Стандартная модель сильных и электрослабых взаимодействий. (1)

§1. Структура Стандартной модели.

Стандартная модель – калибровочная теория, основанная группе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, спонтанно нарушающейся до $SU(3)\times U(1)_{em}$.

Она содержит 3 поколения фермионов, причём левые и правые фермионы по разному взаимодействуют с калибровочной группой.

Правые фермионы $\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ являются $SU(2)$ синглетами, а левые фермионы $\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$ – лежат в фундаментальном представлении $SU(2)$.

Кварки лежат в фундаментальном представлении $SU(3)$, а лептоны – в тривиальном.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_Б + \mathcal{L}_{лептон} + \mathcal{L}_{кварк}$$

§ 2. Бозонный сектор Стандартной модели. 2

$\mathcal{L}_Б$ обеспечивает нарушение симметрии

$$\underset{\text{сильное взаимодействие}}{SU(3)} \times \underbrace{SU(2) \times U(1)_Y}_{\text{эл./слабое взаимодействие}} \longrightarrow \underset{\text{эл/м взаимодействие}}{SU(3) \times U(1)_{em}}$$

за счёт механизма, при котором скалярное поле Φ приобретает нетривиальное вакуумное среднее:

$$\mathcal{L}_Б = -\frac{1}{4}\underset{U(1)}{F^2_{\mu\nu}} - \frac{1}{4}\Big(\underset{\substack{SU(2)\\ A=\overline{1,3}}}{F^A_{\mu\nu}}\Big)^2 - \frac{1}{4}\Big(\underset{\substack{SU(3)\\ A=\overline{1,8}}}{F^A_{\mu\nu}}\Big)^2 + \partial_\mu\Phi^+\partial^\mu\Phi$$

$$-\lambda\left(\Phi^+\Phi - v^2\right)^2$$

где $\underset{U(1)}{F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \underset{U(1)}{A_\nu} - \partial_\nu \underset{U(1)}{A_\mu}$

$$\underset{SU(2)}{F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \underset{SU(2)}{A_\nu} - \partial_\nu \underset{SU(2)}{A_\mu} + \underset{SU(2)}{[A_\mu, A_\nu]} = ie_2 \underset{SU(2)}{F^A_{\mu\nu}}\, \sigma^A/2$$

$$\underset{SU(3)}{F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \underset{SU(3)}{A_\nu} - \partial_\nu \underset{SU(3)}{A_\mu} + \underset{SU(3)}{[A_\mu, A_\nu]} = ie_3 \underset{SU(3)}{F^A_{\mu\nu}}\, \lambda^A/2$$

При этом за счёт трёх сомножителей в калибровочной группе имеются 3 константы связи e_3, e_2, e_1.

Если при $U(1)$ преобразованиях

$$\begin{cases} \varphi \to e^{i\alpha_1 e_1 Y}\varphi \\ \underset{U(1)}{A_\mu} \to \underset{U(1)}{A_\mu} - \partial_\mu \alpha_1 \end{cases}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ – параметр преобразований, то

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i e_1 Y \underset{U(1)}{A_\mu} \varphi \longrightarrow e^{i\alpha_1 e_1 Y} \mathcal{D}_\mu \varphi$$

где величина Y называется гиперзарядом и является квантовым числом по группе $U(1)$.

Скалярное поле Φ лежит в тривиальном представлении $SU(3)$, фунд. $SU(2)$ и имеет $Y = 1/2$ (выбор). тогда

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \underset{SU(2)}{A_\mu}\Phi + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\Phi =$$

$$= \partial_\mu \Phi + \frac{ie_2}{2} \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \Phi + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \Phi$$

Вакуумное состояние стандартно выбирается в виде $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

При $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ преобразованиях

$$\Phi \to \omega_2 e^{ie_1\alpha_1/2}\Phi = \exp\left(\frac{ie_2}{2}\alpha_2^A \sigma^A\right) e^{ie_1\alpha_1/2}\Phi$$

$$\simeq \phi + \left(\frac{ie_2}{2}\alpha_2^A \sigma^A + \frac{ie_1\alpha_1}{2} \right)\phi$$

