Функция Бейкера-Ахиезера и ее приложения.

Ф-я Бейкера-Ахиезера — одно из замечательных открытий прошлого века.
Впервые эта функция появилась как собственная ф-я обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов. Потом она была обобщена, расширена на несколько переменных, и с ее помощью было решено множество задач в геометрии и математической физике. Основной вклад в развитие ф-ции Б.-А. были внесены С.П. Новиковым и его учениками И.М. Кричевером, Б.А. Дубровиным. Нужно также отметить вклад Матвеева, Итса, Чередника и японских математических физиков.
Какие задачи были решены с помощью ф-ции Бейкера-Ахиезера?
Прежде всего — это конечнозонные периодические и квазипериодические решения солитонных уравнений:

- KdV : $u_t = \frac{1}{4}(6u u_x + u_{xxx})$

KP : $\frac{3}{4} u_{yy} = \partial_x \left(\frac{1}{4} u_t - \frac{1}{4}(6 u u_x + u_{xxx})\right)$

НШ $\quad i u_t + u_{xx} + \nu |u|^2 u = 0$

и др.

Проблема

- ~~Гипотеза~~ Римана – Шоттки и Гипотеза Новикова
- Торы постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$. Сначала изучал Венте, затем Бобенко, ~~Хитчин~~ Пинкаль

$$u_{z\bar{z}} + \operatorname{sh} u = 0 \qquad ds^2 = e^u(dx^2+dy^2)$$

$$\Delta u + 4\operatorname{sh} u = 0$$

- Минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^4$

$$ds^2 = 2e^u(dx^2+dy^2)$$

$$\Delta u = 4(e^{-2u} - e^u)$$

- Ортогональные криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^4$
- Минимальные изотропные поверхности в $\mathbb{C}P^3$ и др.

В этих лекциях мы остановимся на первых двух уравнениях и на формулировке гипотезы Новикова.

В 1834 году шотландский инженер Скотт Рассел открыл замечательное явление — солитоны.

Голландцы вывели ур-е, описывающее солитоны

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

Как найти самое простое решение? Нужно сделать подстановку (автомодельные решения)

$$u = u(x + \varkappa^2 t).$$

Если потребовать

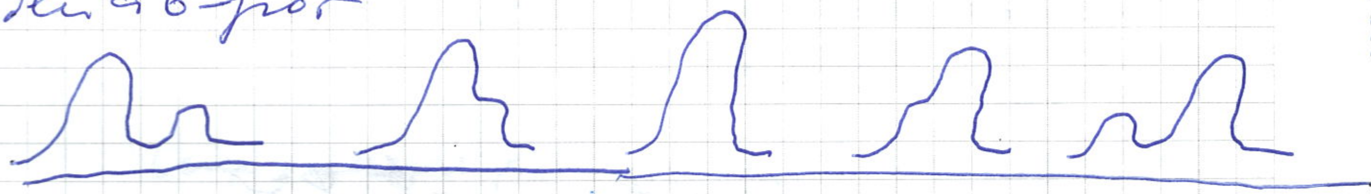
$$u|_{x=\pm\infty} = u_x|_{x=\pm\infty} = u_{xx}|_{x=\pm\infty} = 0,$$

то приходим к 1-солитонному решению

$$u = \frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x+\varkappa^2 t+\xi_0))}.$$

Профиль этого решения наблюдал Рассел и он нашел этот профиль из физических соображений, не имея уравнения.

Солитоны удивительным образом взаимодействуют



Перейдем к построению многосолитонных решений. Мы будем использовать функцию Б.А., хотя существуют и другие способы: МОЗР, билинейное уравнение Хироты

$u = 2\partial_x^2 \log \tau(x,t)$, то эта подстановка сводит KdV к билинейному уравнению Хироты

$$4\tau_x\tau_t + 3\tau_{xx}^2 - 4\tau_x\tau_{xxx} - 4\tau\tau_{tx} + \tau\tau_{xxxx} = 0.$$

Односолитонное решение

$\tau = 1+\exp(\eta)$, $\eta = 2\varkappa(x+\varkappa^2 t+\xi)$

2-солитонное решение:

$$\tau = 1+\exp\eta_1+\exp\eta_2+\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2\exp(\eta_1+\eta_2), \quad \eta_i = 2\varkappa_i(x+\varkappa_i^2 t+\xi_i).$$

Представление Лакса:

$L_2 = \partial_x^2 + u(x,t)$, $\partial_t - A = \partial_t - (\partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x)$

$[L_2, \partial_t - A] = -u_t + \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})$

Конечнозонные решения (алгебро-геометрические):

$[L_2, L_{2g+1}] = 0$.

