Операторы Бакстера в модели Руджинарса

Дубна 14.06.24

11 июня 2024 г.

Операторы Макдональда

$$M_1 = \sum_i \prod_{j \neq i} \frac{tz_i - z_j}{z_i - z_j} \Lambda_i, \qquad \Lambda_i f(\boldsymbol{z}) = f(z_1 ... qz_i ... z_n)$$

$$M_r = \sum_{|I|=r} \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{tz_i - z_j}{z_i - z_j} \Lambda_I, \qquad \Lambda_I = \prod_{i \in I} \Lambda_i$$

$$M_r P_\lambda(\boldsymbol{z}) = e_r\left(q^{\lambda_1} t^{n-1}, \ldots, q^{\lambda_n}\right) P_\lambda(\boldsymbol{z})$$

определитель Секигучи $\Delta(\boldsymbol{x})$ - Вандермонд

$$D(u) = \Delta(\boldsymbol{x})^{-1} \det ||x_i^{n-j}\left(u + j - 1 - \alpha x_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}}\right)||$$

С. Руджинарс: релятивистское обобщение гиперболической модели Калоджеро -Сазерленда

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Delta + \sum_{i<j} \frac{g(g-1)/2}{\mathrm{sh}^2(t_i - t_j)}$$

$$H_r = \sum_{\substack{I\subset[n] \\ |I|=r}} \prod_{\substack{i\in I \\ j\notin I}} \frac{\mathrm{sh}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\omega_2}(x_i - x_j - \imath g)}{\mathrm{sh}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\omega_2}(x_i - x_j)} \cdot T_I^{-\imath\omega_1} \cdot \prod_{\substack{i\in I \\ j\notin I}} \frac{\mathrm{sh}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\omega_2}(x_i - x_j + \imath g)}{\mathrm{sh}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\omega_2}(x_i - x_j)}.$$

Связь операторов Руджинарса и Макдональда

$$M_r(\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\substack{I\subset[n] \\ |I|=r}} \prod_{\substack{i\in I \\ j\notin I}} \frac{\mathrm{sh}\, \frac{\pi}{\omega_2}(x_i - x_j - \imath g)}{\mathrm{sh}\, \frac{\pi}{\omega_2}(x_i - x_j)} \cdot T_{I,x}^{-\imath\omega_1}, \;\; z_i = e^{x_i}$$

в аддитивных переменных:

$$z_i = e^{\frac{\pi x_i}{\omega_2}}, q = e^{-\frac{\pi i \omega_1}{\omega_2}}$$

Тогда

$$\sqrt{\mu(\boldsymbol{x}_n)}\, M_r(\boldsymbol{x}_n)\, \frac{1}{\sqrt{\mu(\boldsymbol{x}_n)}} = H_r(\boldsymbol{x}_n),$$

где

$$\mu(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \mu(x_i - x_j), \qquad \mu(x) := S_2(\imath x|\boldsymbol{\omega}) S_2^{-1}(\imath x + g|\boldsymbol{\omega}).$$

Здесь $S_2(x) = S_2(x|\omega_1, \omega_2)$ - двойной синус

$$\frac{S_2(x)}{S_2(x+\omega_1)} = 2\sin\frac{\pi x}{\omega_2}, \qquad \frac{S_2(x)}{S_2(x+\omega_2)} = 2\sin\frac{\pi x}{\omega_1}$$

Операторы Макдональда симметричны относительно

$$(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\bar{f}_2(x)\mu(\boldsymbol{x}_n)d\boldsymbol{x}_n, \;\; g \in \mathbb{R}$$

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)f_2(-x)\mu(\boldsymbol{x}_n)d\boldsymbol{x}_n, \;\; g \in \mathbb{C}$$

Руджинарс: воспроизводящее ядро (kernel function)

$$K(x) := S_2^{-1}\left(\imath x + \frac{g^*}{2}\right) S_2^{-1}\left(-\imath x + \frac{g^*}{2}\right)$$

$$g^* = \omega_1 + \omega_2 - g.$$

$$K(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_m) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} K(x_i - y_j).$$

Рациональное вырождение

$$\mu(x) = \Gamma^{-1}(ix)\Gamma^{-1}(ix+g), K(x) = \Gamma(ix + g/2)\Gamma(-ix + g/2)$$