Т. г.

$$\delta\phi = \left(\frac{ie_2}{2}\alpha_2^A \sigma^A + \frac{ie_1\alpha_1}{2} \right)\phi =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Вакуумное состояние будет инвариантно, если

$$0 = \delta\phi_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{iv}{2}\begin{pmatrix} e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_2^1 = 0; \ \alpha_2^2 = 0 \\ e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 = 0 \end{matrix}$$

Тогда

$$\exp\left(\frac{ie_2}{2}\alpha_2^A \sigma^A + \frac{ie_1\alpha_1}{2} \right) \longrightarrow \exp\left(\frac{ie_2}{2}\alpha_2^3 \sigma^3 + \frac{ie_1\alpha_1}{2} \right)$$

$$= \exp\left\{ ie_1\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv \exp\left\{ ie\alpha_{em} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in U(1)_{em}$$

– остаточная калибровочная симметрия.

Спектр частиц удобно исследовать в унитарной калибровке, когда все нефизические степени свободы устраняются выбором параметров калибровочного преобразования:

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

$$\delta\phi \simeq \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{iv}{2} \begin{pmatrix} e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\varphi_1 + i\delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 + i\delta\varphi_4 \end{pmatrix}$$

– видно, что выбором $\alpha_2^1, \alpha_2^2, e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1$ можно добиться, чтобы

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \varphi \end{pmatrix}$$ где $\varphi \in \mathrm{Re}$ – унитарная калибровка.

При этом очевидно, что φ – электрически нейтрально, т.к. не меняется при преобразованиях $U(1)_{em}$.

В унитарной калибровке

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \frac{ie_2}{2} \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \phi + \frac{ie_1}{2} \underset{U(1)}{A_\mu} \phi \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} + \frac{ie_2}{2} \begin{pmatrix} \underset{SU(2)}{A_\mu^3} & \underset{SU(2)}{A_\mu^1 - iA_\mu^2} \\ \underset{SU(2)}{A_\mu^1 + iA_\mu^2} & \underset{SU(2)}{-A_\mu^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{ie_1}{2} \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e_2 v \underset{SU(2)}{(A_\mu^2 + iA_\mu^1)} \\ \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2}\left(-e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^3} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\right) v \end{pmatrix}$$

Поэтому в унитарной калибровке в квадратичном приближении ⑥

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\underset{u(1)}{F_{\mu\nu}^2} - \frac{1}{4}\underset{su(2)}{\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right)^2} - \frac{1}{4}\underset{su(3)}{\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right)^2}$$

$$+(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{e_2^2 v^2}{2}\left((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2\right) + \frac{1}{4}v^2\left(-e_2 A_\mu^3 + e_1 A_\mu\right)^2$$

$$-4\lambda v^2\varphi^2$$

где было учтено, что

$$\lambda(\phi^+\phi - v^2)^2 = \lambda\left((\varphi+v)^2 - v^2\right)^2 \simeq \lambda(2\varphi v)^2 = 4v^2\lambda\varphi^2$$

Определим поля $W_\mu^{1,2} \equiv \underset{su(2)}{A_\mu^{1,2}}$ $\qquad m_W^2 = \frac{e_2^2 v^2}{2}$

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\left(e_2 \underset{su(2)}{A_\mu^3} - e_1 \underset{u(1)}{A_\mu}\right) \qquad m_Z^2 = \frac{(e_1^2+e_2^2)v^2}{2}$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\left(e_2 \underset{u(1)}{A_\mu} + e_1 \underset{su(2)}{A_\mu^3}\right) \qquad m_A^2 = 0$$

$$(m_\varphi = 2\sqrt{\lambda}\, v)$$

Удобно ввести обозначение $e \equiv e_1\cos\theta_W \equiv e_2\sin\theta_W$

т.е. $(e_1, e_2) \longrightarrow (e, \sin\theta_W)$ $\qquad$ угол Вайнберга

Тогда $$\frac{e_2}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}} = \frac{e/\sin\theta_W}{\sqrt{e^2/\cos^2\theta_W + e^2/\sin^2\theta_W}} = \cos\theta_W$$

$$\frac{e_1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}} = \frac{e/\cos\theta_W}{\sqrt{e^2/\cos^2\theta_W + e^2/\sin^2\theta_W}} = \sin\theta_W$$

