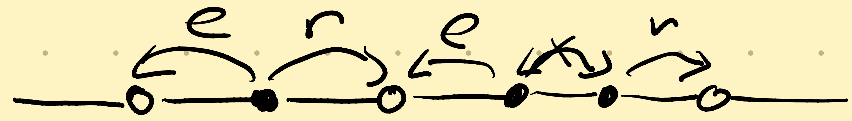
SEP.



$r=l$ – SSEP
$r\neq l$ – ASEP
$r=1, l=0$: TASEP

Марковский процесс в непрерывном времени:

Пространство состояний: $\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{L}}$, $\mathbb{L}=\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_L$

Конфигурация $\Omega \ni \eta$ $\quad (\ldots,\eta(i),\ldots)$ $\quad \eta(i)\in\{0,1\}$

η_t - конфигурация в момент времени t.

Интенсивность перехода $\eta\to\eta'$: $u(\eta,\eta')$

(т.е. система переходит из η в η' с вероятностью $u(\eta,\eta')\,dt$ за время dt)

Для SEP $\quad u(\eta,\eta') = r\eta(i)(1-\eta(i+1))+l\eta(i+1)(1-\eta(i))$, где

$$\eta'=\eta^{(i,i+1)}=(\ldots\eta(i-1),\eta(i+1),\eta(i),\eta(i+2),\ldots)$$

Когда пространство конфигураций конечно или счетно можно можно приписать вероятность каждому состоянию:

$$P_t(\eta)=\mathbb{P}(\eta_t=\eta)$$

Ур. Колмогорова (Основное): $\frac{\partial}{\partial t}P_t(\eta)=L P_t(\eta)$

$$LP(\eta)=\sum_{\eta'}u(\eta',\eta)P(\eta')-u(\eta,\eta')P(\eta)$$

Соответствие между конфигурациями частиц и фронтом:

$h(x)$ – кусочно линейная ф-я на $\mathbb{R}$

В точках $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$: $h(x+\frac{1}{2})-h(x-\frac{1}{2}) = 1-2\eta(x)$ и

и линейна между ними.

Рассмотрим SEP на кольце: $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_L = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$.

Стационарное распределение: $\mathcal{L} P_{st}(\eta) = 0$

$$\mathcal{L}P(\eta) = \sum_i \Big[\big(r(1-\eta(i))\eta(i+1) + e\,\eta(i)(1-\eta(i+1))\big) P(\eta^{i,i+1}) -$$

$$- \big(r(1-\eta(i+1))\eta(i) + e\,\eta(i+1)(1-\eta(i))\big) P(\eta) \Big]$$

$P_{st}(\eta) = \text{const}$ решает ур-е $\mathcal{L}P_{st}(\eta) = 0$ т.к.

каждому (01) соответствует (10).

Теорема: Пусть $|\eta_0| = M$, тогда $P_t(\eta) \to P_{st}(\eta) = \frac{1}{C_L^M}$.

Средние в стационарном состоянии.

Плотность частиц: $\rho(i) = \langle \eta(i) \rangle = \frac{C_{L-1}^{M-1}}{C_L^M} = \frac{M}{L} = \rho$.

Парные корр. ф-ии

$$\langle \eta(i)\eta(j) \rangle = \frac{C_{L-2}^{M-2}}{C_L^M} = \frac{M(M-1)}{L(L-1)} = \frac{\rho(\rho-\frac{1}{L})}{1-\frac{1}{L}} \xrightarrow[L\to\infty]{} \rho^2, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{cov}(\eta(i),\eta(j)) \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$$

Утв. Трансляционно инвариантное стационарное состояние SEP в бесконечной системе: Берищлиевское факторизованное состояние

$$\mathbb{P}(\eta_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\eta_i = 0) = \rho \quad \text{и} \ \{\eta_i\} \ \text{- н.о.р.с.в.}$$

Стационарный ток при плотности ρ:

$$\overset{\circ}{j}(i) = \langle (r\,\eta(i)(1-\eta(i+1)) - \ell\,\eta(i+1)(1-\eta(i))) \rangle = (r-\ell)\frac{\rho(1-\rho)}{1-\frac{1}{L}} \to (r-\ell)\rho(1-\rho)$$

