

**Объединенный институт ядерных исследований**  
**Осенняя Школа по информационным технологиям**

**Математическое моделирование  
джозефсоновского перехода сверхпроводник /  
ферромагнетик / сверхпроводник на  
поверхности трехмерного топологического  
изолятора**

**Рахмонов Илхом Рауфович**

**Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Дубна, Россия**

**07-11 октября 2024**  
**Дубна**

# Содержание

## I. Введение

Эффект Джозефсона

Типы джозефсоновских переходов

Аномальный эффект Джозефсона

## II. Основные физические свойства

RCSJ-модель и ВАХ

Влияние внешнего излучения

Влияние геометрических характеристик

## III. Исследование динамики $\Phi_0$ перехода (SFS переход)

Теоретическая модель и система уравнений

Прецессия намагниченности и ферромагнитный резонанс

Приближение линейного осциллятора

Приближение нелинейного осциллятора. Осциллятор Даффинга

Переворот намагниченности под воздействием импульса тока

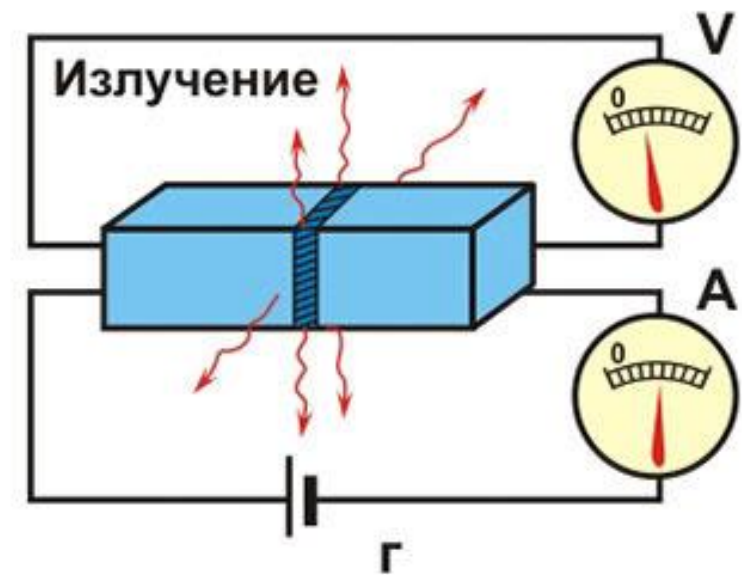
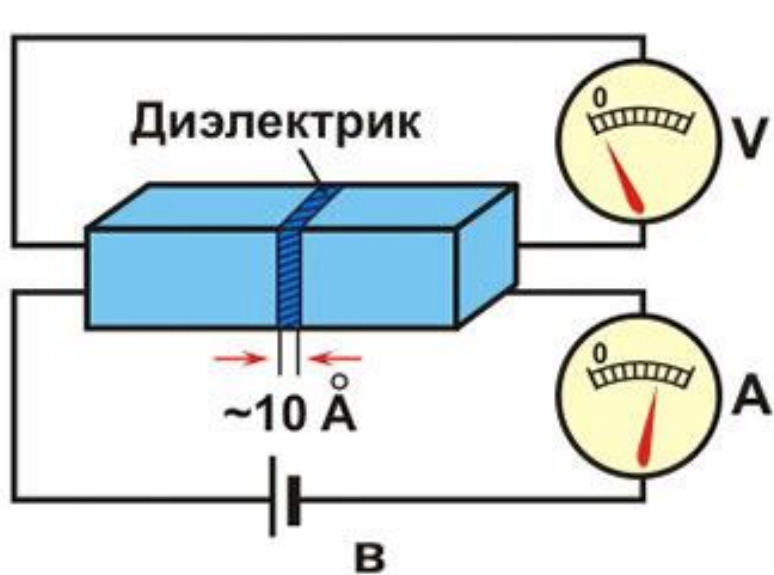
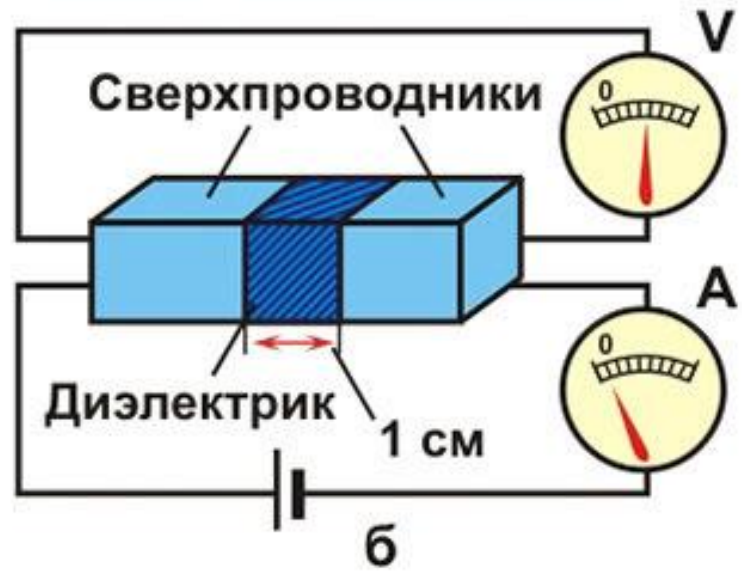
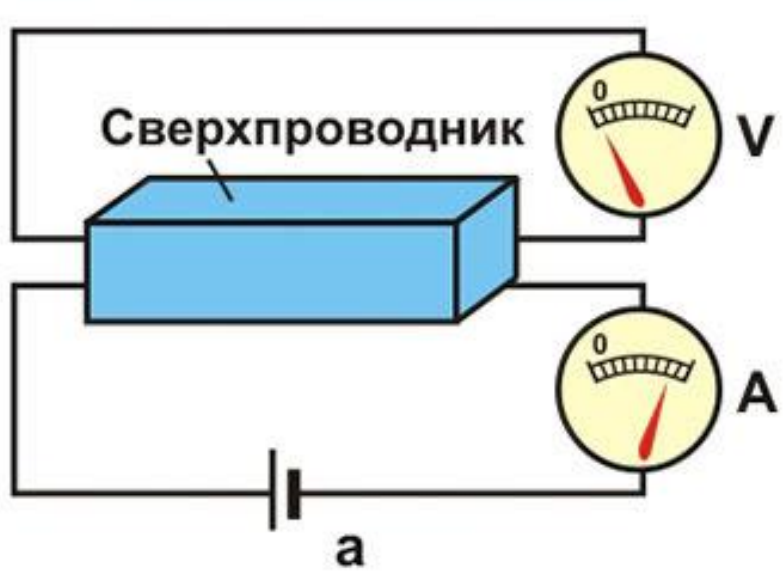
## III. Исследование динамики SFS перехода на поверхности топологического изолятора

Теоретическая модель и система уравнений

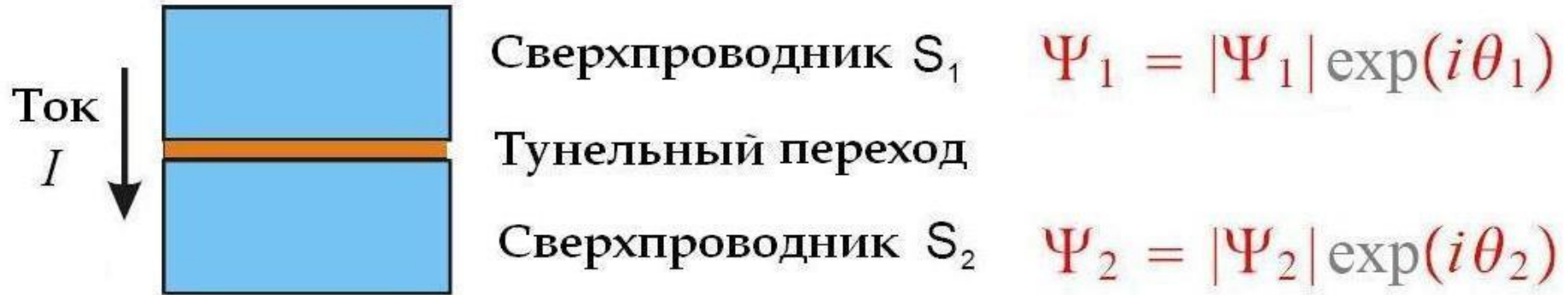
Вырожденные стабильные состояния

# Введение

# Эффект Джозефсона



# Джозефсонский переход и эффекты Джозефсона



$\Psi_1$  и  $\Psi_2$  волновые функции сверхпроводящих электродов.

$\theta_1$  и  $\theta_2$  фазы волновых функций.

$$I < I_c, V=0$$

Стационарный эффект Джозефсона:  $I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi$

Нестационарный эффект Джозефсона:  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V$

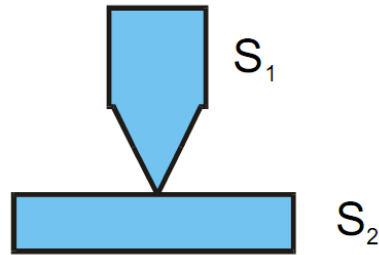
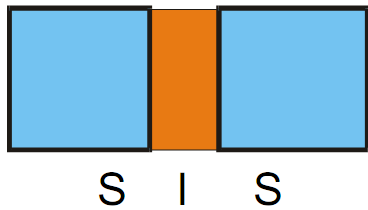
$\varphi = \theta_2 - \theta_1$  разность фаз

$$I > I_c, V > 0$$

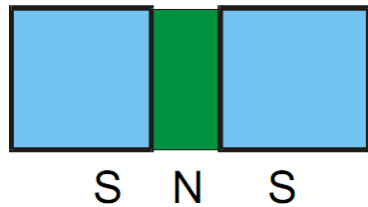
Получен Б. Джозефсоном 1962 г.