и =>

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos\theta_W \underset{su(2)}{A_\mu^3} - \sin\theta_W \underset{u(1)}{A_\mu} & \text{— Z-бозон} \\ A_\mu = \sin\theta_W \underset{su(2)}{A_\mu^3} + \cos\theta_W \underset{u(1)}{A_\mu} & \text{— фотон.} \end{cases}$$

При этом обратное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} \underset{su(2)}{A_\mu^3} = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \\ \underset{u(1)}{A_\mu} = -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \end{cases}$$

Заметим, что при $u(1)_{em}$ преобразованиях ($\alpha_2^1=0$; $\alpha_2^2=0$; $e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 = 0$; $e_1\alpha_1 = e\alpha_{em}$)

D/3

$$\underset{u(1)}{A_\mu} \longrightarrow \underset{u(1)}{A_\mu} - \partial_\mu\alpha_1 = \underset{u(1)}{A_\mu} - \frac{e}{e_1}\partial_\mu\alpha_{em} = \underset{u(1)}{A_\mu} - \cos\theta_W \partial_\mu \alpha_{em}$$

$$\underset{su(2)}{A_\mu} \longrightarrow \omega_2 \underset{su(2)}{A_\mu} \omega_2^{-1} + \omega_2 \partial_\mu \omega_2^{-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exp\left\{ie_2\alpha_2^3 \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}\left\{\frac{ie_2}{2}\begin{pmatrix}\underset{su(2)}{A_\mu^3} & \underset{su(2)}{A_\mu^1 - iA_\mu^2} \\ \underset{su(2)}{A_\mu^1 + iA_\mu^2} & -\underset{su(2)}{A_\mu^3}\end{pmatrix}\right.$$

$$+\partial_\mu\Big\}\exp\left\{-ie_2\alpha_2^3\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\} =$$

8

$$= \frac{ie_2}{2}\begin{pmatrix} \underset{su(2)}{A^3_\mu} & e^{ie_2\alpha_2^3}(A^1_\mu - i\underset{su(2)}{A^2_\mu}) \\ e^{-ie_2\alpha_2^3}(\underset{su(2)}{A^1_\mu + iA^2_\mu}) & -\underset{su(2)}{A^3_\mu}\end{pmatrix} - \frac{ie_2}{2}\partial_\mu\alpha_2^3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

т.ч.

$$\underset{su(2)}{A^3_\mu} \longrightarrow \underset{su(2)}{A^3_\mu} - \frac{e_1}{e_2}\partial_\mu\alpha_1 = \underset{su(2)}{A^3_\mu} - \frac{e}{e_2}\partial_\mu\alpha_{em}$$

$$= \underset{su(2)}{A^3_\mu} - \sin\theta_W\,\partial_\mu\alpha_{em}$$

и $\Rightarrow$

Д/3

$$\begin{cases} W^+_\mu \equiv (A^1_\mu - iA^2_\mu) \longrightarrow e^{ie\alpha_{em}}W^+_\mu \\ W^-_\mu \equiv (A^1_\mu + iA^2_\mu) \longrightarrow e^{-ie\alpha_{em}}W^-_\mu \\ Z_\mu \longrightarrow Z_\mu - \cancel{\cos\theta_W\sin\theta_W\,\partial_\mu\alpha_{em}} + \cancel{\cos\theta_W\sin\theta_W\,\partial_\mu\alpha_{em}} = Z_\mu \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu - (\sin^2\theta_W + \cos^2\theta_W)\,\partial_\mu\alpha_{em} = A_\mu - \partial_\mu\alpha_{em}. \end{cases}$$

Численные величины:

$m_Z = 91,1876(21)$ ГэВ $\qquad \alpha_3(M_Z) = 0,1180(9)$

$m_W = 80,377(12)$ ГэВ $\qquad \alpha^{-1}_{em}(M_Z) = 127,951 \pm 0,009$

$m_\varphi = 125,25 \pm 0,17$ ГэВ $\qquad \sin^2\theta_W(M_Z) = 0,23121(4)$

На основе этих величин можно найти

$$\alpha_3(M_Z) \equiv \frac{e_3^2}{4\pi} \simeq (8{,}4675)^{-1}$$

$$\alpha_1(M_Z) \equiv \frac{5}{3}\cdot\frac{e_1^2}{4\pi} = \frac{5}{3}\cdot\frac{\alpha_{em}(M_Z)}{\cos^2\theta_W} \simeq (59{,}02)^{-1}$$

$$\alpha_2(M_Z) \equiv \frac{e_2^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}(M_Z)}{\sin^2\theta_W} \simeq (29{,}58)^{-1}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}\, m_W}{e_2} = \frac{\sqrt{2}\, m_W}{\sqrt{4\pi\alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^{-1}}{2\pi}}\, m_W \simeq 174{,}4 \text{ ГэВ}$$

$$\lambda = \frac{m_\varphi^2}{4v^2} \simeq 0{,}1289 \simeq (7{,}756)^{-1}$$

---

§3. Фермионный сектор Стандартной модели

	I	II	III	SU(3)	SU(2)	U(1) (Y)	U(1)em (q)
кварки	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	фунд.	фунд.	$+1/6$	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
	u_R	c_R	t_R	фунд.	трив.	$+2/3$	$+2/3$
	d_R	s_R	b_R	фунд.	трив.	$-1/3$	$-1/3$
лептоны	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	трив.	фунд.	$-1/2$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	трив.	трив.	0	0
	e_R	μ_R	τ_R	трив.	трив.	-1	-1

§4. Лагранжиан лептонного сектора СМ.

$$\mathcal{L}_{\text{лепт.}} = i\,\overline{(\nu,e)}_L^{\,I}\,\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I + i\,\bar{e}_R^{\,I}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R^I$$

$$-(Y_e)_{IJ}\,\underset{+1/2}{\overline{(\nu,e)}_L^{\,I}}\,\underset{+1/2}{\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}}\,\underset{-1=0}{e_R^J} - (Y_e^+)_{IJ}\,\underset{1}{\bar{e}_R^{\,I}}\,\underset{-1/2}{(\phi_1^*\,\phi_2^*)}\,\underset{-1/2=0}{\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I}$$

+ слагаемые, содержащие правое нейтрино.

При этом калибровочная инвариантность очевидна, а ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D}_\mu\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L = \partial_\mu\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L + \frac{i}{2}e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A}\sigma^A\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L - \frac{i}{2}e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu e_R = \partial_\mu e_R - i e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} e_R$$

– однозначно определяются квантовыми числами. При этом имеет место важное утверждение:

<u>Теорема</u> Если Y – невырожденная матрица, то преобразованием $Y \to A^{-1}YB$, где $A^+A = 1$ и $B^+B = 1$ её можно сделать

1) диагональной $\qquad A^{-1}YB = D$
2) вещественной
3) положительно определённой

Если $\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I \to (A_e)_{IJ}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J$; $e_R^I \to (B_e)_{IJ}(e_R)^J$ (11)

то эффективно $\quad Y_e \to A_e^+ Y_e B_e = A_e^{-1} Y_e B_e$

Благодаря этому без ограничения общности Y_e можно считать диагональной, Re и положительно определенной.