Для ф-ии высоты:

$$\langle h(i+\tfrac{1}{2},t)\rangle = \langle h(\tfrac{1}{2},t)\rangle + (1-2\rho)\,i = t\cdot \overset{\circ}{j}(0)\cdot 2 + (1-2\rho)\cdot i.$$

Более того: $h([Lx]+\frac{1}{2},t) = h(\frac{1}{2},t) + \sum\limits_{k=1}^{[L\cdot x]}(1-2\eta(k)) \simeq$

$$\simeq h(\tfrac{1}{2},t) + Lx(1-2\rho) + \sqrt{L}\,2\sqrt{\rho(1-\rho)}\,W_x$$

В частности $D\left(h(i+\frac{1}{2},t) - h(j+\frac{1}{2},t)\right) = (i-j)\,4\rho(1-\rho)$

т.е. $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}}}$. Чему равно z?

Что можно сказать о нестационарных наблюдаемых

$$\langle f(\eta_t)\rangle = \sum_{\eta\in\Omega} P_t(\eta) f(\eta)$$

$$\frac{d}{dt}\langle f(\eta_t)\rangle = \langle L^b f(\eta_t)\rangle$$ – обратное ур-е Колмогорова.

$$L^b f(\eta) = \sum_{\eta'} u(\eta,\eta')(f(\eta')-f(\eta))$$

Пусть $f(\eta)=\eta(i)$ $\quad\langle f(\eta)\rangle = \rho(i)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\rho_t(i) = j_t(i) - j_t(i+1)}$$ – ур-е непрерывности

З. Б. Ч. $\quad \rho_{t\tau}(x\tau) \;\text{“}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\text{”}\; \rho(x,t)$: $\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \nabla j(\rho) = 0}$

(Гипотеза квазистационарности. $\underbrace{\sum_{i=a\tau}^{b\tau} f\left(\frac{i}{\tau}\right)\rho_t(i) \to \int_a^b \rho(x,t)dx}$)

До уровня ЗБЧ можно дойти чисто вероятностными методами. Дале описан. флуктуаций нужно точное решение.

Пусть $\rho(x,0) = \theta(-x)$. $\iff h(x,0) = |x|$

Решим ур-е $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}(1-2\rho) = 0$$

метод характеристик: $t(s)\quad x(s)\quad \rho(s)$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = 1-2\rho \qquad \frac{d\rho}{ds} = 0$$

$t=s \qquad x = x_0 + s(1-2\rho(x_0,0)) \qquad x_0=0 \quad x=t(1-2\rho)$

$x_0<0 \qquad x = x_0 - t \qquad \rho(x_0-t,t) = 1 \qquad \rho = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{t}\right)$

$x_0>0 \qquad \rho(x_0+t,t) = 0 \qquad |x|<t$

$$\nabla h = (1-2g) \implies h(x,t) = h(-t,t) + \int_{-t}^{x} (1-2g(y,t))\, dy =$$

$$= t + \int_{-t}^{x} \frac{y}{t}\, dy = t + \left(\frac{x^2}{2t} - \frac{t^2}{2t}\right) = \frac{t}{2}\left(1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)$$

ASEP и анзац Бете.

1) Пусть $|\eta| = M$ $\quad \eta \to x = (x_M < x_{M-1} < \dots < x_1)$

Хотим решить ур-е $\frac{d}{dt} P_t(x) = \mathcal{L} P_t(x)$

План: Диагонализовать генератор

$$\mathcal{L}\Psi_z = \lambda(z)\Psi_z .$$

Пусть $P_0(x) = \text{“}\sum_z\text{”}\, C_z \Psi_z(x)$, тогда

$$P_t(x) = \text{“}\sum_z\text{”}\, C_z \Psi_z(x) e^{t\lambda(z)}$$

В частности если $P_0(x) = \delta_{x,x^0}$ $\quad \text{“}\sum_z\text{”}\, C_z \Psi_z(x) = \delta_{x,x^0}$.