Термин конечнозонный означает следующее:
Предположим, что $u(x)$ — вещ. период. потенциал,

Теорема Новикова, Дубровина.
Совместные собственные ф-и операторов
L_2, L_{2g+1} и $\partial_t - A$

$L_2\psi = z\psi$, $L_{2g+1}\psi = w\psi$, $(\partial_t - A)\psi = 0$

Это и есть функция Бейкера — Ахиезера,
$\psi(x, P)$, $P = (z, w)$.
Оказывается z, w удовлетворяют уравнению

$w^2 = (z - z_1) \ldots (z - z_{2g+1})$,
Если $z_i \neq z_j$, то ψ находится в терминах тэта-ф-ий.

<u>Коммутирующие обыкновенные диф. операторы</u>

$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i$, $L_m = \sum_{j=0}^{m} v_j(x)\partial_x^j$.

$[L_n, L_m] = 0 \Leftrightarrow$ система нелин. ур-й на u_i, v_j.

<u>Пример</u> $[\partial_x^2 + u(x), \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u'] = 0 \Leftrightarrow$

$(u')^2 + 2u^3 + s_1 u + s_2 = 0$.

В 1905 Шур:

Лемма Пусть L_n, L_m, L_k — диф. опер., $n \geq 1$

Если $L_n L_m = L_m L_n$, $L_n L_k = L_k L_n$, то

$$L_m L_k = L_k L_m.$$

Лемма. Если $L_1 L_2 = L_2 L_1$, то сущ. ненулевой полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_1, L_2) = 0$.

Пример $L_3^2 = L_2^3 + \frac{S_1}{8} L_2 - \frac{S_2}{16}$.

Набросок доказательства:

$\mathcal{I}_z = \{\psi : L_n \psi = z\psi\}$

$L_n : \mathcal{I}_z \to \mathcal{I}_z$.

Опр. Спектральная кривая L_n, L_m — гладкая компактиф. алгебр. кривой в $\mathbb{C}^2$

$$R(z,w) = 0.$$

Ф-я Бейкера – Ахиезера:

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g\}$$

1. в окр. q: $\psi = e^{kx}\left(1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + \dots\right)$
2. На $\Gamma - q$ имеет простые полюса в $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

$f(P) \mapsto L(f(P)) : L\psi = f\psi$.

Пример. $\mathbb{C}P^1$, $\psi = e^{xz}$

Пример. Найдем ф-ю Б.-А. в случае эллиптической кривой. Пусть Γ – элл. кривая

$$\Gamma = \mathbb{C} / \{2m\omega + 2n\omega', n, m \in \mathbb{Z}\}$$

На Γ существ. единств. с точностью до добавл. константы мером. ф-я с полюсом 2-го пор-ка в 0 – это $\wp$-ф-я Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2 z^2}{20} + \frac{g_3 z^4}{28}$$

Ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

$\wp(z)$ удовл. ур-ю

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

Действительно, $\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2 z}{10} + \frac{g_3 z^3}{7}$,

Следовательно,

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 + O(z).$$

Таким образом, мы получаем биголоморфное отображение

$$(z \to (\wp(z), \wp'(z))$$

между $\Gamma - \{0\}$ и алгебр. кривой, заданной ур-ем

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

Для явного задания ф-ции Б.-А. нам понадобятся ζ и σ-ф-ции Вейерштрасса

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

$\zeta(z)$ имеет простые полюса в узлах решетки

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{g_2 z^3}{60} - \frac{g_3 z^5}{140} + \dots$$

$$\zeta(z + 2k\omega + 2m\omega') = \zeta(z) + 2k\eta + 2m\eta',$$

где $\eta = \zeta(\omega)$, $\eta' = \zeta(\omega')$

$$\sigma(z+2\omega) = -\sigma(z)\exp(2\eta(z+\omega)), \quad \sigma(z+2\omega') = -\sigma(z)\exp(2\eta'(z+$$

$$\psi(x,z) = e^{-x\zeta(z)} \frac{\sigma(x+z+\gamma)\sigma(\gamma)}{\sigma(z+\gamma)\sigma(x+\gamma)}$$

$$S = \{\Gamma, 0, -z, -\gamma\}$$

$$\left(\partial_x^2 - 2\wp(x+\gamma)\right)\psi = \wp(z)\psi$$

$$\left(\partial_x^3 - 3\wp(x+\gamma)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x+\gamma)\right)\psi = \frac{1}{2}\wp'(z)\psi$$

Оператор Ламе: $\partial_x^2 + g(g+1)\wp(x)$

Пример $g_2, g_3 \to 0$, эллиптическая кривая вырождается в $w^2 = z^3$ $\sigma(z), \zeta(z), \wp(z)$ вырожд. в ф-ции

$$\hat\sigma(z) = z, \quad \hat\zeta(z) = \frac{1}{z}, \quad \hat\wp(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$\hat{\psi} = e^{-\frac{x}{z}} \frac{z+x+\gamma}{(x+\gamma)(z+\gamma)}$$