В низкоэнергетическом пределе все массивные поля исчезают: $\varphi \to 0$; $Z_\mu \to 0$; $W_\mu^{1,2} \to 0$

т.ч.

$$\underset{SU(2)}{e_2 A_\mu^3} = e_2(\cancelto{0}{\cos\theta_W Z_\mu} + \sin\theta_W A_\mu) \to e_2\sin\theta_W A_\mu = eA_\mu$$

$$\underset{U(1)}{e_1 A_\mu} = e_1(\cancelto{0}{-\sin\theta_W Z_\mu} + \cos\theta_W A_\mu) \to e_1\cos\theta_W A_\mu = eA_\mu$$

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ v+\varphi\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}.$$

Поэтому при низких энергиях

$$\mathcal{L}_{лепт.} \Longrightarrow i\overline{(\nu, e)}_L^I \gamma^\mu\left[\partial_\mu\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2}eA_\mu\sigma_3\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{2}eA_\mu\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I\right] + i\bar{e}_R^I\gamma^\mu\left[\partial_\mu e_R^I - ieA_\mu e_R^I\right] -$$

$$-(Y_e)_{IJ}\overline{(\nu, e)}_L^I\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}e_R^J - (Y_e^+)_{IJ}\bar{e}_R^I(0, v)\begin{pmatrix}0\\ e\end{pmatrix}_L^J$$

$$= i\overline{(\nu, e)}^I_L \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix}\nu \\ e\end{pmatrix}^I_L - ieA_\mu \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu \\ e\end{pmatrix}^I_L\right] +$$

$$+ i\bar{e}^I_R \gamma^\mu \left[\partial_\mu e^I_R - ieA_\mu e^I_R\right] - (Y_e)_{IJ}\, v\, \bar{e}^I_L e^J_R - (Y_e^+)_{IJ}\, v\, \bar{e}^I_R e^J_L$$

Определим матрицу

$$(m_e)_{IJ} = v(Y_e)_{IJ} = v\begin{pmatrix}(Y_e)_{11} & & 0\\ & (Y_e)_{22} & \\ 0 & & (Y_e)_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_e & & 0\\ & m_\mu & \\ 0 & & m_\tau\end{pmatrix}$$

тогда в низкоэнергетическом пределе

$$\mathcal{L}_{лепт} \Longrightarrow i\bar{\nu}^I_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu^I_L + i\bar{e}^I_L \gamma^\mu \underset{em}{D_\mu} e^I_L + i\bar{e}^I_R \gamma^\mu \underset{em}{D_\mu} e^I_R$$

$$- (m_e)_{IJ}\left(\bar{e}^I_L e^J_R + \bar{e}^I_R e^J_L\right), \quad \text{где} \quad \underset{em}{D_\mu}\psi = \partial_\mu \psi - ieA_\mu \psi$$

При этом

$$\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L = \overline{(\psi_R)}\psi_R + \overline{(\psi_L)}\psi_L = \bar{\psi}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi +$$

$$+ \bar{\psi}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = \bar{\psi}\psi$$

$$i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \underset{em}{D_\mu}\psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \underset{em}{D_\mu}\psi_R = i\bar{\psi}\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\underset{em}{D_\mu}\psi +$$

$$+ i\bar{\psi}\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\underset{em}{D_\mu}\psi_R = i\bar{\psi}\gamma^\mu \underset{em}{D_\mu}\psi$$

и в низкоэнергетическом пределе получается дираковский лагранжиан, $q(e_L) = q(e_R) = -e$; $q(\nu_L) = 0$

Численно

$m_e \simeq 0{,}51$ МэВ $\qquad (Y_e)_{11} \simeq 2{,}93 \cdot 10^{-6}$

$m_\mu \simeq 105{,}66$ МэВ $\qquad (Y_e)_{22} \simeq 6{,}06 \cdot 10^{-4}$

$m_\tau \simeq 1777$ МэВ $\qquad (Y_e)_{33} \simeq 1{,}02 \cdot 10^{-2}$

– видно, что юкавские константы имеют иерархическую структуру.

При этом у лагранжиана лептонного сектора имеется дополнительная глобальная инвариантность $U(1) \times U(1) \times U(1)$

$$\phi \to \phi\,; \quad \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^I \to e^{i\beta_I} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^I\,; \quad e_R^I \to e^{i\beta_I} e_R^I$$

где $\beta_I \neq \beta_I(x)$ – приводящая к сохранению 3-х лептонных чисел. (Мы рассматриваем простейший вариант СМ, в котором нет правого нейтрино).