$M = 1$ частица $\quad \mathcal{L}\Psi(x) = \mathcal{L}_x \Psi(x) = r\Psi(x-1) + \ell\Psi(x+1) - \Psi(x) \quad (\ell + r) = 1$

с-я ф-я $\quad \Psi_z(x) = z^x \qquad \lambda_1(z) = \frac{r}{z} + \ell z - 1$

На кольце $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_L \qquad z^L = 1 \qquad z_k = e^{\frac{2\pi i k}{L}} \quad k = 0, \dots, L-1.$

На бесконечной решетке условий на z нет.

Определим “Σ” и C_z так, чтобы

“Σ” $C_z \cdot z^x$:

На $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$: “Σ” $\to \oint \frac{dz}{2\pi i z}$ и $C_z = z^{-x^0}$ т.к. $\oint \frac{dz}{2\pi i z} z^{x-x^0} = \delta_{x,x^0}$

$$P_t(x) = \oint \frac{dz}{2\pi i z} e^{t\lambda_1(z)} z^{x-x^0}$$

| при $r = 1$ $\quad P_t(x|x^0) = \frac{t^{x-x^0}}{(x-x^0)!} e^{-t}$ – р-е Пуассона

Для $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_L$! "$\sum$" $= \sum_{k=0}^{L-1}$ $\qquad c_z = \dfrac{z^{-x^0}}{L}$

$M=2$ $\qquad L\Psi(x_2, x_1) = r\Psi(x_2-1, x_1) + e\Psi(x_2+1, x_1) - \Psi(x_2, x_1) +$ $\qquad (*)$

$x_2 < x_1 - 1$ $\qquad + r\Psi(x_2, x_1-1) + e\Psi(x_2, x_1+1) - \Psi(x_2, x_1) =$

$= (L_{x_1} + L_{x_2})\Psi(x_1, x_2)$

$x_2 = x_1 - 1 = x$ $\qquad L\Psi(x, x+1) = r\Psi(x-1, x+1) + e\Psi(x, x+2) - \Psi(x, x+1)$ $\quad (**)$

Будем искать решение первого ур-я $(*)$ с гран. условием

$r\Psi(x,x) + e\Psi(x+1, x+1) - \Psi(x, x+1) = 0$ $\qquad (***)$

$\Psi_z(x_2, x_1) = A_{12} z_1^{x_1} z_2^{x_2} + A_{21} z_2^{x_1} z_1^{x_2}$ $\qquad \lambda_2(z) = \lambda_1(z_1) + \lambda_1(z_2)$

гран условие $(***)$: $\quad A_{12}(r + e z_1 z_2 - z_1) + A_{21}(r + e z_1 z_2 - z_2) = 0$

$\dfrac{A_{12}}{A_{21}} = S(z_1, z_2) = -\dfrac{r + e z_1 z_2 - z_2}{r + e z_1 z_2 - z_1}$

На кольце $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_L$: период. гран. условие

$\Psi_z(x_2, x_1) = \Psi_z(x_1, x_2 + L)$

$\underline{A_{12} z_1^{x_1} z_2^{x_2}} + \underline{\underline{A_{21} z_2^{x_1} z_1^{x_2}}} = \underline{\underline{A_{12} z_1^{x_2+L} z_2^{x_1}}} + \underline{A_{21} z_2^{x_2+L} z_1^{x_1}}$

$\boxed{S(z_1, z_2) = z_2^L \qquad S(z_2, z_1) = z_1^L}$ - ур-я Бете

Для произвольного M: Задача сводится к

к свободному ур-ю $L\Psi(x) = (L_{x_1} + \dots + L_{x_M})\Psi$

с гран. условиями на ф-ю $\Psi(x_M, \dots, x_1)$

$r\Psi(\dots, x, x, \dots) + e\Psi(\dots, x+1, x+1, \dots) - \Psi(\dots, x, x+1, \dots) = 0$

Собств. ф-я – Анзац Бете:

$$\Psi_z(x_1,\dots,x_M) = \sum_{\sigma\in S_M} A_\sigma z_{\sigma_1}^{-x_1}\dots z_{\sigma_M}^{-x_M} \qquad \frac{A_{\dots ij \dots}}{A_{\dots ji \dots}} = S(z_i,z_j)$$

Положим $A_{Id}=1$. Тогда

$$A_\sigma = \prod_{\{i<j:\,\sigma_i>\sigma_j\}} S(z_{\sigma_i},z_{\sigma_j})$$

Собственное значение: $\lambda_M(z)=\sum_{i=1}^{M}\lambda_1(z_i)$

Для $\Pi=\mathbb{Z}_L$: Периодические гран. услов.

