Аналитические формы гравитационных волн релятивистских двойных систем: переход во временную область

А.В. Мишакина[a,b,1], *С.И. Блинников*[b,c,d,2]

[a] Московский физико-технический институт, 141701 Москва, Россия

[b] Курчатовский институт, 123182 Москва, Россия

[c] Государственный астрономический институт им. П.К. Штенберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119234 Москва, Россия

[d] Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (Kavli IPMU, WPI), Kashiwa, Chiba, 277-8583 Japan

Предложен метод перехода во временную область для полностью аналитических аппроксимаций для форм гравитационных волн, порождаемых при слиянии нейтронных звезд и черных дыр.

PACS: 95.30.Sf; 04.30.Tv

[1] E-mail: sasha.mishakina@gmail.com

[2] E-mail: sblinnikov@bk.ru

Введение

В работе [1] описан способ получения аналитических форм гравитационных волн для сливающихся двойных систем релятивистских звезд (черных дыр и нейтронных звезд). Эти формулы могут значительно ускорить обнаружение гравитационных волн на установках LIGO, Virgo, KAGRA и т. п. Однако формулы работы [1] выписаны как функции релятивистского параметра x, но для работы установок они должны быть получены как функции времени t, поскольку реальный поиск гравитационных волн производится путем преобразования шаблона из временной области (time domain) в частотную методом быстрого преобразования Фурье (FFT).

В настоящей заметке мы показываем метод перевода формул из работы [1] во временную область.

Переход во временную область

Для первичного поиска гравитационных волн интерферометры LIGO используют аналитические аппроксимации, интерполированные по численным данным ([2] — [3]). Полные аналитические решения для слияния компактных объектов отсутствуют, поэтому применяются гибридные модели, сочетающие постньютоновские (Post Newtonian) приближения для фазы сближения с результатами численных расчетов в ОТО (Numerical Relativity) для слияния и затухания. На основе этого создаются банки шаблонов ([4] — [9]), которые покрывают многомерное пространство параметров с минимальным совпадением. Банки содержат миллионы шаблонов, охватывающих различные значения масс, спинов и других параметров, что позволяет осуществлять сопоставление с наблюдаемыми данными методом согласованной фильтрации (matched filtering). Данные интерферометров дискретизируются с фиксированной частотой, определяемой полосой пропускания детектора. Стандартный шаг дискретизации равен 16384 Гц ($\Delta t_{\mathrm{LIGO}} \approx 61$ мкс) и выбирается для однозначного охвата частотного диапазона гравитационно-волновых сигналов [10].

Однако использование заранее рассчитанных банков дискретных шаблонов требует значительных вычислительных ресурсов и накладывает жёсткие ограничения на шаг дискретизации и интерполяцию данных в многомерном пространстве параметров. В работе [1] исследуется альтернативная возможность использования полностью аналитического параметрического шаблона.

Формы гравитационной волны из работы [1] зависят от релятивистского параметра $x = v^2/c^2$, где v — скорость обращения, c — скорость света. Для численного моделирования в LIGO уравнения, параметризованные через $x(t)$, требуют явного задания зависимости времени от этого параметра: $t(x)$, — и дискретизации с заданным шагом по времени. Для

нахождения значения x_n, соответствующего дискретному моменту времени $t_n = t_0 + n\Delta t_{\text{LIGO}}$ с требуемой точностью, в данной работе предлагается применение метода Ньютона, известного из вычислительной математики.

Метод Ньютона — итерационный алгоритм для нахождения корней нелинейных уравнений с квадратичной скоростью сходимости. Он позволяет находить зависимость $t(x)$ путём последовательных приближений:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ определяется из исходных уравнений, связывающих параметр x и время t.

Значение x_0 известно при $t_0 = 0$: это нижняя граница параметра x, которая определяется детектируемым диапазоном детекторов LIGO.

В качестве начального приближения $x_1^{(0)}$ используется значение, полученное по явной схеме Эйлера на предыдущем шаге:

$$x_1^{(0)} = x_0 + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \Delta t. \tag{2}$$

Производная по времени для x известна и рассчитывается с помощью аппроксимантов из работы [5], в результате чего можно получить такое уравнение [11]:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{64}{5}\frac{\eta x^5}{M}\left(1 + \sum_{k=2}^{12} a_{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}}\right), \tag{3}$$

где $\eta = \mu/M$ — симметричное отношение масс компонент системы, $\mu = M_1 M_2/M$ — приведенная масса, M — суммарная масса системы звезд массами M_1 и M_2, a_i — коэффициенты из работы [11].

Значение $x_1^{(0)}$ затем уточняется итерациями Ньютона:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{f(x_1^{(k)})}{f'(x_1^{(k)})}, \tag{4}$$

где

$$f(x) = t(x) - \Delta t_{\text{LIGO}}, \tag{5}$$

пока не будет достигнута нужная точность. На практике достаточно одной-двух итераций. Таким образом обеспечивается быстрая сходимость и высокая точность дискретизации аналитического шаблона.