Дифференциальное вырождение (Сазерленд)

$$\mu(x) = \mathrm{sh}^g(x), \qquad K(x) = \mathrm{ch}^{-g}(x), \qquad g^* = 1 - g$$

Повышащие операторы

$$\left(\Lambda_n(\lambda)f\right)(\boldsymbol{x}_n) = d_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\boldsymbol{y}_{n-1}) d\boldsymbol{y}_{n-1}\, \Lambda(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}; \lambda) f(\boldsymbol{y}_{n-1})$$

$$\Lambda(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}; \lambda) = e^{2\pi i\lambda\left(\sum_i x_i - \sum_j y_j\right)} K(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}),$$

Теорема M. Hallnäs, S. Ruijsenaars

$$\Psi_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n(\lambda_n)\,\Lambda_{n-1}(\lambda_{n-1}) \cdots \Lambda_2(\lambda_2)\, e^{2\pi i \lambda_1 x_1}, \qquad 0 < g < \omega_2$$

волновая функция гиперболической системы Руджинарса

$$M_r(\boldsymbol{x}_n)\,\Psi_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n) = e_r\left(e^{2\pi\lambda_1\omega_1}, \ldots, e^{2\pi\lambda_n\omega_1}\right)\Psi_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

Доказательство: Тождества (kernel function identities)

$$M_r(\boldsymbol{x}_n)K(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n) = M_r(-\boldsymbol{y}_n)K(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n),$$

$$\Big[M_r(\boldsymbol{x}_n) - M_r(-\boldsymbol{y}_{n-1}) - M_{r-1}(-\boldsymbol{y}_{n-1})\Big]K(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_{n-1}) = 0.$$

$+$ симметричность операторов M_r по отношению к $\langle\,,\rangle$ с мерой $\mu(\boldsymbol{y}_n)d\boldsymbol{x}_n$.

Коммутативность операторов Руджинарса - Макдональда и соотношения на воспроизводящее ядро следуют из следующих функциональных тождеств

Функциональные тождества

$$\sum_{\substack{I_r\subset[n]\\|I_r|=r}}\prod_{i\in I_r}\prod_{j\in[n]\setminus I_r}\frac{s(z_i-z_j-\alpha)s(z_i-z_j+\alpha-\beta)}{s(z_i-z_j)s(z_i-z_j-\beta)}=$$
$$\sum_{\substack{I_r\subset[n]\\|I_r|=r}}\prod_{i\in I_r}\prod_{j\in[n]\setminus I_r}\frac{s(z_i-z_j+\alpha)s(z_i-z_j-\alpha+\beta)}{s(z_i-z_j)s(z_i-z_j+\beta)} \tag{1}$$

$$s(x)=x,\qquad s(x)=\sin x,\qquad s(x)=\theta_1(x)\ (\sigma(x))$$

$$\sum_{\substack{I_r\subset[n]\\|I_r|=r}}\prod_{i\in I_r}\left(\prod_{j\in[n]\setminus I_r}\frac{s(z_i-z_j-\alpha)}{s(z_i-z_j)}\prod_{a=1}^{n}\frac{s(z_i-y_a+\alpha)}{s(z_i-y_a)}\right)=$$

$$\sum_{\substack{A_r\subset[n]\\|A_r|=r}}\prod_{a\in A_r}\left(\prod_{b\in[n]\setminus A_r}\frac{s(y_a-y_b+\alpha)}{s(y_a-y_b)}\prod_{i=1}^{n}\frac{s(z_i-y_a+\alpha)}{s(z_i-y_a)}\right). \tag{2}$$

Коммутативность $M_r \leftrightarrow (1)$
Kernel function identity $\leftrightarrow (2)$

Q - операторы Бакстера

$$(Q_n(\lambda)f)(\boldsymbol{x}_n) = d_n \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\boldsymbol{y}_n) d\boldsymbol{y}_n \, Q(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n; \lambda) f(\boldsymbol{y}_n),$$

$$Q(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n; \lambda) = e^{2\pi i \lambda (\sum_i (x_i - y_i)} K(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)$$

Теорема (простая) Белоусов, Деркачев, Харчев, СХ

$$M_r Q_n(\lambda) = Q_n(\lambda) M_r$$

Теорема(трудная) BDKK

$$Q_n(\lambda) Q_n(\mu) = Q_n(\mu) Q_n(\lambda)$$

Эквивалентна равенству интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{a=1}^{2n} \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i \lambda y_i} K(z_a - y_i) \mu(\boldsymbol{y}_n) d\boldsymbol{y}_n =$$

$$e^{2\pi i \lambda \sum_{j=1}^{2n} z_j} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{a=1}^{2n} \prod_{i=1}^{n} e^{-2\pi i \lambda y_i} K(z_a - y_i) \mu(\boldsymbol{y}_n) d\boldsymbol{y}_n.$$