$$1 \mu V \leftrightarrow 483.59767 \text{ MHz}$$

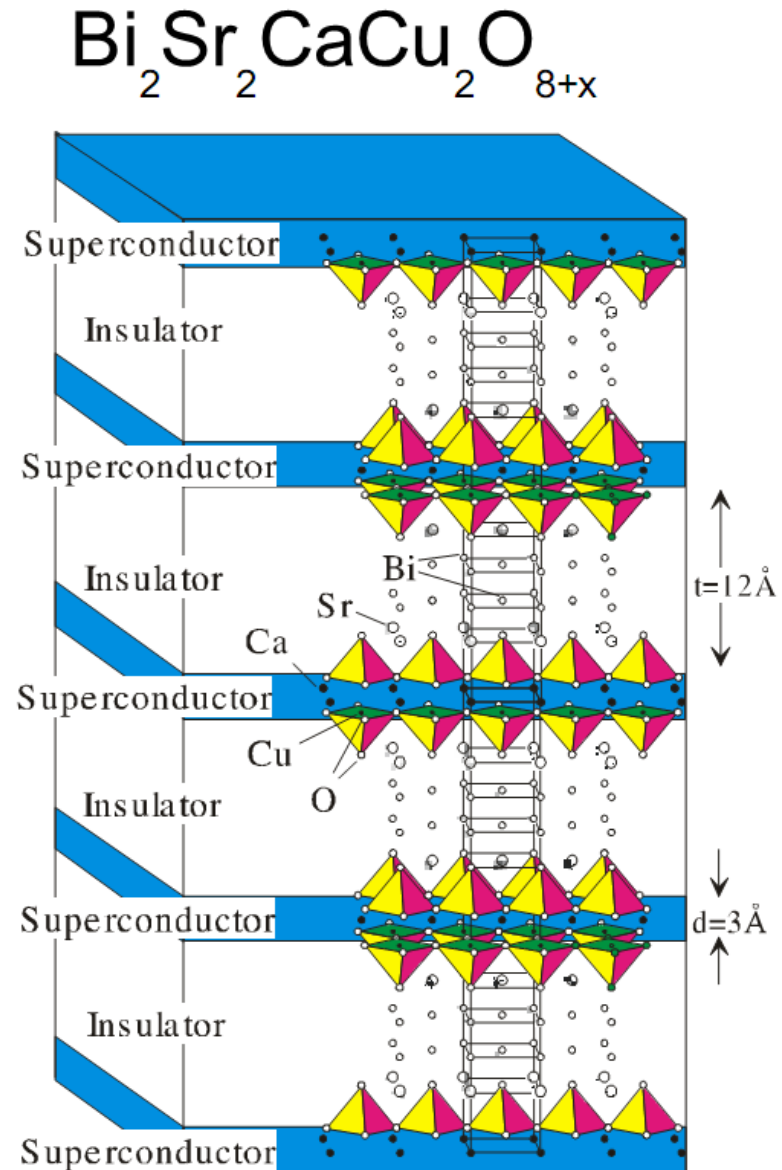
# Типы джозефсоновских переходов



Точечные переходы



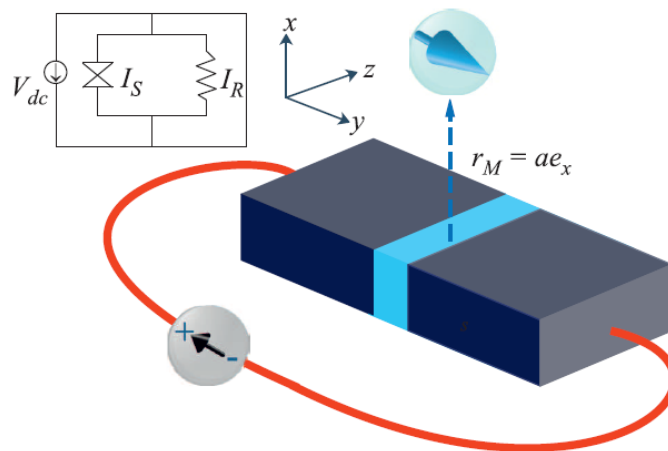
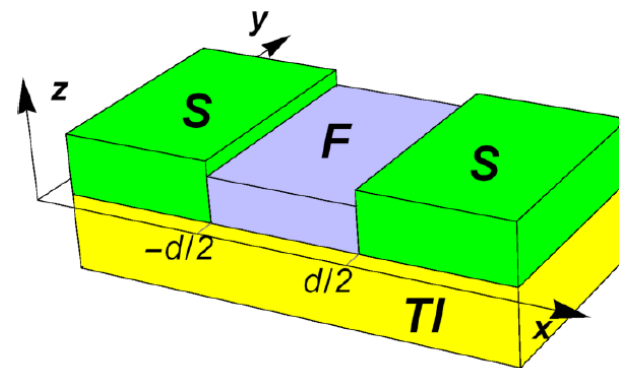
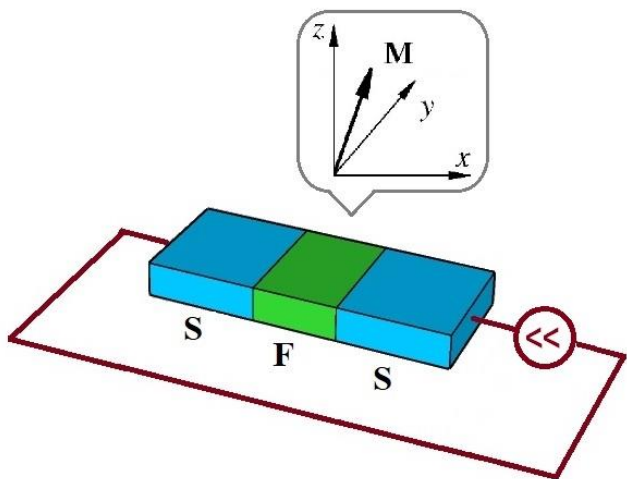
Сверхпроводниковые мостики



# Аномальный эффект Джозефсона

- ▶ Аномальный эффект Джозефсона заключается в возникновении фазового сдвига  $\varphi_0$  в ток фазовом соотношении гибридного джозефсоновского перехода состоящего из сверхпроводников и магнетиков.

$$I_s = I_c(\sin \varphi - \varphi_0)$$



# Основные физические свойства



**RCSJ – модель для описания  
динамики джозефсоновского  
перехода**

## RCSJ - модель

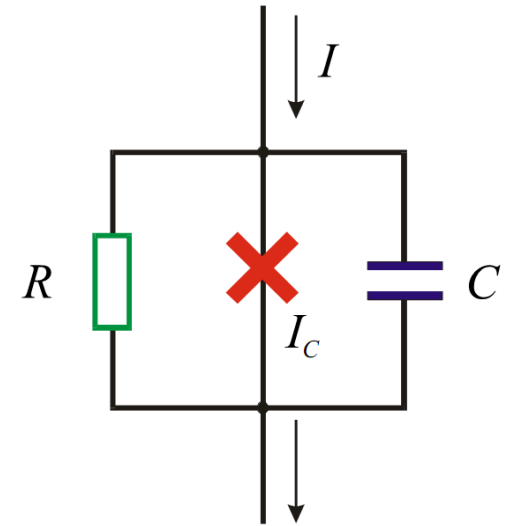
**RCSJ**  $\equiv$  "resistive-capacitive shunted junction"

$$I_{qp} = \frac{V}{R} \text{--quasiparticle,} \quad I_{disp} = C \frac{dV}{dt} \text{--displacement}$$

$$I_s = I_c \sin \varphi \text{--superconducting}$$

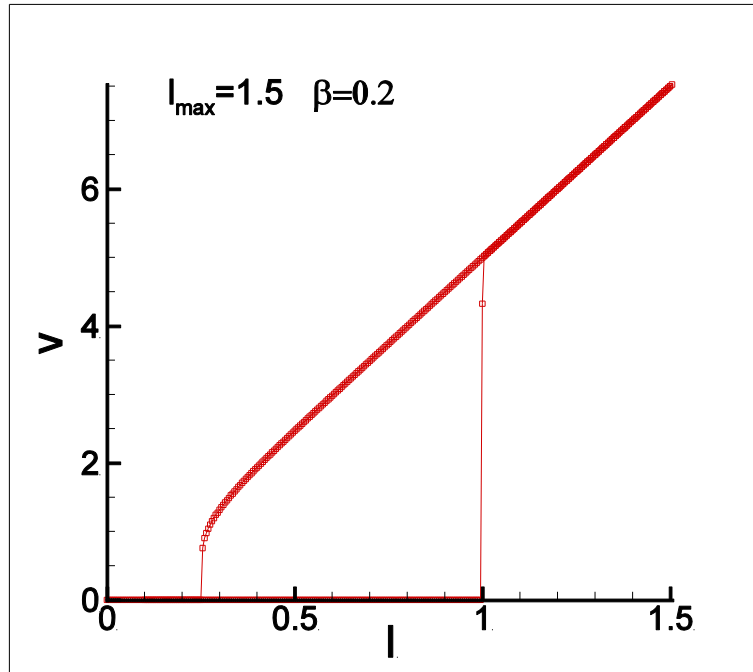
$$I = C \frac{dV}{dt} + I_c \sin \varphi + \frac{V}{R}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases}$$

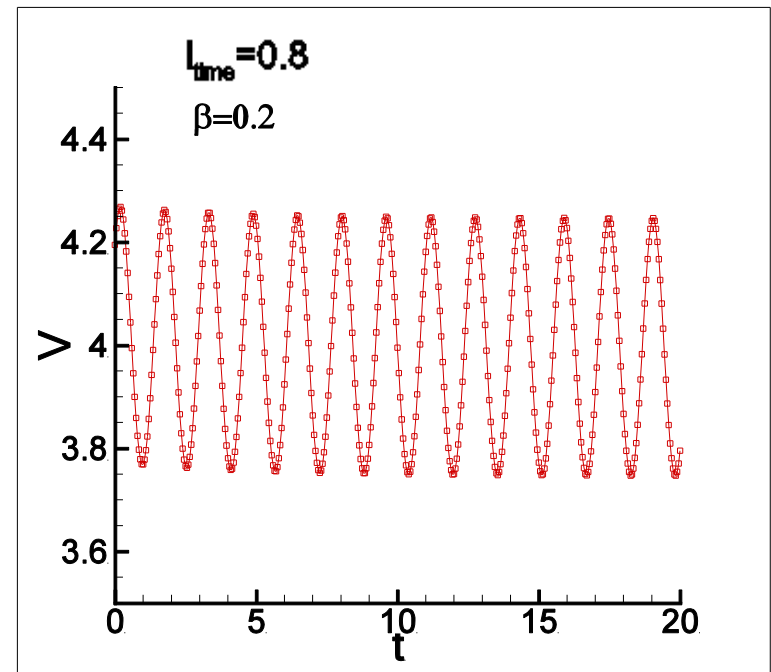
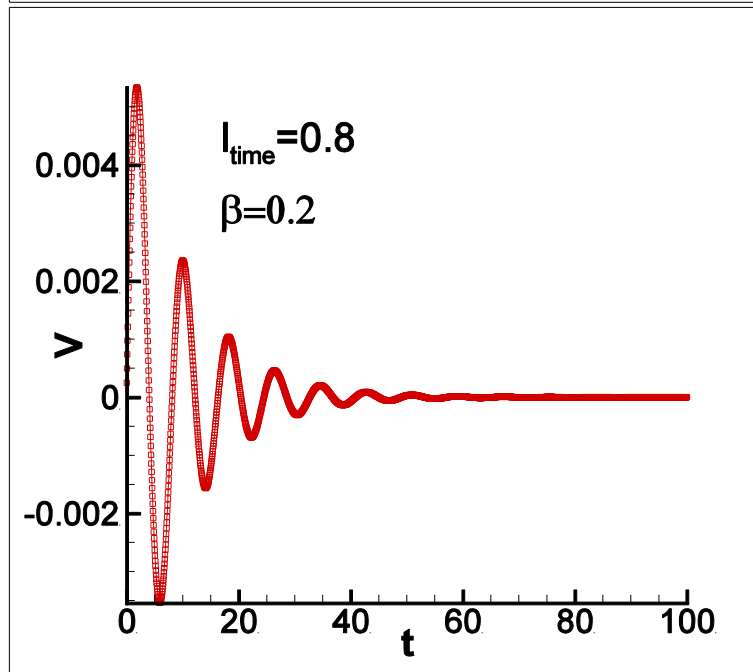


$$V_0 = \frac{\hbar \omega_p}{2e}; \quad \omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{C\hbar}} \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c C}} \quad \frac{I}{I_c} \rightarrow I; \quad \frac{V}{V_0} \rightarrow V$$