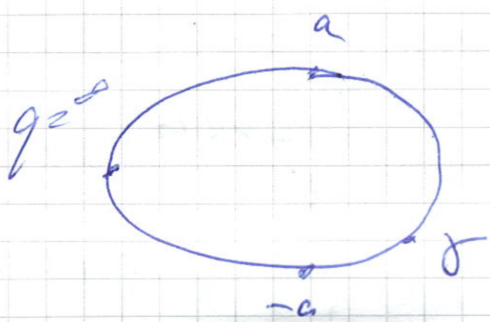
$$\left(\partial_x^2 - \frac{2}{(x+\gamma)^2}\right)\hat{\psi} = \frac{1}{z^2}\hat{\psi}$$

$$\left(\partial_x^3 - \frac{3}{(x+\gamma)^2}\partial_x + \frac{3}{(x+\gamma)^3}\right)\hat{\psi} = \frac{1}{z^3}\hat{\psi}$$

<u>Пример</u> $\quad \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$S = \{\Gamma, \infty, \tfrac{1}{z}, \gamma\}$$

$$\psi = e^{xz}\left(1 + \frac{g(x)}{z-\gamma}\right)$$



$$\psi(x,a) = \psi(x,-a)$$

$$g(x) = \frac{(\gamma^2 - a^2)\,\mathrm{sh}(ax)}{a\,\mathrm{ch}(ax) + \gamma\,\mathrm{sh}(ax)}$$

$$f(z) = z^2, \quad g(z) = z^3 - a^2 z.$$

$$L_f = \partial_x^2 + u, \quad L_g = \partial_x^3 + \left(\tfrac{3}{2}u - a^2\right)\partial_x + \tfrac{3}{4}u'(x)$$

$$u = \frac{2a^2(a^2-\gamma^2)}{(a\,\mathrm{ch}(ax) + \gamma\,\mathrm{sh}(ax))^2}$$

$$R = w^2 - z(z-a^2)^2.$$

Солитонное решение KdV

$$[\partial_x^2+u, \partial_t - A] = 0 \quad [\partial_x^2 + u(x,t), L_{2g+1}] = 0.$$

Коэф-ты L_2 и L_{2g+1} зависят от t

$$S(t) = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1(t), \dots, \gamma_g(t)\}$$

Γ-интеграл движения. $\gamma(t)$ $\gamma_1+\dots+\gamma_g$ пробегает прямолинейную обмотку в Якобиане.

1. $\psi = e^{xk+tk^3}\left(1+\dfrac{\xi_1(x,t)}{k}+\dfrac{\xi_2(x,t)}{k^2}\dots\right)$

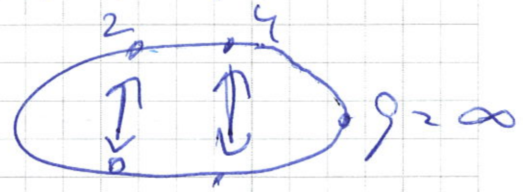
2. На $\Gamma - \{q\}$ — мером.

Пример 1. $\Gamma = \mathbb{C}P^1/\{a \sim -a\}$, $g=1$, $\gamma_1 = 0$.

$$(\partial_x^2+u)\psi = z^2\psi$$

$$u = \frac{2a^2}{\mathrm{ch}^2(a(x+a^2t))}$$

Пример 2 $g=2$ $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$



u:

$$u = \frac{160e^{16t+4x}\left(9+28e^{112t+4x}+630e^{128t+8x}+6300e^{144t+12x}+1225e^{256t+16x}\right)}{\left(1+45e^{16t+4x}+35e^{128t+8x}+175e^{144t+12x}\right)^2}$$

Многообразие Абеля

$\Omega^t = \Omega$, $\operatorname{Im}\Omega > 0$

$X = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\}$ — многообразие Абеля, его размерность $2g$ (вещ.)

В этом случае многообр. абеля является алгебраическим многообразием, т.е. существ. вложение отобр. $\varphi: X \to \mathbb{C}P^N$. Образ задается системой алгебраических (однородных уравнений).

Вложение может быть задано с помощью тэта-ф-й Римана.

Опр. Тэта-ф-я задается абсолютно сход. рядом

$$\Theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n \Omega n^t + 2\pi i n z^t)$$

$$z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g, \quad n = (n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{Z}^g$$

Этот ряд абсолютно сходится за счет $\operatorname{Im}\Omega > 0$.

Лемма $\Theta(z+m) = \Theta(z)$

$$\Theta(z + \Omega m^t) = \exp(-\pi i m \Omega m^t - 2\pi i m z^t)\,\Theta(z), \quad m \in \mathbb{Z}^g.$$

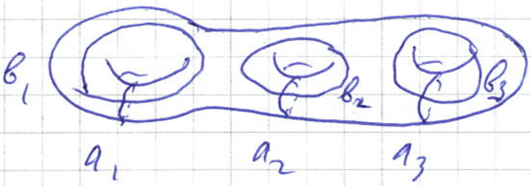
Важным классом абелевых многообразий являются многообразия Якоби.