§5. Лагранжиан кваркового сектора СМ.

$$\mathcal{L}_{кварк} = i\overline{(u,d)}_L^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i\bar{u}_R^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R^I + i\bar{d}_R^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R^I$$

$$-(Y_d)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J - (Y_d^+)_{IJ} \bar{d}_R^I (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J$$

$-1/6 \; + 1/2 - 1/3 = 0 \qquad 1/3 - 1/2 + 1/6 = 0$

$$-(Y_u)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J - (Y_u^+)_{IJ} \bar{u}_R^I (\phi_2, -\phi_1) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J$$

$-1/6 - 1/2 + 2/3 = 0 \qquad -2/3 + 1/2 + 1/6 = 0$

При этом ковариантные производные однозначно определяются квантовыми числами:

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{SU(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{SU(2)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{ie_1}{6} \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu u_R = \partial_\mu u_R + \underset{SU(3)}{A_\mu} u_R + \frac{2ie_1}{3} \underset{U(1)}{A_\mu} u_R$$

$$\mathcal{D}_\mu d_R = \partial_\mu d_R + \underset{SU(3)}{A_\mu} d_R - \frac{ie_1}{3} \underset{U(1)}{A_\mu} d_R$$

Кварковый лагранжиан также является инвариантным относительно $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочных преобразований, если учесть, что $\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}$ преобразуется также как ϕ:

$$\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = i\sigma_2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \longrightarrow i\sigma_2 \omega_2^* \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_2 \omega_2^* \sigma_2 \cdot i\sigma_2 \phi^* = \sigma_2 (a_4 \cdot 1_2 + i\vec{\sigma}\vec{a})^* \sigma_2 \cdot \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_2 \left[a_4 \cdot 1_2 - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3 \right] \sigma_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} =$$

$$= \left[a_4 \cdot 1_2 + i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 + i\sigma_3 a_3 \right] \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}.$$

При преобразованиях

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \to A_{IJ} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J ; \quad u_R^I \to (B_u)_{IJ}\, u_R^J$$

$$d_R^I \to (B_d)_{IJ}\, u_R^J$$

где $A^+A = 1$, $B_u^+ B_u = 1$; $B_d^+ B_d = 1$ эффективно

$$Y_u \to A^{-1} Y_u B_u \ ; \qquad Y_d \to A^{-1} Y_d B_d$$

Но для диагонализации нужны 4 матрицы;

$$A_u^{-1} Y_u B_u = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} m_u & & 0 \\ & m_c & \\ 0 & & m_t \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v} (m_u)_{IJ}$$

$$A_d^{-1} Y_d B_d = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} m_d & & 0 \\ & m_s & \\ 0 & & m_b \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v} (m_d)_{IJ}$$

Далее будем выбирать $A = A_u$, т.ч. Y_u была бы диагональной, Re, > 0. Но тогда

$$A_u^{-1} Y_d B_d = (A_u^{-1} A_d)(A_d^{-1} Y_d B_d) \ \text{– уже не диагональна}$$

Определим $V \equiv A_u^{-1} A_d$ – т.н. матрица Кабиббо-Кобаяши-Маскава,

которая по построению является унитарной.

Тогда $\left(v A_u^{-1} Y_d B_d\right)_{IJ} = V (m_d)_{IJ}$.

(16)

В низкоэнергетическом пределе

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \longrightarrow \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{su(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{ie}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{ie}{6} A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{su(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + ieA_\mu \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu u_R \longrightarrow \partial_\mu u_R + \underset{su(3)}{A_\mu} u_R + \frac{2i}{3} e A_\mu u_R \equiv \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u_R$$

$$\mathcal{D}_\mu d_R \longrightarrow \partial_\mu d_R + \underset{su(3)}{A_\mu} d_R - \frac{ie}{3} A_\mu d_R \equiv \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u_R$$

– видно, что у левых и правых кварков электрические заряды совпадают.