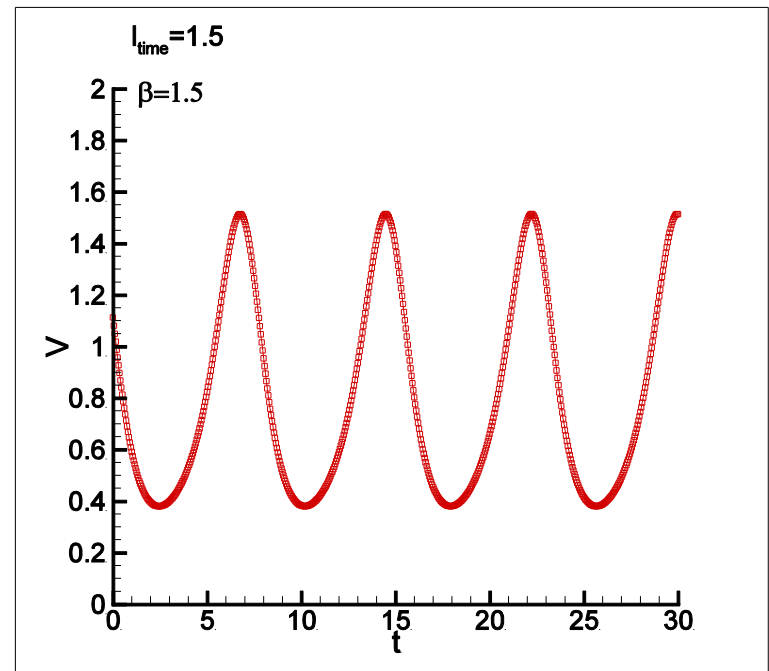
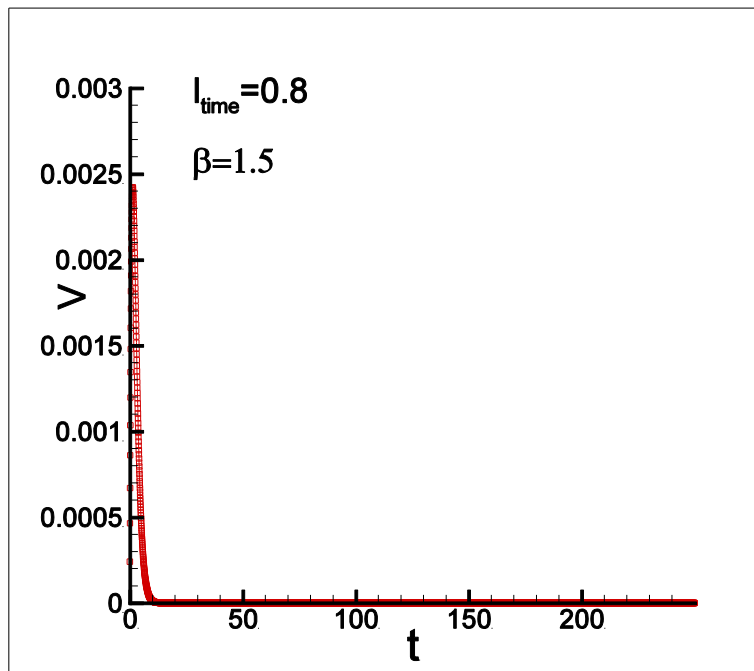
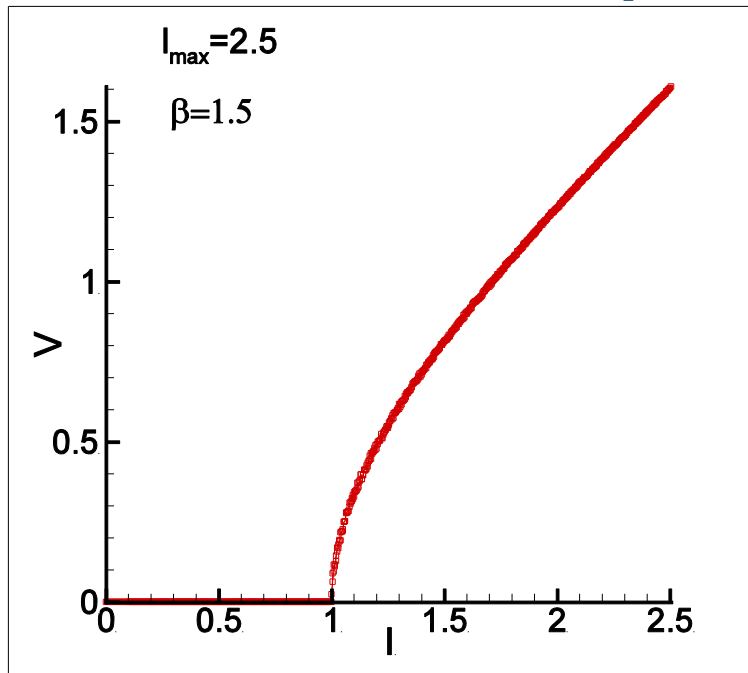
# Особенности одиночного короткого ДП



$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases}$$

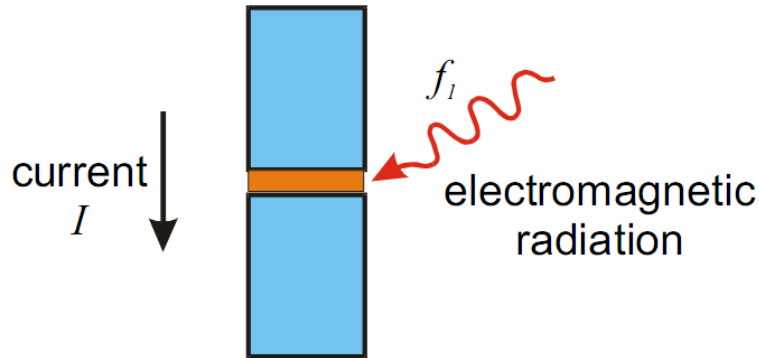


# Особенности одиночного короткого ДП



# **Влияние внешнего излучения**

# Влияние внешнего излучения и ступеньки Шапиро

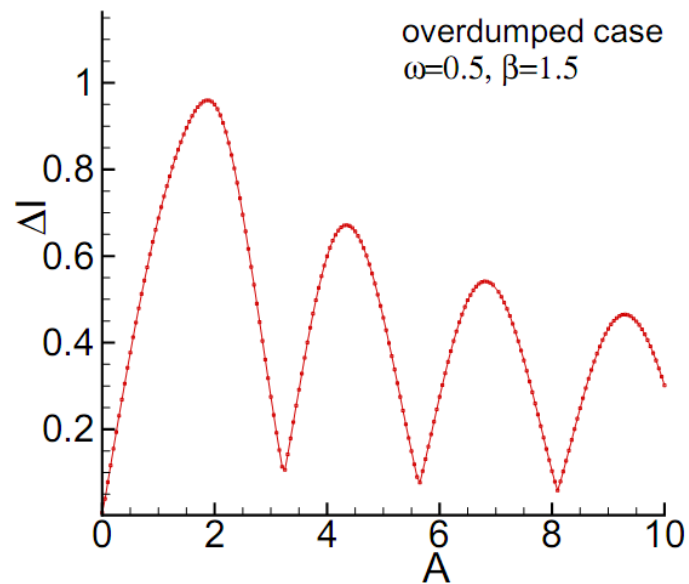
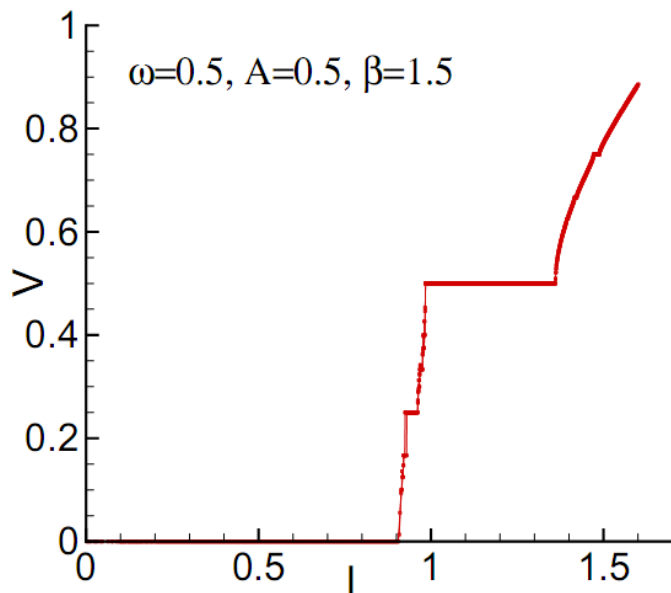
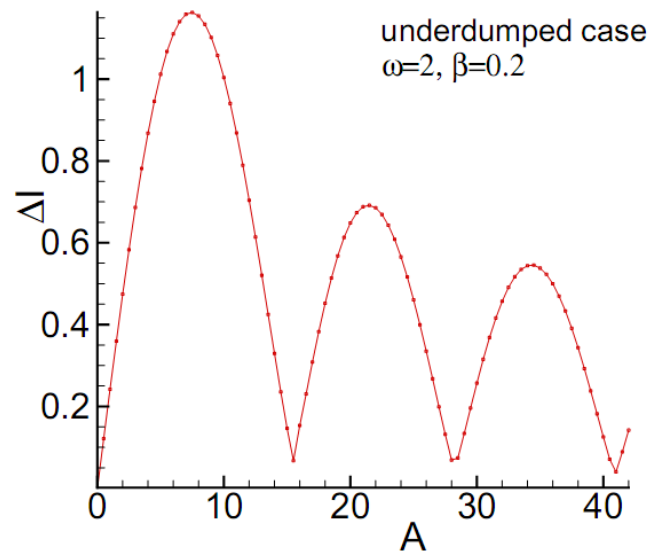
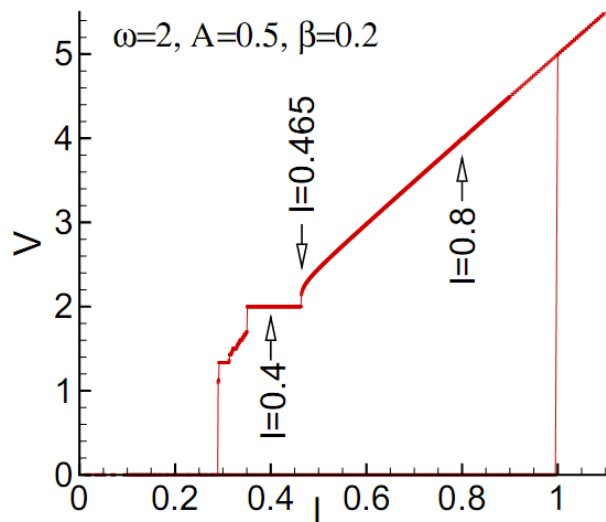


