - e^{x_1-y_1} - e^{y_1-x_2}\right),$$

что в точности совпадает с левой частью.

Для элементов $(1,2)$ и $(1,1)$ доказательство аналогично. *Написать?*

Список литературы

[1] Sklyanin, E. K. *The Quantum Toda Chain.* Lect.Notes Phys. 226 (1985) 196-233.

[2] Sklyanin, E. K. *Separation of variables: new trends.* Progress of Theoretical Physics Supplement 118 (1995): 35-60. arXiv:solv-int/9504001

[3] Kharchev, S., and D. Lebedev. *Eigenfunctions of $GL(N,\mathbb{R})$ Toda chain: Mellin-Barnes representation.* Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters 71 (2000): 235-238. arXiv:hep-th/0004065

[4] А. В. Силантьев, *Функция перехода для цепочки Тоды*, ТМФ, 150:3 (2007), 371–390; Theoret. and Math. Phys., 150:3 (2007), 315–331.

[5] Sklyanin, E. K. *Bäcklund transformations and Baxter's Q-operator.* arXiv preprint nlin/0009009 (2000).

[6] K Kozlowski, K. K. *Unitarity of the SoV transform for the Toda chain.* Communications in Mathematical Physics 334 (2015): 223-273. arXiv:1306.4967 [math-ph]