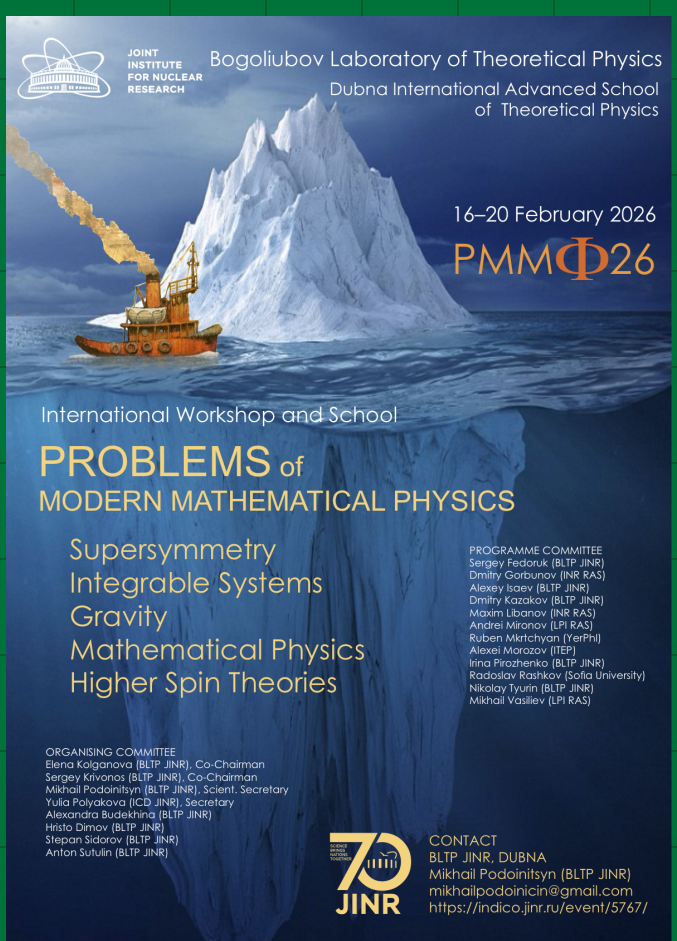
Владимир Рубцов (ИППИ РАН & LAREMA UMR 6093, CNRS, Angers)

2-значные группы, уравнение Шази и квазимодулярные формы

(ongoing project with Виктор Бухштабер и Михаил Корнев - МИАН).



16 февраля 2026 года, ОИЯИ, Дубна

О чем это сообщение и почему это современная

Математическая Физика

- двузначные группы
- (квази) модулярные формы
- уравнение Дарбу - Альфана
- дуальность Гаусса. Машина
- мультипликативные ядра
- Редукция SDYM (4d)
- Метрики Эйнштейна типа Бьянки IX
- 2D - топологические теории поля по Дубровину (WDVV и ассоциативность)
- Функция Челена
- С интегралом фейнмана и Релятивистская кинематика

Двузначные группы

Двузначная группа- это множество X с двузначным законом умножения $* : X \times X \to \mathrm{Sym}^2(X)$, "единичным"элементом $e \in X$, и обратным $x \to x^{-1}$ со следующими свойствами:

- Ассоциативность: для любых трех $x, y, z \in X$ совпадают четырехэлементные множества

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

- Строгая единица: x выполняеется

$$e * x = x * e = [x, x].$$

- Существование обратного: для всех $x \in X$, каждое из множеств $x * x^{-1}$ и $x^{-1} * x$ содержит e.

Двузначные группы и многочлены: "toy example

Рассмотрим $(\mathbb{C},+)$ и автоморфизм порядка 2 $z \to \epsilon z$, т.е. $\epsilon^2 = 1$. Структура 2−значной группы на $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$: Закон умножения для $x, y \in \mathbb{C}$ задается формулой

$$x * y = [(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2, (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2].$$

"Единицей"e служит 0 и обратный для z есть сам z. Используем отображение

$$\mathcal{S} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{S}(z_1, z_2) = (\sigma_1(z_1, z_2), \sigma_2(z_1, z_2)),$$