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \sin \omega t \end{array} \right.$$

$$I_s = I_c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n \left( \frac{V_1}{\Phi_0 f_1} \right) \sin \left[ \varphi_0 + \frac{2\pi}{\Phi_0} V_0 t - 2\pi n f_1 t \right]$$

$$\Delta I = 2|J_n(f)|, \quad f = \frac{A}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$$

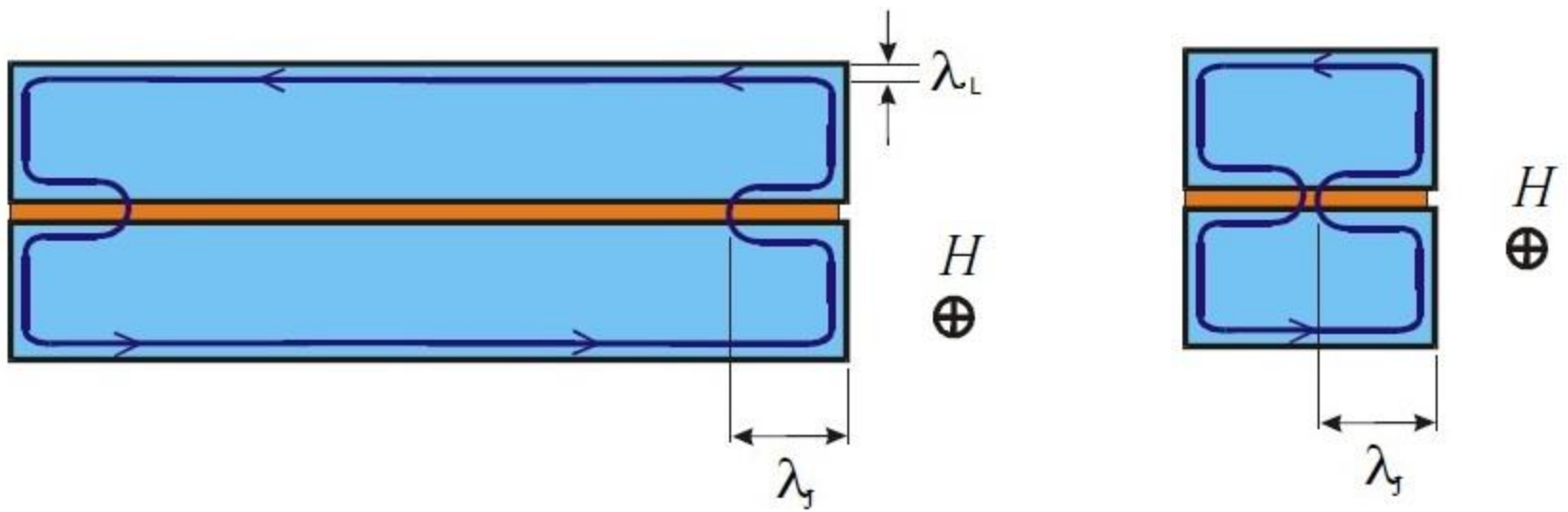
# Влияние внешнего излучения и ступеньки Шапиро



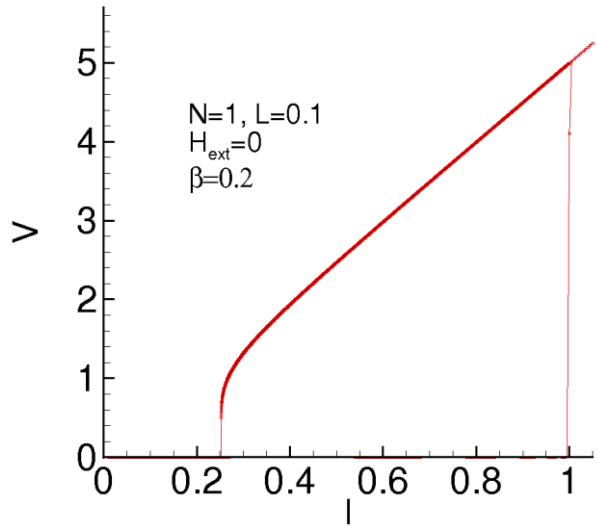
# **Влияние геометрических характеристик**



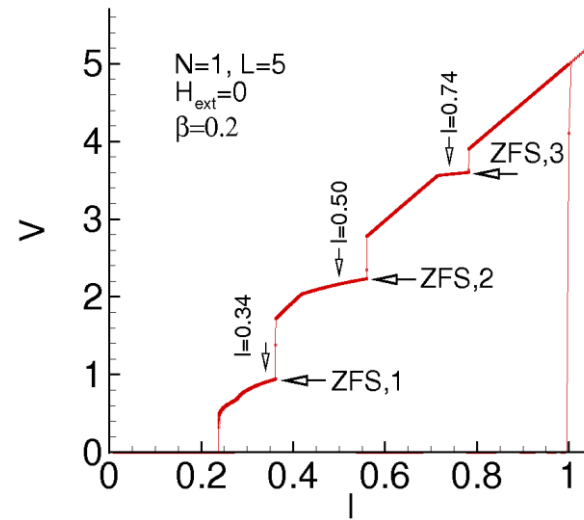
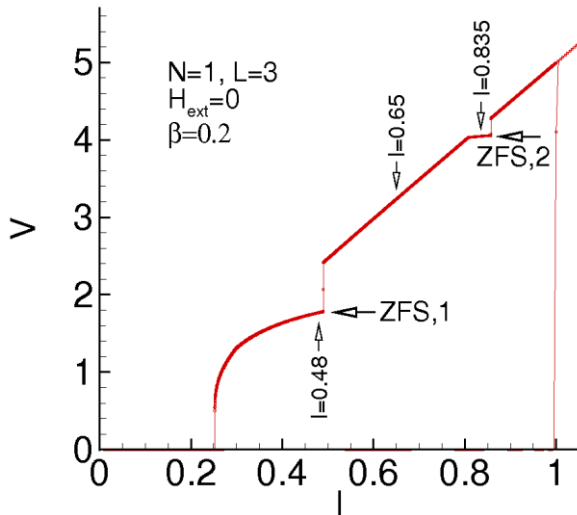
# Длинный и короткий джозефсоновский переход



# Особенности одиночного длинного ДП



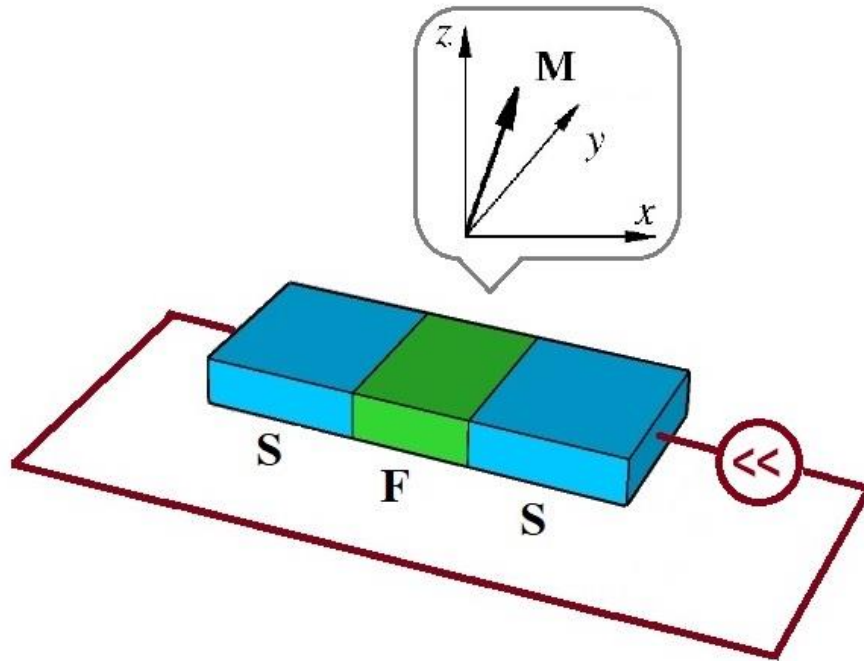
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi - \beta V + I \end{array} \right.$$



Исследование динамики  
Фи-0 перехода  
(SFS - переход)

## Фи-0 джозефсоновский переход

- ▶ В SFS джозефсоновском переходе, спин-орбитальная связь в ферромагнитном слое, приводит к механизму прямой связи магнитного момента и сверхпроводящего тока



$$I_s = I_c(\sin \varphi - \varphi_0)$$

A. Buzdin, Phys. Rev. Lett. 101, 107005 (2008).

F. Konschelle and A. Buzdin, Phys. Rev. Lett. **102**, 017001 (2009)

# Вывод системы уравнений для описания Фи-0 перехода

## Вывод уравнений

- ▶ Уравнение Ландау-Лифшиц-Гильберта для намагниченности

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha}{M_0} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right]$$

- ▶ Эффективное магнитное поле

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{V} \frac{\delta E_t}{\delta \mathbf{M}}$$

$$E_t = -\frac{\Phi_0}{2\pi} I \varphi + E_s(\varphi, \varphi_0) + E_M(\mathbf{M})$$

$$E_s(\varphi, \varphi_0) = E_J [1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad E_M(\mathbf{M}) = -\frac{KV}{2} \left( \frac{M_z}{M_0} \right)^2$$

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{K}{M_0} \left[ Gr \sin \left( \varphi - r \frac{M_y}{M_0} \right) \mathbf{e}_y + \frac{M_z}{M_0} \mathbf{e}_z \right]$$

$$G = \frac{E_J}{KV} \quad \varphi_0 = r \frac{M_y}{M_0}$$

## Вывод уравнений

► Уравнение RCSJ-модели для разности фаз

$$I = C \frac{dV}{dt} + \frac{I_c}{\omega_c} \left[ \frac{d\varphi}{dt} - r \frac{d}{dt} \left( \frac{M_y}{M_0} \right) \right] + I_c \sin \left( \varphi - r \frac{M_y}{M_0} \right)$$

$$\omega_c = \frac{2eRI_c}{\hbar}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = - \frac{\Omega_F}{[1 + (\alpha\mathbf{M}/M_0)^2]} \left\{ \frac{M_0}{K} [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \frac{\alpha}{K} [\mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{H}_{\text{eff}}) - \mathbf{H}_{\text{eff}}\mathbf{M}^2] \right\}$$

$$C \frac{dV}{dt} = I - \frac{I_c}{\omega_c} \left[ \frac{d\varphi}{dt} - r \frac{d}{dt} \left( \frac{M_y}{M_0} \right) \right] - I_c \sin \left( \varphi - r \frac{M_y}{M_0} \right)$$

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} = V$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{M_0}; \quad \mathbf{h}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{eff}}}{H_0}; \quad \tau = t\omega_c; \quad V = \frac{V}{I_c R}; \quad \omega_F = \frac{\Omega_F}{\omega_c}; \quad I = \frac{I}{I_c} \quad H_0 = \frac{K}{M_0}$$