Заключение

В настоящей работе предложен метод перевода аналитических формул для шаблонов форм гравитационных волн от сливающихся двойных систем черных дыр и нейтронных звезд из статьи [1] во временную область.

Формулы из [1] нельзя напрямую использовать при обработке наблюдений на установках типа LIGO в связи с тем, что детектирование гравитационных волн на практике требует перевода шаблонов из временной области в частотную с помощью метода быстрого преобразования Фурье.

Предложенный метод опирается на простой и вычислительно эффективный алгоритм нахождения зависимости параметра постньютоновского разложения от времени, который основан на итерационном применении метода Ньютона при дискретизации, согласованной со стандартным временным шагом детекторов.

Благодарности

Авторы благодарят Н. К. Порайко за полезные советы. С.И. Блинников благодарит M. Vagins и K. Nomoto за гостеприимство в Kavli IPMU.

Финансирование

Авторы благодарят Российский Научный Фонд за поддержку исследований поиска эффективных приближений для шаблонов форм гравитационных волн (проект РНФ 25-22-00293).

Список литературы

1. *Mishakina A.V., Blinnikov S.I.* Analytical approaches for rapid prediction of gravitational waveforms for relativistic binary systems // arXiv e-prints. — 2025. — October. — P. 17. — arXiv:2510.25523.

2. *Cokelaer T.* A template bank to search for gravitational waves from inspiralling compact binaries: II. Phenomenological model // Classical and Quantum Gravity. — 2007. — Nov. — V. 24, no. 24. — P. 6227. — URL: https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/24/006.

3. *Sakon S., Tsukada L., Fong H., Kennington J., Niu W., Hanna C., Adhicary S., Baral P., Baylor A., Cannon K., Caudill S., Cousins B., Creighton J.D.E., Ewing B., George R.N., Godwin P., Harada R., Huang Y.J., Huxford R., Joshi P., Kuwahara S., Li A.K.Y., Magee R., Meacher D., Messick C., Morisaki S., Mukherjee D., Pace A., Posnansky C., Ray A., Sachdev S., Singh D., Tapia R., Tsutsui T., Ueno K., Viets A., Wade L., Wade M., Wang J.* Template bank for compact binary mergers in the fourth observing run of Advanced LIGO, Advanced Virgo, and KAGRA // Phys. Rev. D. — 2024. — Feb. — V. 109. — P. 044066. — URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.044066.

4. *Owen B.J.* Search templates for gravitational waves from inspiraling binaries: Choice of template spacing // Physical Review D. — 1996. — jun. — V. 53, no. 12. — P. 6749–6761. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6749.

5. *Ajith P., Fotopoulos N., Privitera S., Neunzert A., Mazumder N., Weinstein A.* Effectual template bank for the detection of gravitational waves from inspiralling compact binaries with generic spins // Phys. Rev. D. — 2014. — apr. — V. 89, no. 8. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.084041.

6. *Allen B.* Optimal template banks // Physical Review D. — 2021. — August. — V. 104, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.042005.

7. *Coogan A., Edwards T.D., Chia H.S., George R.N., Freese K., Messick C., Setzer C.N., Weniger C., Zimmerman A.* Efficient gravitational wave template bank generation with differentiable waveforms // Physical Review D. — 2022. — dec. — V. 106, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.106.122001.

8. *Wadekar D., Venumadhav T., Mehta A.K., Roulet J., Olsen S., Mushkin J., Zackay B., Zaldarriaga M.* New approach to template banks of gravitational waves with higher harmonics: Reducing matched-filtering cost by over an order of magnitude // Physical Review D. — 2024. — oct. — V. 110, no. 8.

9. *Sharma A., Roy S., Sengupta A.S.* Template bank to search for exotic gravitational wave signals from astrophysical compact binaries // Physical Review D. — 2024. — jun. — V. 109, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.109.124049.

10. *Viets A.D., Wade M., Urban A.L., Kandhasamy S., Betzwieser J., Brown D.A., Burguet-Castell J., Cahillane C., Goetz E., Izumi K., Karki S., Kissel J.S., Mendell G., Savage R.L., Siemens X., Tuyenbayev D., Weinstein A.J.* Reconstructing the calibrated strain signal in the Advanced LIGO detectors // Classical and Quantum Gravity. — 2018. — Apr. — V. 35, no. 9. — P. 095015. — URL: http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aab658.

11. *Huerta E., Kumar P., Agarwal B., George D., Schive H.Y., Pfeiffer H.P., Haas R., Ren W., Chu T., Boyle M., Hemberger D.A., Kidder L.E., Scheel M.A., Szilagyi B.* Complete waveform model for compact binaries on eccentric orbits // Physical Review D. — 2017. — jan. — V. 95, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.024038.