Рациональный предел

$$\int_{i\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi\lambda y_i} dy_i \frac{\prod_{a=1}^{2n} \Gamma(z_a - y_i + g/2)\Gamma(y_i + z_a + g/2)}{\prod_{j\neq i}^{n} \Gamma(y_i - y_j)\Gamma(y_i - y_j + g)} =$$

$$e^{2\pi\lambda \sum_{j=1}^{2n} z_j} \int_{i\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-2\pi\lambda y_i} dy_i \frac{\prod_{a=1}^{2n} \Gamma(z_a - y_i + g/2)\Gamma(y_i + z_a + g/2)}{\prod_{j\neq i}^{n} \Gamma(y_i - y_j)\Gamma(y_i - y_j + g)}$$

Дифференциальный предел (Sutherland)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i\lambda y_i} dy_i \frac{\prod_{j\neq i}^{n} \mathrm{sh}^g(y_i - y_j)}{\prod_{a=1}^{2n} \mathrm{ch}^g(y_i - z_a)} =$$

$$e^{2\pi i\lambda \sum_{j=1}^{2n} z_j} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-2\pi i\lambda y_i} dy_i \frac{\prod_{j\neq i}^{n} \mathrm{sh}^g(y_i - y_j)}{\prod_{a=1}^{2n} \mathrm{ch}^g(y_i - z_a)}$$

Доказательство 1. Простые полюса:
гипергеометрическое преобразование дуальности

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|=K}\prod_{i,j=1}^{n}\frac{s(x_i-x_j-k_j-\alpha)_{k_i}}{s(x_i-x_j-k_j)_{k_i}}\prod_{a,j=1}^{n}\frac{s(x_j-y_a+\alpha)_{k_j}}{s(x_j-y_a)_{k_j}}=$$
$$\sum_{|\boldsymbol{k}|=K}\prod_{a,b=1}^{n}\frac{s(y_a-y_b-k_a-\alpha)_{k_b}}{s(y_a-y_b-k_a)_{k_b}}\prod_{j,a=1}^{n}\frac{s(x_j-y_a+\alpha)_{k_a}}{s(x_j-y_a)_{k_a}}. \tag{3}$$

$$s(x)_k=s(x)s(x+1)\cdots s(x+k-1)$$

2. Кратные полюса. Суммирование по симметричным нулям меры $\square$

$$Q_n(\lambda)Q_n(\mu)=Q_n(\mu)Q_n(\lambda)$$
$$\Updownarrow$$
$$\Lambda_n(\lambda)\Lambda_{n-1}(\mu)=\Lambda_n(\mu)\Lambda_{n-1}(\lambda)$$

Следствие $\Psi_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n)$ is symmetric over x_i and over λ_i.

Вырождение соотношения коммутативности Q операторов

$$g^* = \omega_1 + \omega_2 - g,$$

$$K(x) = S_2^{-1}\Big(\imath x + \frac{g^*}{2}\Big) S_2^{-1}\Big(-\imath x + \frac{g^*}{2}\Big),$$

$$\hat{K}(\lambda) = S_2^{-1}\Big(\imath\lambda + \frac{g}{2}\Big) S_2^{-1}\Big(-\imath\lambda + \frac{g}{2}\Big)$$

$$Q_n(\lambda)\Lambda_n(\mu) = \hat{K}(\lambda-\mu)\Lambda_n(\mu)Q_{n-1}(\lambda)$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \times \int_{\mathbb{R}}\Big)$$

Рациональный предел

$$\hat{K}(\lambda) = \mathrm{sh}^g(\lambda)$$

Предел Сазерленда

$$\hat{K}(\lambda) = \Gamma\Big(i\lambda + \frac{g}{2}\Big)\Gamma\Big(-i\lambda + \frac{g}{2}\Big)$$

Доказательство.