## Система уравнений для описания динамики Фи-0 перехода

$$\frac{dm_x}{d\tau} = -\frac{\omega_F}{1 + (\alpha m)^2} \left\{ (m_y h_z - m_z h_y) + \alpha [m_x (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_x m^2] \right\}$$

$$\frac{dm_y}{d\tau} = -\frac{\omega_F}{1 + (\alpha m)^2} \left\{ (m_z h_x - m_x h_z) + \alpha [m_y (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_y m^2] \right\}$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = -\frac{\omega_F}{1 + (\alpha m)^2} \left\{ (m_x h_y - m_y h_x) + \alpha [m_z (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_z m^2] \right\}$$

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{\beta_c} \left[ I - \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{dm_y}{d\tau} - \sin(\varphi - r m_y) \right]$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = V$$

$$h_x = 0$$

$$h_y = rG \sin(\varphi - r m_y)$$

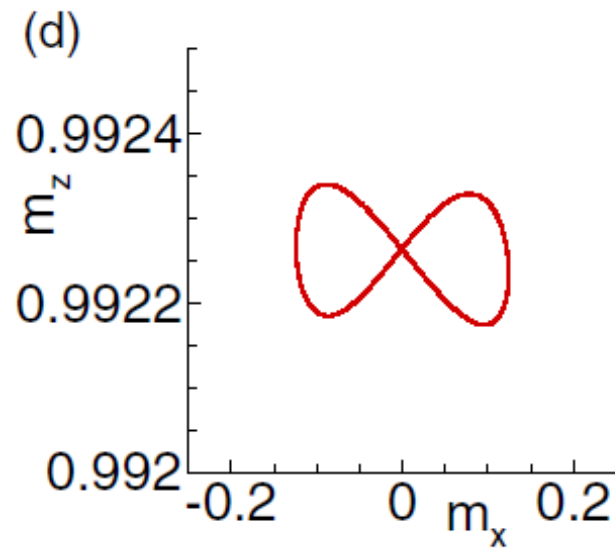
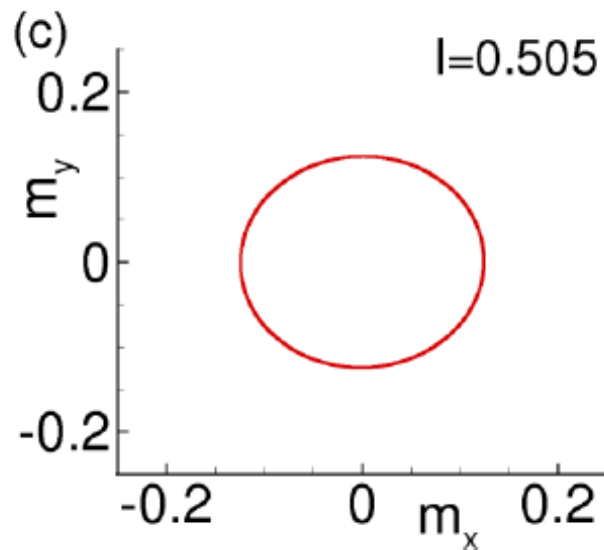
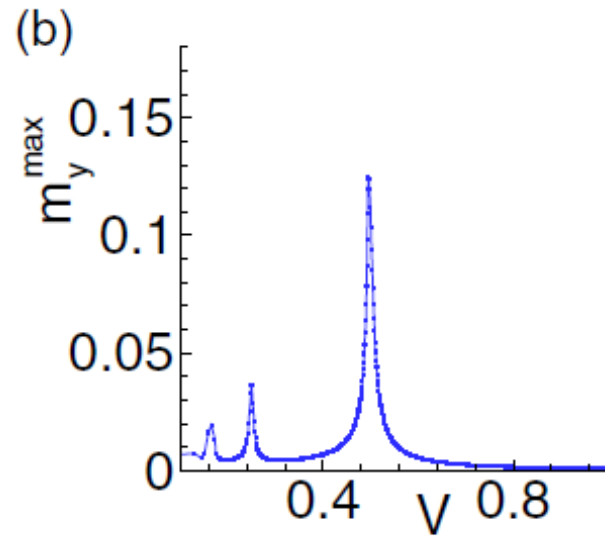
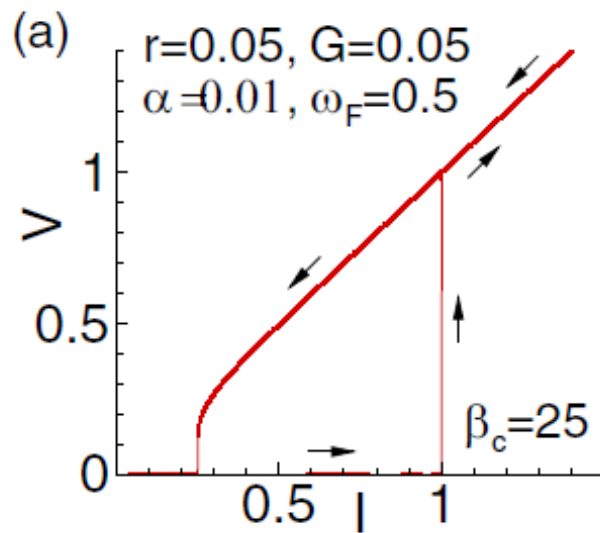
$$h_z = m_z$$

$$\beta_c = C\omega_c R$$

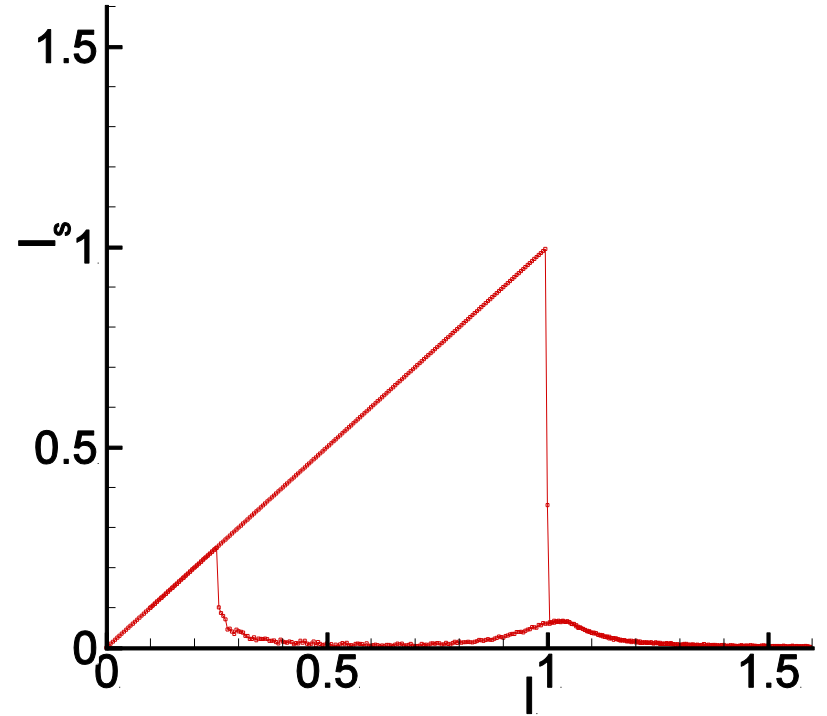
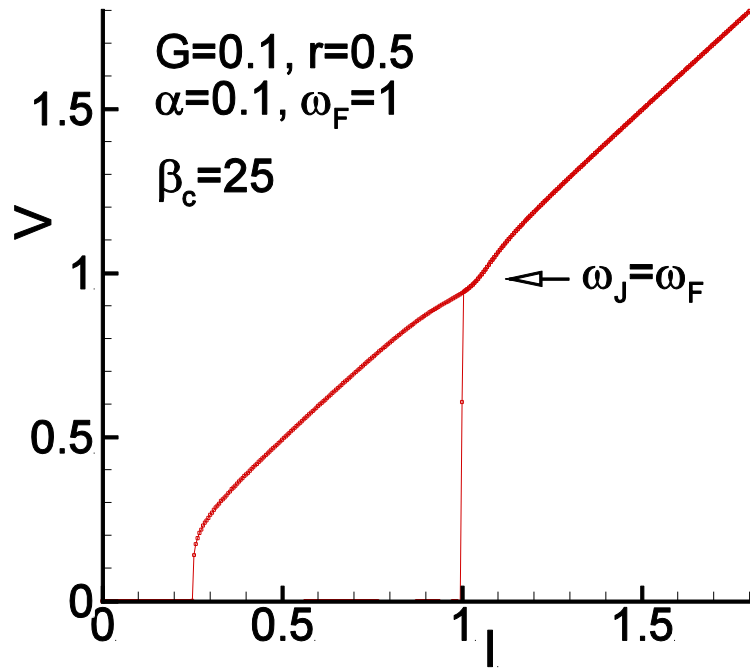