$\Psi(x_M,\dots,x_1)=\Psi(x_{M-1},\dots,x_1,x_M+L) \Rightarrow$ Ур-я Бете

$$\prod_{j\neq i} S(z_j,z_i)=(-1)^{M-1}\prod_{j\neq i}\frac{r+e z_1 z_2 - z_i}{r+e z_1 z_2 - z_j} = z_i^L,\; i=1,\dots,M$$

В этом случае построение разложения единицы, т.е. поиск ("Σ", C_z) становится нетривиальной задачей.

Для $\Pi=\mathbb{Z}$: "Σ" $=\prod_i \oint \frac{dz_i}{2\pi z_i}$ $\quad C_z=\prod_i z_i^{-x_i}$

Рассмотрим TASEP: $r=1$, $e=0$

Тогда $A_\sigma=\prod_i (1-z_{\sigma_i})^{i-\sigma_i}(-1)^{|\sigma|}$

$$\Psi_z(x_M,\dots,x_1)=\sum_{\sigma\in S_M}(-1)^{|\sigma|}\prod_i(1-z_{\sigma_i})^{i-\sigma_i} z_{\sigma_i}^{x_i} = \det\left[(1-z_j)^{j-i} z_j^{x_i}\right]$$

Теорема (Schütz): Пусть $x=(x_M<\cdots<x_1)$, $y=(y_M<\cdots<y_1)$

$$G_t(x|y)=\mathbb{P}(X(t)=x \mid X(0)=y)=\left(\prod_i \oint \frac{dz_i}{2\pi i\, z}\right) e^{t_M(z)}\cdot \Psi_z(x)\prod_i z_i^{-y_i}$$

$$=\det\left(F_{j-i}(x_i-y_j;t)\right)_{1\le i,j\le M}$$

$$F_n(x;t)=\oint_{\Gamma_0}\frac{dz}{2\pi i\, z}\, z^x(1-z)^{-n}e^{t(\frac{1}{z}-1)} \qquad F_n(x;0)=\binom{n-x+1}{x}$$

Док-во: $G_0(x|y)=\det\left[\begin{pmatrix} j-i-(x_i-y_j)-1 \\ -(x_i-y_j)\end{pmatrix}\right]_{1\le i,j\le M}=\delta_{x,y}$

$$\binom{n}{m}=\frac{(n)_m}{m!}$$

TASEP на $\mathbb{Z}$ со ступенчатыми н.у.

$\eta_0(i)=1 \quad i\le 0 \qquad \eta_0(i)=0 \quad i\ge 0$

$h(x,0)=|x-\frac{1}{2}|$ $\qquad x_i(0)=-i+1$ $\qquad J_t(k)$ – число прыжков из k в $k+1$

Задача. $(N>M)$

$$P(M,N,t)=\mathbb{P}(x_M(t)>-M+N)=\mathbb{P}(J_t(N-M)\ge M)=$$

$$=\mathbb{P}(h(N-M+\tfrac{1}{2},t)-h(N-M+\tfrac{1}{2},0)\ge 2M)=?! \qquad (N\le M)$$

$$P(x_M(t)>N-M)=\sum_{N-M<x_M<\cdots<x_2<x_1} G_t(x_M,\dots,x_1|-M+1,\dots,0)$$

$$G_t(x_M,\dots,x_1|-M,\dots,-1)=\begin{vmatrix} F_0(x_1,t) & F_1(x_1+1,t) & \cdots & F_{M-1}(x_1+M-1,t) \\ F_{-1}(x_2,t) & & \cdots & F_{M-2}(x_2+M-1,t) \\ \vdots & & & \vdots \\ F_{-M+1}(x_M;t) & \cdots & \cdots & F_0(x_M+M-1;t)\end{vmatrix}$$