$$\mathcal{L}_{\text{кварк}} \longrightarrow i\bar{u}_L^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u_L^I + i\bar{u}_R^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u_R^I +$$

$$+ i\bar{d}_L^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} d_L^I + i\bar{d}_R^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} d_R^I - (Y_d)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} d_R^J - (Y_d^+)_{IJ} \bar{d}_R^I (0, v) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J - (Y_u)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} u_R^J$$

$$- (Y_u^+)_{IJ} \bar{u}_R^I (v, 0) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J =$$

$$= i\bar{u}^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u^I + i\bar{d}^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} d^I - (m_u)_{IJ} \bar{u}^I u^J$$

$$- (Vm_d)_{IJ} \bar{d}_L^I d_R^J - (m_d V^+)_{IJ} \bar{d}_R^I d_L^I$$

При этом имеем

$m_u \simeq 2{,}16$ МэВ $\qquad (Y_u)_{11} = \frac{1}{v} m_u = 1{,}24 \cdot 10^{-5}$

$m_c \simeq 1{,}27$ ГэВ $\qquad (Y_u)_{22} = \frac{1}{v} m_c = 7{,}28 \cdot 10^{-3}$

$m_t \simeq 172{,}69$ ГэВ $\qquad (Y_u)_{33} = \frac{1}{v} m_t = 0{,}990$

$m_d \simeq 4{,}67$ МэВ $\qquad \frac{1}{v} m_d = 2{,}68 \cdot 10^{-5}$

$m_s \simeq 93{,}4$ МэВ $\qquad \frac{1}{v} m_s = 5{,}34 \cdot 10^{-4}$

$m_b \simeq 4{,}18$ ГэВ $\qquad \frac{1}{v} m_b = 2{,}40 \cdot 10^{-2}$

Матрицу смешивания можно записать в виде

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$s_{12} \approx 0{,}225$; $s_{13} \simeq 0{,}00369$; $s_{23} \simeq 0{,}04182$; $\delta \simeq 1{,}144$

– видно, что юкавские константы имеют иерархическую структуру, а V близка к единичной матрице.

Также $\mathcal{L}_{кварк}$ инвариантен относительно глобальных $U(1)$ преобразований $\phi \to \phi$;

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \longrightarrow e^{i\beta/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I; \quad u_R^I \to e^{i\beta/3} u_R^I; \quad d_R^I \to e^{i\beta/3} d_R^I$$

где $\beta \neq \beta(x)$, которые ответственны за сохранение барионного числа.

При этом шелеино

$m_u \simeq 2{,}16$ МэВ $\qquad (Y_u)_{11} = \frac{1}{v} m_u = 1{,}24 \cdot 10^{-5}$

$m_c \simeq 1{,}27$ ГэВ $\qquad (Y_u)_{22} = \frac{1}{v} m_c = 7{,}28 \cdot 10^{-3}$

$m_t \simeq 172{,}69$ ГэВ $\qquad (Y_u)_{33} = \frac{1}{v} m_t = 0{,}990$

$m_d \simeq 4{,}67$ МэВ $\qquad \frac{1}{v} m_d = 2{,}68 \cdot 10^{-5}$

$m_s \simeq 93{,}4$ МэВ $\qquad \frac{1}{v} m_s = 5{,}34 \cdot 10^{-4}$

$m_b \simeq 4{,}18$ ГэВ $\qquad \frac{1}{v} m_b = 2{,}40 \cdot 10^{-2}$

Матрицу смешивания можно записать в виде

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$s_{12} \approx 0{,}225$; $s_{13} \simeq 0{,}00369$; $s_{23} \simeq 0{,}04182$; $\delta \simeq 1{,}144$

– видно, что юкавские константы имеют иерархическую структуру, а V близка к единичной матрице.

Также $\mathcal{L}_{кварк}$ инвариантен относительно глобальных $U(1)$ преобразований $\phi \to \phi$;

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \longrightarrow e^{i\beta/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I; \quad u_R^I \to e^{i\beta/3} u_R^I; \quad d_R^I \to e^{i\beta/3} d_R^I$$

где $\beta \neq \beta(x)$, которые ответственны за сохранение барионного числа.