$$Q_n(\lambda)Q_n(\mu): \;\; f(z_1,\dots,z_n)\to f(x_1,\dots,x_n)$$

Умножим соотношение $Q_n(\lambda)Q_n(\mu)=Q_n(\mu)Q_n(\lambda)$ на

$$\exp(\pi(2i\mu+(2-n)g)z_n$$

и устремим $z_n\to+\infty$

Следствие

$$Q_n(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\prod_{j=1}^{n}\hat{K}(\lambda-\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

Использованы ыследующие связи между Q и Λ:

$$Q_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n; \lambda) = e^{2\pi i\lambda y_n} \prod_{i=1}^{n} K(x_i - y_n)\Lambda_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}; \lambda),$$

$$\Lambda_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}\lambda) = e^{-2\pi i\lambda x_n} \prod_{i=1}^{n-1} K(x_n - y_i) Q_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}_{n-1}; \lambda),$$

$$\Lambda_n(\lambda) = \lim_{y_n \to \infty} Q_n(\lambda) \exp(\pi(2i\lambda + (2-n)g) y_n$$

Дуальные операторы Бакстера

Действуют по спектральным переменным.

$$\left(\hat{Q}_n(x)f\right)(\boldsymbol{\lambda}_n) = \hat{d}_n, \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n) d\boldsymbol{\gamma}_n \, \hat{Q}(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n; x) f(\boldsymbol{\gamma}_n),$$

$$\left(\hat{\Lambda}_n(x)f\right)(\boldsymbol{\lambda}_n) = \hat{d}_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n) d\boldsymbol{\gamma}_{n-1} \, \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_{n-1}; x) f(\boldsymbol{\gamma}_{n-1})$$

$$\hat{Q}(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n; x) = e^{2\pi i x \sum_i (\lambda_i - \gamma_i)} \hat{K}(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n),$$

$$\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_{n-1}; x) = e^{2\pi i x (\sum_i \lambda_i - \sum_j \gamma_j)} \hat{K}(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_{n-1}).$$

Дуальная мера

$$\hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \hat{\mu}(\gamma_i - \gamma_j), \qquad \hat{\mu}(\gamma) := S_2(\imath\gamma|\boldsymbol{\omega}) S_2^{-1}(\imath\gamma + g^*|\boldsymbol{\omega}).$$

Дуальная мера в рациональном пределе (как в Сазерленде)

$$\hat{\mu}(\gamma) = \mathrm{sh}^{g}(\gamma)$$

Дуальная мера в нерелятивистском пределе (как в рациональном варианте Руджинарса)

$$\hat{\mu}(\gamma) = \Gamma^{-1}(i\gamma)\Gamma^{-1}(i\gamma + g)$$

Теоремы дуальности

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n(\lambda_n)\,\Lambda_{n-1}(\lambda_{n-1})\cdots\Lambda_2(\lambda_2)\,e^{2\pi i\lambda_1 x_1},$$
$$\hat{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \hat{\Lambda}_n(x_n)\,\hat{\Lambda}_{n-1}(x_{n-1})\cdots\hat{\Lambda}_2(x_2)\;e^{2\pi i\lambda_1 x_1}$$

Теорема BDKK

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \hat{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$$

Равенство двух интегральных представлений

Другая формулировка

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{\lambda}_n), \qquad g \leftrightarrow g^*$$

Следствие. $(\omega_1\omega_2 = 1)$ 1. Функция $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ решает биспектральную задачу для дуальных операторов Макдональда

$$M_r(\boldsymbol{x}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e_r\Big(e^{2\pi\lambda_1\omega_1}, \dots, e^{2\pi\lambda_n\omega_1}\Big)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n),$$

$$M_r(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e_r\Big(e^{2\pi x_1\omega_1}, \dots, e^{2\pi x_n\omega_1}\Big)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$$

2. Функция $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ решает биспектральную задачу для дуальных операторов Бакстера

$$Q_n(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{j=1}^{n}\hat{K}(\lambda-\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n),$$

$$Q_n(x)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{j=1}^{n}K(x-x_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

Аналогичная дуальность в теории полиномов Макдональда:

$$\tilde{P}_\lambda(\boldsymbol{z}) = \frac{P_\lambda(\boldsymbol{z})}{P_\lambda(\boldsymbol{t}^\rho)}, \qquad \rho = (n-1, n-2, \dots 0) \to,$$

$$\tilde{P}_\lambda(\boldsymbol{t}^\rho \boldsymbol{q}^\mu) = \tilde{P}_\mu(\boldsymbol{t}^\rho \boldsymbol{q}^\lambda)$$