# Прецессия намагниченности и ферромагнитный резонанс

# Динамика Фи-0 перехода



# ВАХ Фи-0 перехода



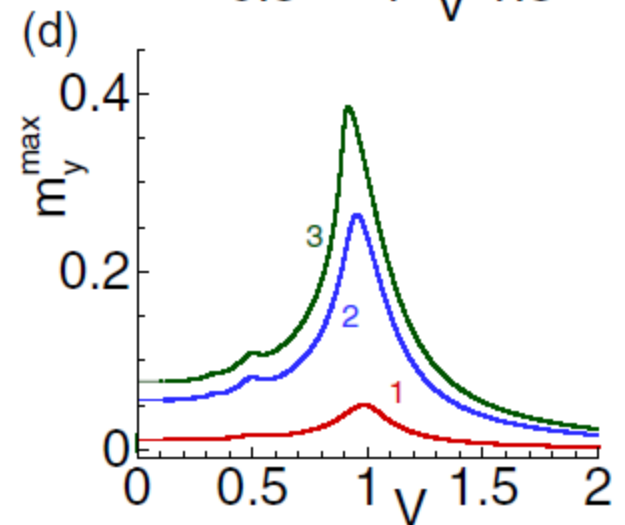
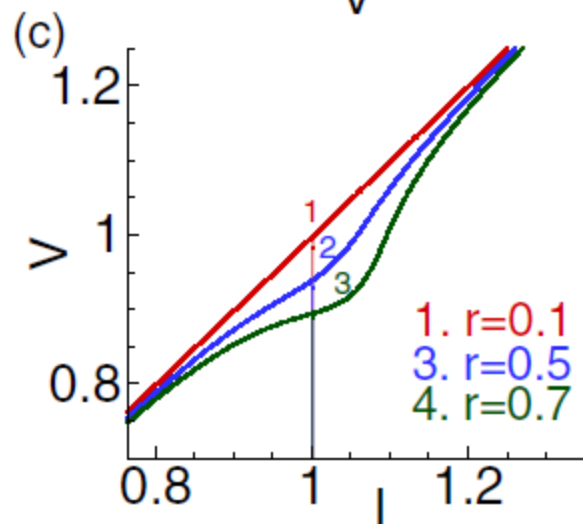
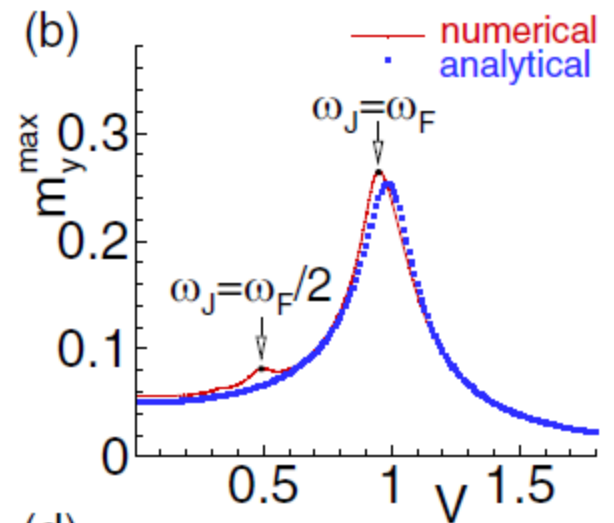
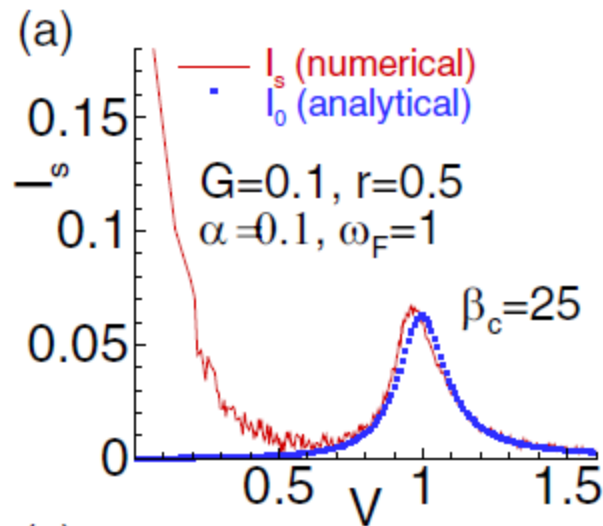
# Приближение линейного осциллятора

# Линейное приближение уравнение ЛЛГ

$$m_x, m_y, G, r, \alpha \ll 1 \quad Gr \ll 1, m_z \approx 1$$

$$\ddot{m}_y + 2\alpha\omega_F\dot{m}_y + \omega_F^2 m_y = \omega_F^2 Gr \sin \omega_J t.$$

В рамках данной приближении уравнение ЛЛГ сводится к уравнение для линейного осциллятора с затуханием



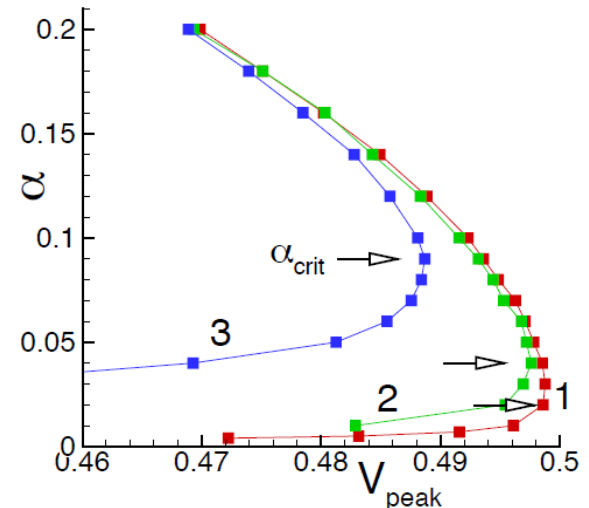
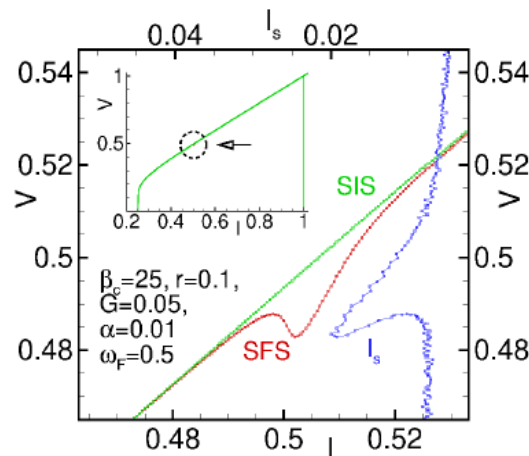
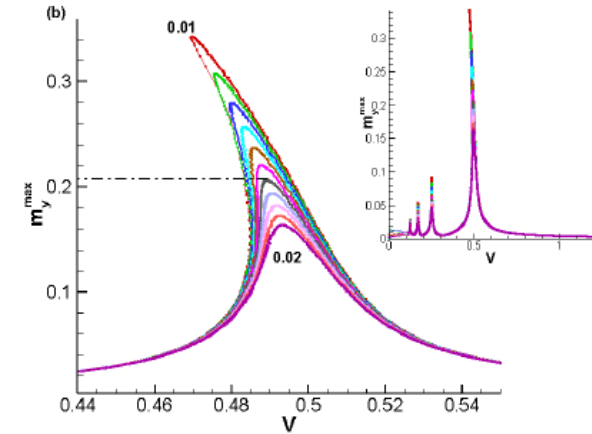
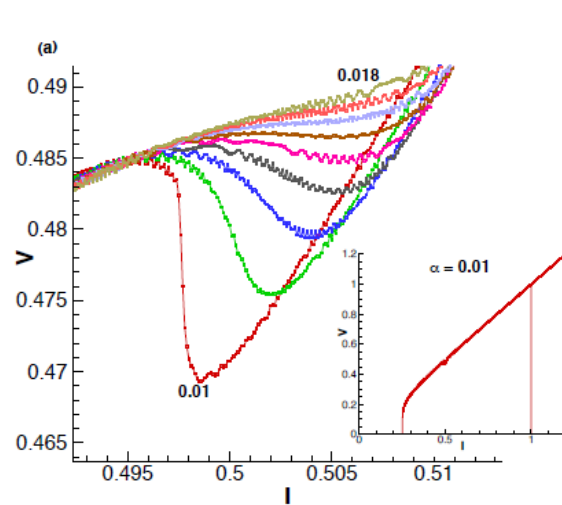
# Приближение нелинейного осциллятора. Осциллятор Даффинга

# Нелинейное приближение уравнение ЛЛГ

$$\alpha \ll G, r \ll 1$$

$$\ddot{m}_y + 2\omega_F \alpha \dot{m}_y + \omega_F^2 m_y - \omega_F^2 m_y^3 = \omega_F^2 Gr \sin \varphi.$$

В этом приближении уравнение ЛЛГ сводится к нелинейному уравнение для осциллятора Даффинга

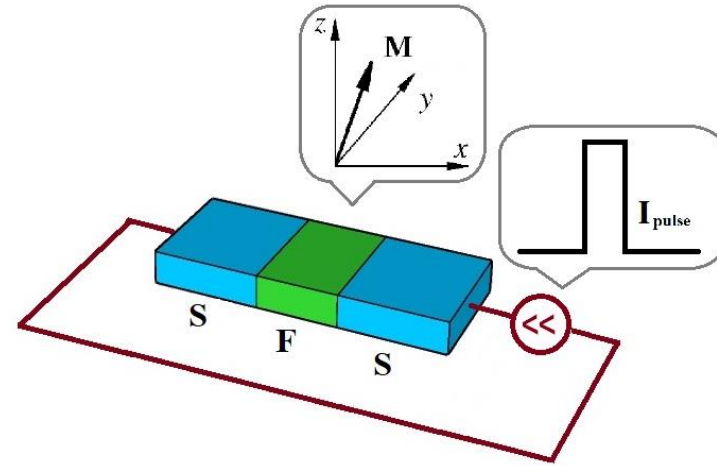
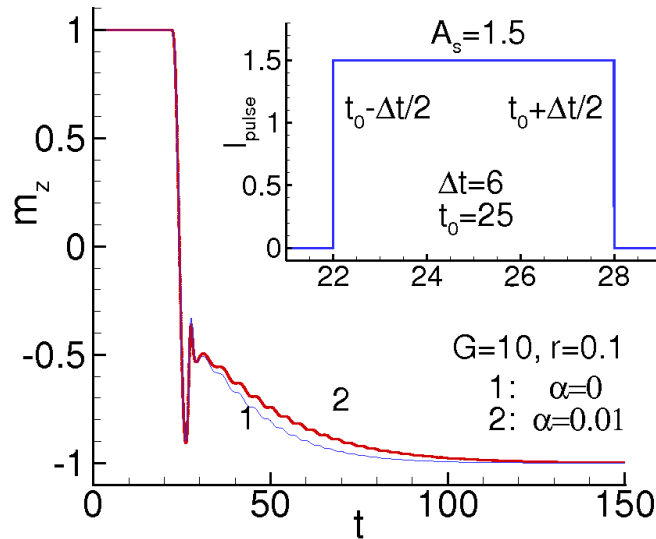


**Переворот магнитного момента в  
Фи-0 переходе под воздействием  
импульса тока**



# Переворот магнитного момента импульсом тока

(a)