Св-ва $F_n(x,t)$:

$$\frac{d}{dt} F_n(x,t) = F_{n-1}(x-1,t) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F_n(x;t) = F_{n+1}(x+1,t_2) - F_{n+1}(x+1,t_1)$$

$$F_n(x;t) = F_{n+1}(x;t) - F_{n+1}(x+1;t) \Rightarrow \sum_{x=x_1}^{x_2} F_n(x;t) = F_{n+1}(x_1;t) - F_{n+1}(x_2+1,t)$$

$n \le 0$

$$F_n(x,t) = \sum_{m=0}^{-n} (-1)^m \binom{-n}{m} F_0(x+m;t) \qquad n \le 0$$

$$F_0(x,t) = e^{-t} \frac{t^x}{x!}$$

$$P(N,M,t) = \begin{vmatrix} F_1(N;t) & \cdots & F_M(M+N-1;t) \\ \vdots & & \\ F_{-M+2}(N-M+1;t) & & F_1(N;t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \int_0^t F_0(N-1,\tau)d\tau & \cdots & \int_0^t F_{M-1}(M+N-2;\tau)d\tau \\ \vdots & & \\ \int_0^t F_{-M+1}(N-M;\tau)d\tau & \cdots & \int_0^t F_0(N-1;\tau)d\tau \end{vmatrix}$$

$$P(N, M, t) = \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{1}{i!\,(N-i)!} \right) \int_0^t \dots \int_0^t \prod_{i=1}^{M} \tau_i^{N-M} e^{-\tau_i} \prod_{i<j} (\tau_i - \tau_j)^2 \, d^M \tau$$

Теория случайных матриц (Инвар. Гауссовые ансамбли)

Пусть H - $M \times M$ эрмитова случ. матрица, г

1) $\beta = 1$ GOE: $H_{ij} \in \mathbb{R}$ $H_{ij} = H_{ji}$, $H_{ij} \sim N$ $i<j$

$H_{ii} \sim \sqrt{2} N$ H_{ij} независимы при $i<j$

2) $\beta = 2$ GUE: $H_{ij} \in \mathbb{C}$ $H_{ij} = H_{ji}^*$, $H_{ii} \sim N$, $\mathrm{Re} H_{ij} \sim \frac{N}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{Im} H_{ij} \sim \frac{N}{\sqrt{2}}$, H_{ij} -незав. при $i \le j$.

3) $\beta = 4$ GSE: - // —

$$P(dH) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{4} \mathrm{Tr}\, H^2} dH$$

$dH = \prod_{i \le j} dH_{ij}$ $\beta = 1$

$dH = \prod_i dH_{ii} \prod_{i<j} d\,\mathrm{Re} H_{ij}\, d\,\mathrm{Im} H_{ij}$

Распределение собственных значений H. (Плотность)

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{4} \sum_i x_i^2} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta$$

Расиред λ_{max}:

$$\mathbb{P}(\lambda_{max} < a) = \int_{-\infty}^{a} \dots \int_{-\infty}^{a} f(x_1, \dots, x_M)\, d^M x$$

Поведение $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ при $M \to \infty$:

3.Б.Ч. Полукруговой закон Вигнера:

$$\#\left\{\frac{\lambda_i}{\sqrt{M}} \in [a, b]\right\} = \int_a^b f_{sc}(x)\,dx \qquad f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\theta(2-|x|)$$

3.Б.Ч. для λ_{max}: $\dfrac{\lambda_{max}}{\sqrt{M}} \xrightarrow{\text{п.н.}} 2$

Ц.П.Т. для λ_{max}: $\dfrac{\lambda_{max} - 2\sqrt{M}}{M^{-1/6}} \xrightarrow[M\to\infty]{D} \xi_{TW}$

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\lambda_{max} - 2\sqrt{M}}{M^{-1/6}} < a\right) = F_2(a)$$ – распределение Трейси-Уидома.