Доказательство теоремы дуальности

$$\Lambda_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}\lambda) = e^{-2\pi i\lambda x_n} \prod_{i=1}^{n-1} K(x_n - y_i) Q_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}_{n-1}; \lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda_n(\lambda) = e^{2\pi\imath\lambda x_n} Q_{n-1}(\lambda) \prod_{j=1}^{n-1} K(x_n - x_j).$$

Предположим

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \hat{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1})$$

Тогда

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n(\lambda_n)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) =$$

$$e^{2\pi\imath\lambda_n x_n}\, Q_{n-1}(\lambda_n) \prod_{j=1}^{n-1} K(x_n - x_j)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) =$$

$$e^{2\pi\imath\lambda_n x_n}\, Q_{n-1}(\lambda_n)\hat{Q}_{n-1}(x_n)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) =$$

(Фубини)

$$e^{2\pi\imath\lambda_n x_n}\, \hat{Q}_{n-1}(x_n)Q_{n-1}(\lambda_n)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) =$$

$$e^{2\pi\imath\lambda_n x_n}\, \hat{Q}_{n-1}(x_n)\hat{K}(\lambda_n - \lambda_j)\hat{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1})$$

$$\hat{\Lambda}_n(x_n)\hat{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \hat{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$$

Следствие

Симметричное представление $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ $n(n-1)$ кратным интегралом

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{2\pi i \lambda_n x_n} Q_{n-1}(\lambda_n)\, \hat{Q}_{n-1}(x_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1})$$

$$= Q_{n-1}(\lambda_n)\, \hat{Q}_{n-1}(x_n) \cdots Q_1(\lambda_2)\, \hat{Q}_1(x_2)\, e^{2\pi i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)}.$$

Для открытой цепочки Тода аналогичное представление получено Герасимовым, Лебедевым и Облезиным (2007)

Ортогональность и полнота

Теорема (BDKK)

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \mu(\boldsymbol{x}_n)\, \overline{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}'_n}(\boldsymbol{x}_n)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \hat{\mu}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \delta(\boldsymbol{\lambda}'_n, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \overline{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}'_n)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \mu^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\, \delta(\boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{x}_n).$$

Здесь

$$\delta(\boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} \prod_{k=1}^{n} \delta(x'_k - x_{w(k)})$$

симметризованная дельта - функция

Доказательство использует нестандартную δ образную последовательность

$$\left(\Psi_{\boldsymbol{\lambda}'_n} | \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}\right)^{x,\epsilon}_{\mu} = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \mu(\boldsymbol{x}_n)\, e^{2\pi\left(\varepsilon - \frac{\hat{g}}{2}\right)(\sum_i x_i - nx)}$$
$$K(x, \boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}'_n}(-\boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

и явно вычисленный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \mu(\boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\gamma_n}(-\boldsymbol{x}_n)\, K(x, \boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) =$$
$$[\sqrt{\omega_1\omega_2} S_2(g|\boldsymbol{\omega})]^n\, e^{2\pi\imath x\left(\sum_i (\lambda_i - \gamma_i)\right)} \prod_{i,j=1}^{n} \hat{K}(\lambda_i - \gamma_j)\,.$$

Дуальность $g \leftrightarrow g^*$ и второе семейство Q операторов . $((q,t) \leftrightarrow (q, qt^{-1})$ в теории Макдональда

$$M_r(\boldsymbol{x}_n; g) = \eta^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\, M_r(\boldsymbol{x}_n; g^*)\, \eta(\boldsymbol{x}_n)$$

где

$$\eta(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} S_2^{-1}(\imath x_i - \imath x_j + g).$$

Определим

$$Q_n^*(\lambda) = \eta^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\, Q_n(\lambda; g^*)\, \eta(\boldsymbol{x}_n),$$

Тогда

$$\Big(Q_n^*(\lambda)f\Big)(\boldsymbol{x}_n) = \eta^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta(\boldsymbol{y}_n)d\boldsymbol{y}_n\, Q^*(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n;\lambda)f(\boldsymbol{y}_n),$$
$$Q^*(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n;\lambda) = \ e^{2\pi\imath\lambda\sum_j(x_j-y_j)}\hat{K}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n).$$

$$\Delta(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} S_2(\imath x_i - \imath x_j) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} 4\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi(x_i-x_j)}{\omega_1}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi(x_i-x_j)}{\omega_2},$$