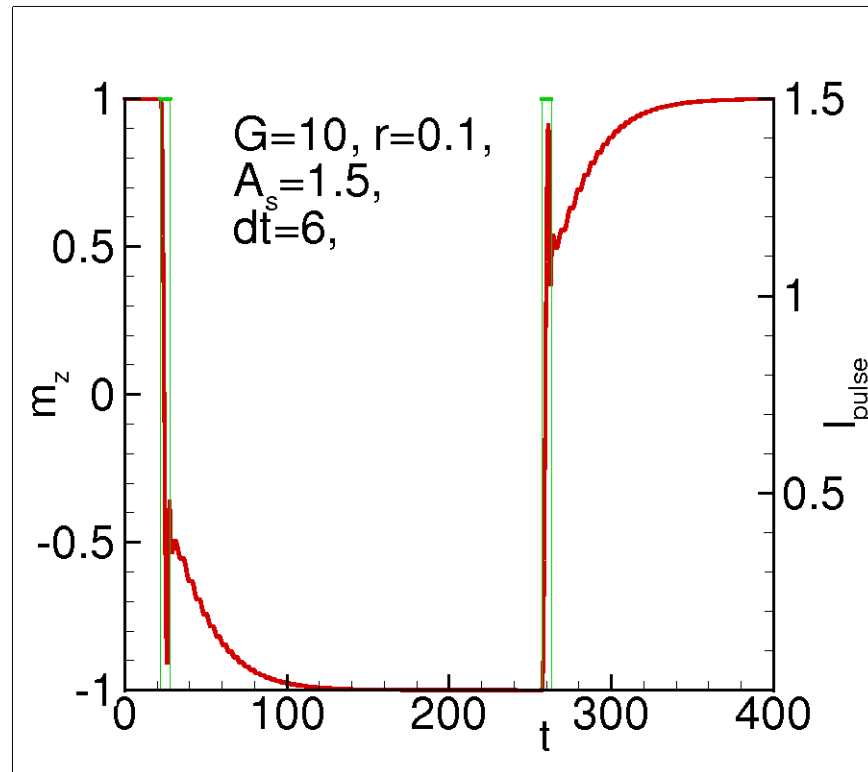
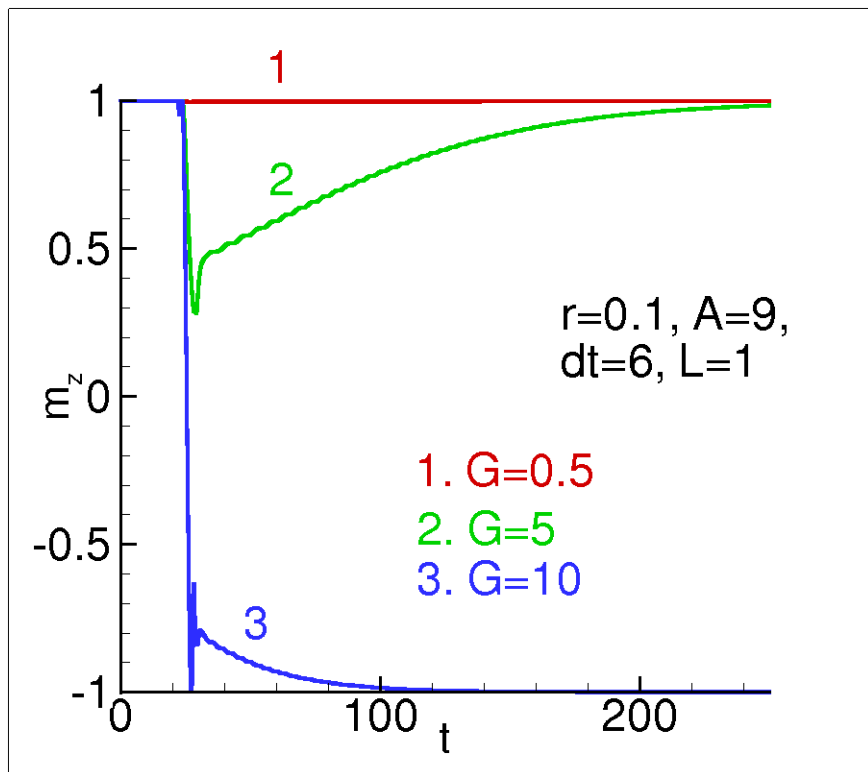


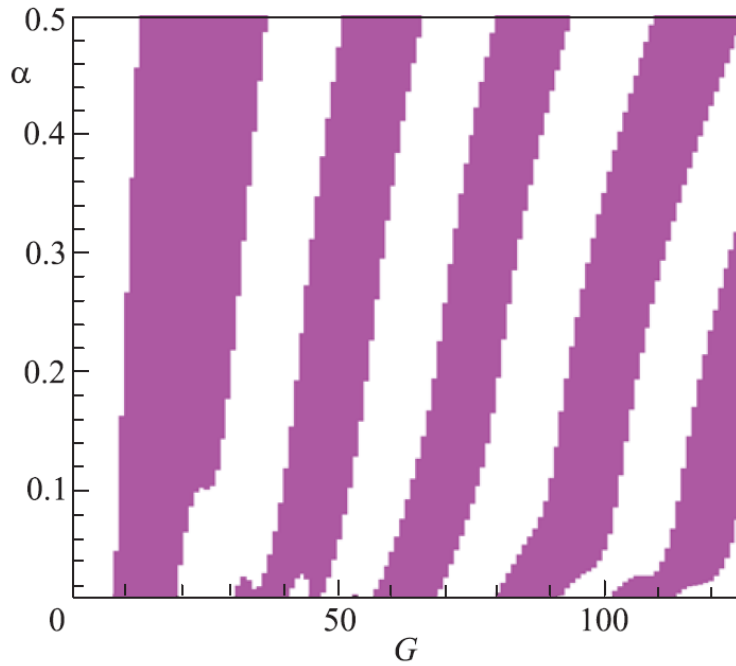
$$I_{pulse} = w \frac{d\varphi}{dt} + \sin(\varphi - r m_y)$$

$$w = \frac{V_F}{I_c R} = \frac{\omega_F}{\omega_R}$$

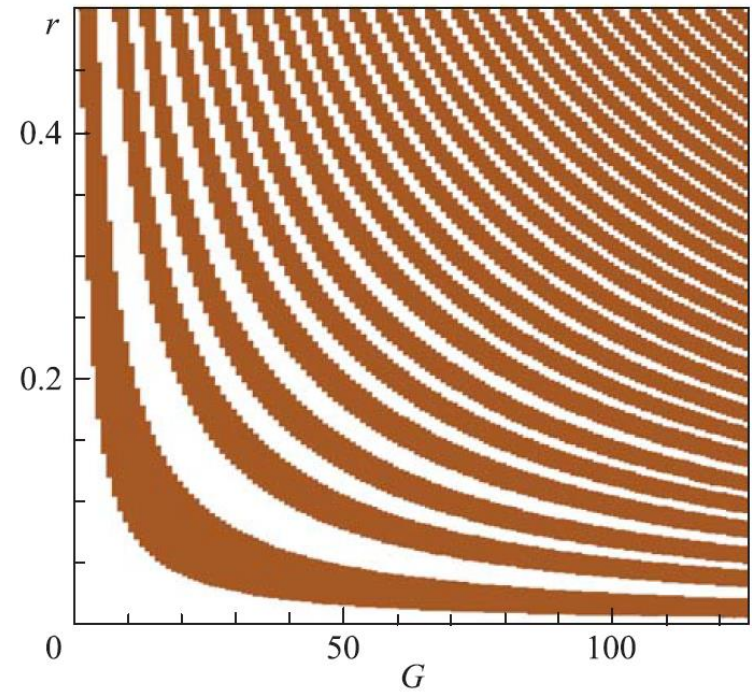
Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. Sengupta and A. Buzdin  
 Appl. Phys. Lett. 110, 182407 (2017).

# Влияние параметров на переворот магнитного момента





Demonstration of periodicity of magnetization reversal intervals in  $(G, \alpha)$ -plane.

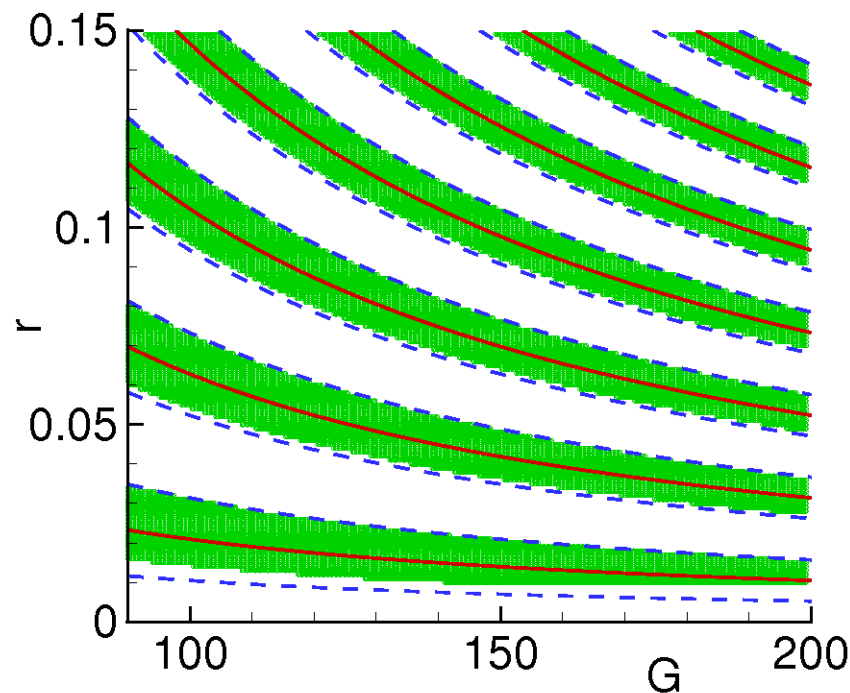


Demonstration of periodicity of magnetization reversal intervals in  $(G, r)$ -plane.

$$\begin{cases} \dot{m}_x = Grm_z \sin(\Phi) & w = \omega_F/\omega_R \ll 1 \\ \dot{m}_y = m_x m_z. & I_p(t) < 1 \\ \dot{m}_z = -Grm_x \sin(\Phi) & \end{cases}$$

$$m_z = \cos(GrI_p) \quad \cos(GrI\delta t) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq GrI_p\delta t \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$



C. Guarcello and F.S. Bergeret,  
A cryogenic memory element based on an anomalous Josephson junction,  
arXiv:1907.08454v1 [cond-mat.supr-con] 19 Jul 2019

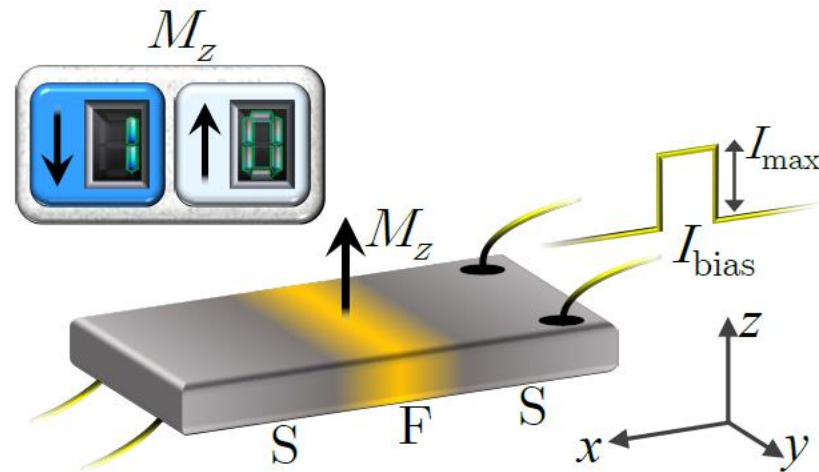


FIG. 1. S/F/S Josephson junction driven by a rectangular bias current pulses,  $I_{\text{bias}}$ , with amplitude  $I_{\text{max}}$ . The z-component of the magnetization,  $M_z$ , is the observable used to define the logic memory states 0 and 1.