$$F_2(a) = e^{-\int_s^\infty (x-s)q^2(x)\,dx} \qquad q'' = sq + 2q^3 \qquad q(s) \underset{s\to\infty}{\sim} Ai(s)$$

$$F_2(a) = \det\left(1 - \hat{K}_{Airy}\right)_{L_2(\mathbb{R}_{>a})},$$

где $K: f(x) \to \hat{K}_{Airy} f(x) = \int_a^\infty K_{Airy}(x,y) f(y)$

$$K(x,y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai(y)Ai'(x)}{x-y} \qquad Ai(x) = \int_{\infty e^{-2\pi i/2}}^{\infty e^{2\pi i/2}} e^{-\frac{s^3}{3} + xs}\,ds$$

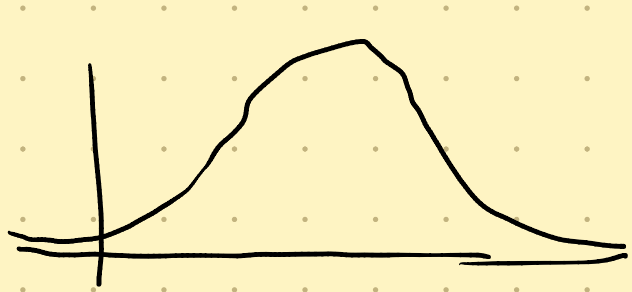
(решение $f''(x) - xf(x) = 0$)

$$F_2'(x) \sim e^{-\frac{1}{12}x^3} \qquad x \to -\infty$$

$$\sim e^{-\frac{4}{3}x^{3/2}} \qquad x \to \infty$$

$\langle \xi_{TW} \rangle \simeq -1,77\dots$

$D(\xi_{TW}) \simeq 0,813$



Детерминантный точечный процесс.

Пусть $\mathbb{P}$ - распределение вероятности на локально конечных точечных конфиг. на $\mathbb{R}$ такой, т. е. на $f:\mathbb{R}\to\{0,1\}$, без точек сгущения. ξ - случайная точечная конф.

$\rho_n(x_1,\dots,x_n)$ - n-точечная корр. ф-я если

$$\mathbb{P}(\xi \text{ содержит точки в } [x_1,x_1+dx_1],\dots,[x_n,x_n+dx_n]) =$$
$$= \rho_n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

Набор $\{\rho_n(x_1,\dots,x_n)\}_{n\geq 1}$ задаёт $\mathbb{P}$.

$\rho_n(x_1,\dots,x_n)$ - симметр. ф-я $x_1,\dots,x_n$.

Точечный процесс называется детерминантным если $\exists\, K(x,y):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \det(K(x_i,x_j))_{1\leq i,j\leq n}.$$

Вероятность дырки:

$$\mathbb{P}(\text{нет точек в } [a,b]) = 1-\int_a^b \rho_1(x)dx + \int_{a\leq x_1<x_2\leq b}\rho_2(x_1,x_2)d^2x - \int_{a<x_1<x_2<x_3<b}\rho_3(x_1,x_2,x_3)d^3x$$

$$= 1 - \int_a^b K(x,x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \det\begin{pmatrix}K(x_1,x_1) & K(x_1,x_2)\\ K(x_2,x_1) & K(x_2,x_2)\end{pmatrix}d^2x - \frac{1}{3!}\int d^3x \det(K)_{3\times 3}\dots$$

$$= \det(1-K)_{L_2([a,b])}$$

$$\mathbb{P}(\lambda_{max}<a) = \mathbb{P}(\text{нет } \lambda_i \text{ в } [a,\infty)) = \det(1-K)_{L_2(\mathbb{R}_{>a})}$$

Пусть M случайных точек задано распределением $(x_1,\dots,x_M)$ с плотностью

$$f(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{Z_M}\prod_{i=1}^{M}w(x_i)\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$$

Теорема: $f(x_1\dots x_n)$ задаёт дет. точечный процесс.

$$\prod_{i<j}(x_i-x_j)=\det\left(x_j^{M-i}\right)_{1\le i,j\le M}=\Delta(x)$$ – детерминант Вандермонда.