Теорема (следствие предыдущего)

$$Q_n^*(\lambda)\,M_r(\boldsymbol{x}_n;g) = M_r(\boldsymbol{x}_n;g)\,Q_n^*(\lambda),$$
$$Q_n^*(\lambda)\,Q_n^*(\rho) = Q_n^*(\rho)\,Q_n^*(\lambda).$$

Теорема (нетривиальная)

$$Q_n^*(\lambda)\, Q_n(\rho) = Q_n(\rho)\, Q_n^*(\lambda).$$

Следует из специализации интегральных тождеств Э.Райнса

$$\eta(\boldsymbol{z}_n) \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\, e^{2\pi\imath\rho\sum y_i} \Delta(\boldsymbol{y}_n)$$
$$\times \prod_{i,j=1}^{n} S_2^{-1}\left(\pm\imath(x_i - y_j) + \frac{g}{2}\right) S_2^{-1}\left(\pm\imath(z_i - y_j) + \frac{g^*}{2}\right)$$
$$= e^{2\pi\imath\rho\sum_j (x_j+z_j)} \eta(\boldsymbol{x}_n) \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\, e^{-2\pi\imath\rho\sum_j y_j} \Delta(\boldsymbol{y}_n)$$
$$\times \prod_{i,j=1}^{n} S_2^{-1}\left(\pm\imath(x_i - y_j) + \frac{g^*}{2}\right) S_2^{-1}\left(\pm\imath(z_i - y_j) + \frac{g}{2}\right).$$

Вырождение

$$Q_n^*(\lambda)\,\Lambda_n(\rho) = K(\lambda-\rho)\,\Lambda_n(\rho)\,Q_{n-1}^*(\lambda) \tag{4}$$

Следствие

$$Q_n^*(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{j=1}^{n} K(\lambda-\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

Новые повышающие операторы

$$\Lambda_n^*(\lambda) = \eta^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\,\Lambda_n(\lambda; g^*)\,\eta(\boldsymbol{x}_{n-1}),$$

$$\Big(\Lambda_n^*(\lambda)f\Big)(\boldsymbol{x}_n) = \eta^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta(\boldsymbol{y}_n)d\boldsymbol{y}_{n-1}\,\Lambda^*(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_{n-1};\lambda)f(\boldsymbol{y}_{n-1})$$

$$\Lambda^*(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_{n-1};\lambda) = e^{2\pi\imath\lambda(\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n-1} y_j)}\,\hat{K}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_{n-1}).$$

$$Q_n(\lambda)\,\Lambda_n^*(\rho) = K(\lambda-\rho)\,\Lambda_n^*(\rho)\,Q_{n-1}(\lambda)$$

Положим

$$\Psi^*_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n^*(\lambda_n)\,\Lambda_{n-1}^*(\lambda_{n-1})\cdots\Lambda_2^*(\lambda_2)\,e^{2\pi i\lambda_1 x_1}$$

Тогда

$$\Psi^*_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = C(\boldsymbol{\lambda}_n)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$$

$$C(\boldsymbol{\lambda}_n) = ?$$

Еще одно вырождение

$$\Lambda_n^*(\lambda)\,\Lambda_{n-1}(\rho) = K_{2g}(\lambda-\rho)\,\Lambda_n(\rho)\,\Lambda_{n-1}^*(\lambda)$$

где

$$K_{2g}(\lambda-\rho) = S_2^{-1}(\imath\lambda-\imath\rho+g^*)\,S_2^{-1}(\imath\rho-\imath\lambda+g^*).$$

$$C(\boldsymbol{\lambda}_n) = \eta(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} S_2^{-1}(\imath\lambda_i - \imath\lambda_j + g).$$

Эквивалентно

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n; g) = \eta^{-1}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\eta^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n; g^*). \tag{5}$$

Дуальность $g \leftrightarrow g^*$ пропадает в пределе Сазерленда.

- N. Belousov, S. Derkachov, S. Kharchev, S. Khoroshkin, Baxter operators in Ruijsenaars hyperbolic system I,II, III, Annales Henri Poincaré (2023 - 2024), arXiv:2303.06383, 2303.06382, 2307.16817
- N. Belousov, S. Derkachov, S. Kharchev, S. Khoroshkin, Baxter operators in Ruijsenaars hyperbolic system IV, Comm. Math. Phys (2024) 405:4 , arXhiv: 2308.07619