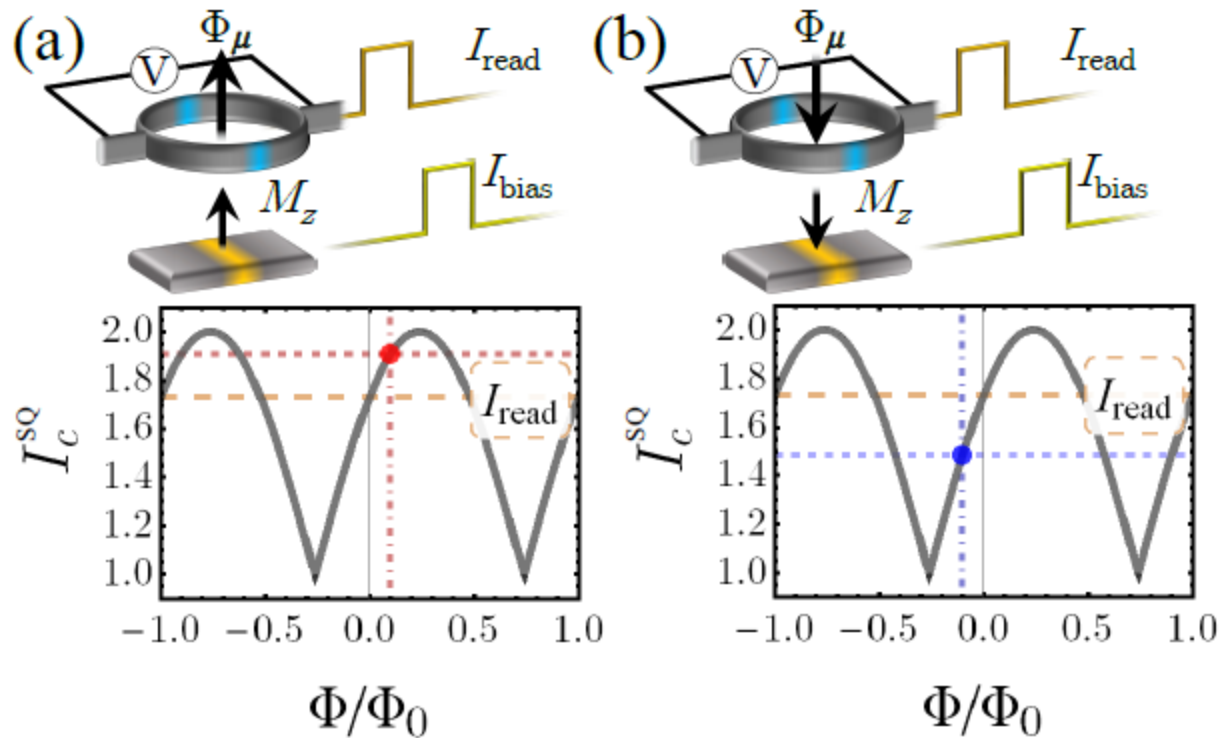
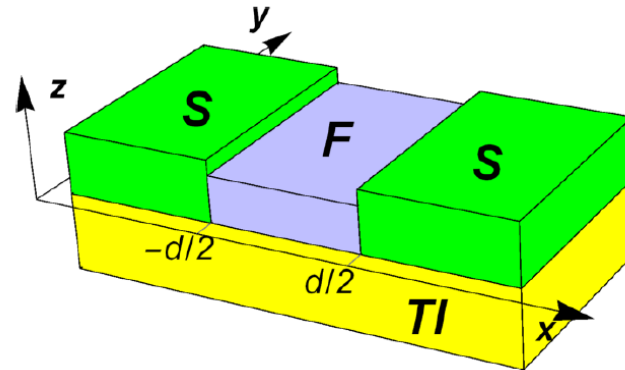


FIG. 10. SQUID-based memory readout and cartoon showing the critical current interference pattern of the SQUID, in the cases of both positive and negative orientation along the z-axis of the magnetic moment, see panel (a) and (b), respectively.

Исследование динамики  
SFS перехода на  
поверхности  
топологического изолятора

## Electrical control of magnetization in superconductor/ferromagnet/superconductor junctions on a three-dimensional topological insulator

M. Nashaat,<sup>1,2</sup> I. V. Bobkova<sup>3,4</sup>, A. M. Bobkov,<sup>3</sup> Yu. M. Shukrinov,<sup>1,5</sup> I. R. Rahmonov,<sup>1,6</sup> and K. Sengupta<sup>7</sup>



- В этой системе ток фазовое соотношение имеет фазовый сдвиг  $\Phi=0$  и критический ток зависит от компоненты намагниченности



# Ток фазовое – соотношение и динамика намагниченности

Ток фазовое соотношение

$$j_s = j_c \sin(\varphi - \varphi_0)$$

Критический ток зависит от компоненты намагниченности

$$j_c = j_b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \exp\left(-\frac{\tilde{d}}{\cos \phi}\right) \cos(rm_x \operatorname{tg} \phi) d\phi$$

Динамика намагниченности описывается уравнением Ландау-Лифшиц-Гильберта

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}$$

Эффективное поле определяется вариацией полной энергии по намагниченности

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{V_F} \frac{\delta E_t}{\delta \mathbf{M}}$$

$$E_M = -\frac{KV_F}{2} \left(\frac{M_y}{M_s}\right)^2$$

Энергия магнитной анизотропии

$$E_J = \frac{\Phi_0 j_c S}{2\pi} [1 - \cos(\varphi - rm_y)]$$

Энергия джозефсоновского перехода

## Система уравнений

$$\frac{dm_x}{dt} = -\frac{\omega_F}{1 + \alpha^2} \left( (m_y h_z - m_z h_y) + \alpha [m_x (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_x m^2] \right)$$

$$\frac{dm_y}{dt} = -\frac{\omega_F}{1 + \alpha^2} \left( (m_z h_x - m_x h_z) + \alpha [m_y (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_y m^2] \right)$$

$$\frac{dm_z}{dt} = -\frac{\omega_F}{1 + \alpha^2} \left( (m_x h_y - m_y h_x) + \alpha [m_z (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z) - h_z m^2] \right)$$

$$h_x = \frac{GrI_x}{j_{c0}} [1 - \cos(Vt - rm_y)],$$

$$h_y = \frac{GrI_y}{j_{c0}} \sin(Vt - rm_y) + m_y,$$

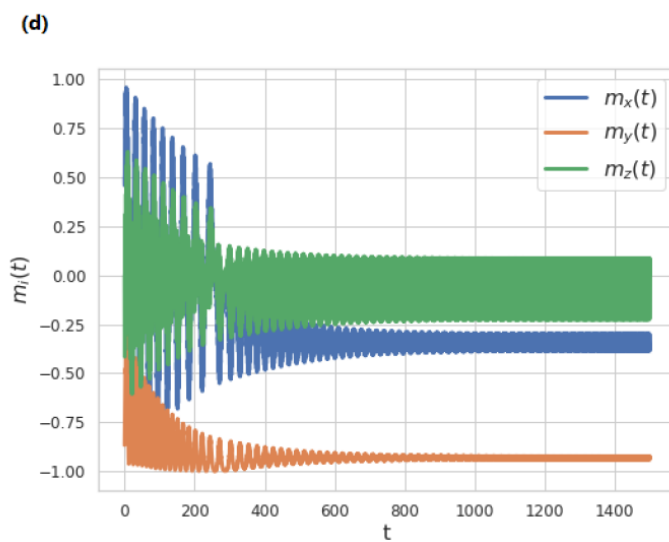
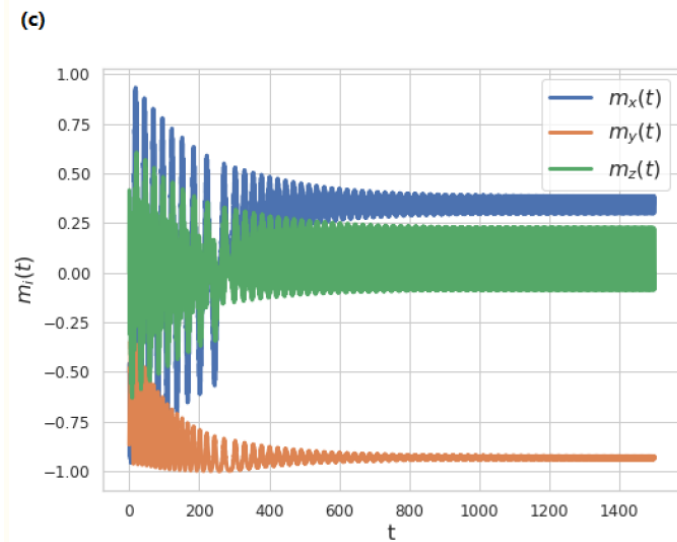
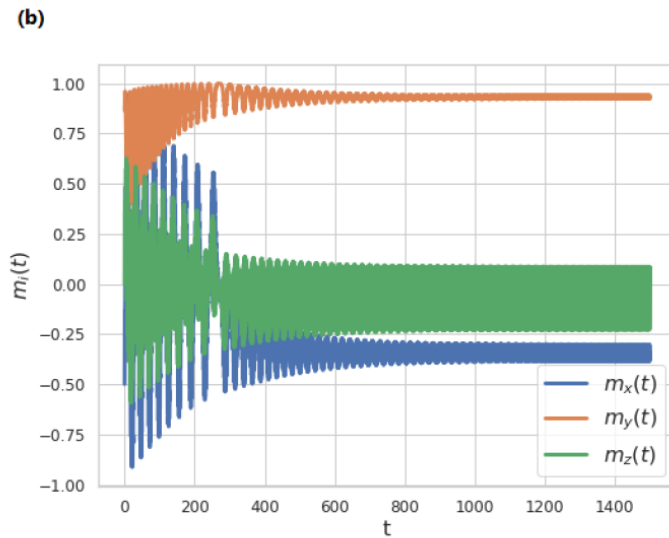
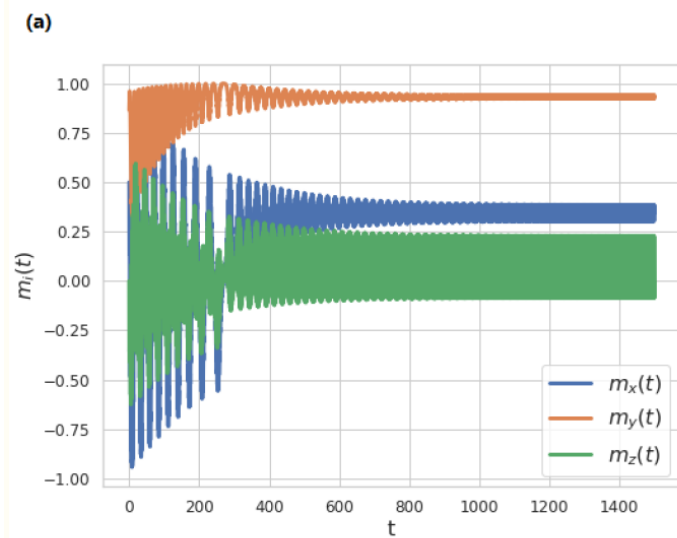
$$h_z = 0.$$

$$I_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \phi \exp\left(-\frac{\tilde{d}}{\cos \phi}\right) \sin(rm_x tg \phi) d\phi$$

$$I_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \exp\left(-\frac{\tilde{d}}{\cos \phi}\right) \cos(rm_x tg \phi) d\phi$$

$$j_{c0} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \exp\left(-\frac{\tilde{d}}{\cos \phi}\right) d\phi$$

# Вырожденные стабильные состояния



1.  $m_x > 0, m_y > 0$ ;
2.  $m_x < 0, m_y > 0$ ;
3.  $m_x > 0, m_y < 0$ ;
4.  $m_x < 0, m_y < 0$ .

**Спасибо за внимание**