$$\Delta(x)=\det(p_i(x_j))_{1\le i,j\le n} \qquad p_i(x)=x^{i-1}+a_{i-2}x^{i-2}+\dots+a_0$$

$$Z_M=\int\prod_i w(x_i)\det(p_i(x_j))\det(p_i(x_j))\,d^Mx$$

Формула Андреева:

$$\frac{1}{M!}\int\det_{ij}(g_i(x_j))\det(f_i(x_j))\,d^Mx=\det\left(\int g_i(x)f_j(x)\right)$$

$$Z=M!\det(A)_{0\le i,j\le M-1} \qquad A_{ij}=\int p_i(x)p_j(x)dx$$

$$f(x_1\dots x_M)=\frac{\det(p_i(x_j))\det(p_i(x_j))}{M!\det A}\prod_i w(x_i)=\frac{\det(K(x_i,x_j))_{M\times M}}{M!}$$

$$K_M(x,y)=\sum_{i,j=0}^{M-1}p_{i-1}(x)A^{-1}_{ij}p_{j-1}(y)\sqrt{w(x)w(y)}$$

$$S_M(x_1\dots x_M)=\sum_{\sigma\in S_M}f(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_M})=\det(K(x_i,x_j))_{1\le i,j\le M}$$

$$S_K(x_1,\dots,x_K)=\frac{M!}{(M-K)!}\int f(x_1\dots x_M)\,dx_{K+1}\dots dx_M=$$

$$=(M-K)\int S_{K+1}(x_1,\dots,x_{K+1})\,dx_K$$

Пользуясь св-вами ядра:

$$\int K_M(x,x)\,dx = M \qquad \int K_M(x,y)K_M(y,z)\,dy = K_M(x,z)$$

Получим: $\rho_k(x_1 \dots x_k) = \det\limits_{1\le i,j\le k}\left(K_M(x_i,x_j)\right)$!

Выберем $p_i(x)$ - ортогональными

$$\int p_i(x)\,p_j(x)\,w(x)\,dx = \delta_{ij}\,h_i$$

Тогда: $A_{ij} = h_i\delta_{ij}$ и

$$K_M(x,y) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{p_i(x)\,p_i(y)}{h_i}\sqrt{w(x_i)\,w(x_j)} =$$

$$= \frac{1}{h_n}\,\frac{p_{n-1}(x)\,p_n(y) - p_n(x)\,p_{n-1}(y)}{y-x}$$ - ф-ла Кристоффеля Дарбу.

Для GUE $p_n(x)$ - многочлены Эрмита

$$w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Для TASEP $p_n(x)$ - мн-н Лагерра

$$w(x) = x^{N-M}e^{-x} \qquad x\in\mathbb{R}_+$$

$$K_M^{GUE}(2\sqrt{M} + M^{-1/6}\varphi, 2\sqrt{M} + M^{-1/6}\xi) \to K_{Airy}(\varphi, \xi)$$

$$\det(1-\tilde{K})_{L_2(\mathbb{R}_{\sqrt{2}n + M^{-1/6}a})} \to F_2(a) \qquad \left(h(x,t) \simeq \frac{t}{2}\left(1+\left(\frac{x}{t}\right)^2\right)\right)$$

$$P(N,M,t) = \det(1-K_M)_{L_2(\mathbb{R}_{>t})}$$

$$= 1 - \int_t^\infty K_M(x,x) + \frac{1}{2}\int_t^\infty\int_t^\infty \begin{vmatrix} K_M(x_1,x_1) & K_M(x_1,x_2) \\ K_M(x_2,x_1) & K_M(x_2,x_2) \end{vmatrix} d^2x - \dots$$

$$P(N,M,t) = \mathbb{P}(h(N-M+\tfrac{1}{2},t) - h(N-M+\tfrac{1}{2},0) \geq 2M) =$$

$$= \mathbb{P}(h(N-M+\tfrac{1}{2},t) - (N-M) \geq 2M) = P(h(N-M+\tfrac{1}{2},t) \geq M+N)$$

$$N-M = xt \qquad h \simeq \frac{t}{2}(1+x^2) + O(t^\alpha)$$

$$N+M = \frac{t}{2}(1+x^2) + s\sigma(x)t^\alpha$$

$$\det(1-K_M)_{L_2(\mathbb{R}_{>t})} \to F_2(s)$$