Как вложить X^g в $\mathbb{C}P^N$? Тэта-ф-я степени (веса) ℓ: $\Theta(z + \Omega m^t) = \exp(-\pi i m \Omega m^t \ell - 2\pi i m z^t \ell)\,\Theta(z)$

Размерность равна ℓ^g.

Пример $\Theta(z - a_1) \dots \Theta(z - a_\ell)$, $a_1 + \dots + a_\ell = 0$.

Многообразие Якоби римановой поверхности рода g



На римановой поверхности Γ рода g имеется базис циклов

$a_1,\dots,a_g,\ b_1,\dots,b_g$ с индексами пересечений

$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$.

На римановой поверхности существует ровно g абелевых дифференциалов $\omega_1,\dots,\omega_g$

$\omega = f(z)\,dz$.

Пример $w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g} z^{2g} + \dots + c_0$

$$\omega_1 = \frac{dz}{w},\ \omega_2 = \frac{z\,dz}{w}, \dots, \omega_g = \frac{z^{g-1}dz}{w}.$$

Нормируем ω_i: $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$. Пусть $\Omega_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$.

Риман: $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$, $\operatorname{Im} \Omega > 0$.

Опр. $J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g\}$ — многообразие Якоби.

Проблема Римана–Шоттки: Как выделить Ω, отвечающие римановым поверхностям?

Теор. (Кричевер И.М.) Конечнозонные решения КП:

$u = 2\partial_x^2 \Theta(Ux + Vy + Wt + z_0) + c$, Θ строится по Якобиану римановой поверхности, $U, V, W, z_0 \in \mathbb{C}^g$, c — некоторая константа.

Гипотеза Новикова Верно и обратное т.е. решение такого вида могут существовать, если Λ - матрица периодов абелевых ДНФ-ов римановой поверхности.

Отображение Абеля

Выберем $P_0 \in \Gamma$.

Опр. Отображением Абеля назыв. отображение $A: \Gamma \to J(\Gamma)$, заданное ф-ой

$$A(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \dots, \int_{P_0}^{P} \omega_g \right).$$

Отображение Абеля корректно определено.

Теорема Абеля. Дивизор $D = P_1 + \dots + P_g - Q_1 - \dots - Q_g$ является главным тогда и только тогда, когда

$A(D) = 0$.

Теорема обращения Якоби

Для любого $\lambda \in J(\Gamma)$ существуют g точек $P_1, \dots, P_g \in \Gamma$ таких, что $A\left(\sum_{i=1}^{g} (P_i - P_0)\right) = \sum_{i=1}^{g} A(P_i) = \lambda$.

Более того, для общего λ существует единственный дивизор $P_1 + \dots + P_g$.

$S^g \Gamma \to J(\Gamma)$ — бирациональный изоморфизм.

Теорема Римана о нулях тэта-ф-ции

Существует вектор $K \in \mathbb{C}^g$ (вектор римановых констант), такой что для всех $z \in \mathbb{C}^g$ ф-я

$$f(P) = \Theta(A(P) + z)$$

либо тождественно равна 0, либо имеет g нулей $Q_1, \dots, Q_g$, таких что

$A(Q_1)+\dots+A(Q_g) = -Z+K.$

Ф-я Бейкера-Ахиезера для КП.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ - мером. ф-ма с полюсами 2-го, 3-го и 4-го порядка в Q с разложениями

$$2\pi i \int_{P_0}^{P} \Omega_1 = k + a_1 + \frac{a_2}{k}+\dots,\quad 2\pi i \int_{P_0}^{P} \Omega_2 = k^2 + b_1 + \frac{b_2}{k}+\dots,\quad 2\pi i \int_{P_0}^{P} \Omega_3 = k^3 + c_1 + \frac{c_2}{k}+\dots$$

и нулевыми a-периодами, $U = \oint_b \Omega_1$, $V = \oint_b \Omega_2$, $W = \oint_b \Omega_3$

$$\psi = \frac{\theta(A(P)-A(D)+K+xU+yV+tW)\,\theta(-A(D)+K)}{\theta(A(P)-A(D)+K)\,\theta(-A(D)+K+xU+yV+tW)} \times$$

$$\times \exp\left(2\pi i x\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_1 - a_1\right) + 2\pi i y\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_2 - b_1\right) + 2\pi i t\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_3 - c_1\right)\right)$$

Т. Кричевер

$u = 2\partial_x^2 \log \theta(xU+yV+tW+z_0)+C$ - решение КП.

МИАН-90!