получаем многочлен $\mathcal{F}(x, y, z)$: :

$$\mathcal{F}(x,y,z) = z^2 - 2(x+y)z + (x-y)^2 = \tag{2}$$

$$(z+x+y)^2 - 4(xy+yz+zx) = \tag{3}$$

$$\Delta_t[(t^2 + (z+x+y)t + (xy+yz+yz)]. \tag{4}$$

2−значное уможение задается корнями этого полинома $\mathcal{F} = 0$:

$$\mathcal{F}(z;x,y) = (z-((x)^{-1}*(y)^{-1})_1)(z-((x)^{-1}*(y)^{-1})_2) = (z-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2)(z-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2),$$

$$(x)^{-1} * (y)^{-1} = x * y = [(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2, (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2].$$

(2), (3), (4) ≃ функции λ Челлена ≃ полиному Бухштабера с параметрами (0, 0, 0) :

$$\lambda(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy\cdot 2yz-2zx$$

Two-valued formal group laws

Let R be a commutative ring with unit. ($R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, or the polynomial rings over $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). The equation $w = \Phi(u, v)$ where $\Phi(u, v)$ is a formal series, defines a classical formal group law over the ring R.
This means that:

- $\Phi(u, 0) = u$;
- $\Phi(u, \Phi(v, w)) = \Phi(\Phi(u, v), w)$.

Buchstaber family of polynomials-1

Consider the two-valued formal group with multiplication defined by the relation

$$B(x, y, z) := z^2 - \Theta_1(x, y)z + \Theta_2(x, y) = 0,$$

where

$$\Theta_1(x, y) = Z_+ + Z_-; \quad \Theta_2(x, y) = Z_+ Z_-,$$

with

$$Z_+ = \Phi(u, v)\Phi(\bar{u}, \bar{v}) = |\Phi(u, v)|^2; \quad Z_- = \Phi(\bar{u}, v)\Phi(u, \bar{v}) = |\Phi(\bar{u}, v|^2.$$

Such a two-valued group is called the "square modulus of the original formal group.

Оно задает закон умножения в двузначной группе, универсальной в классе двузначных формальных групп, получаемых конструкцией квадрата модуля формальных групп вида

$$F(u, v) = \frac{u^2\lambda_1(v) - v^2\lambda_1(u)}{u\lambda_2(v) - v\lambda_2(u)},$$

где $\lambda_1(u)$ и $\lambda_2(u)$ — формальные ряды над некоторой $\mathbb{Q}$-алгеброй A.

Buchstaber family of polynomials-2

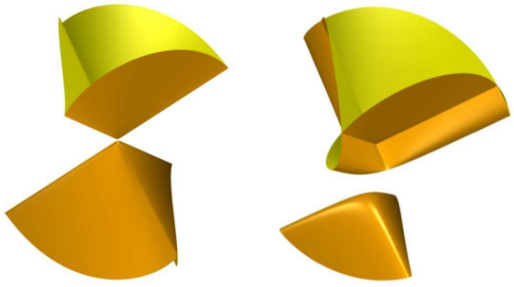
For the elementary formal group structure with $\Phi(u,v) = u + v$ connected with cohomology theory the two-valued group determined by

$$B_{0,0,0}(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0.$$

This was the very first example of a two-valued group of Buchstaber–Novikov (1971). In K-theory $\Phi(u,v) = u + v - quv$ and

$$B_{q^2,0,0}(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - q^2xyz = 0-$$

Cayley nodal cubic surface



$a = b = c = 0$ $a > 0, b = c = 0$

[Bessel conic] [Cayley nodal cubic]

Buchstaber family of polynomials-3

Buchstaber (1990) classified the two-valued algebraic groups coming from the square modulus construction for formal groups with the multiplication law suggested by the addition theorem for Baker–Akhiezer elliptic functions by a zero locus of the following discriminant family depending on 3 parameters (a_1, a_2, a_3) :

$$B_{a_1,a_2,a_3}(x,y,z) := (x + y + z - a_2xyz)^2 - 4(1 + a_3xyz)(xy + yz + zx + a_1xyz).$$

The parameters are expressed via the standard Weierstrass elliptic parameters g_2, g_3 and a point α on the corresponding elliptic curve $\mathcal{E}$ $v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3$ by

$$a_1 = 3\wp(\alpha), a_2 = 3\wp(\alpha)^2 - g_2/4, a_3 = 1/4(4\wp(\alpha)^3 - g_2\wp(\alpha) - g_3).$$

Buchstaber - Veselov theorem

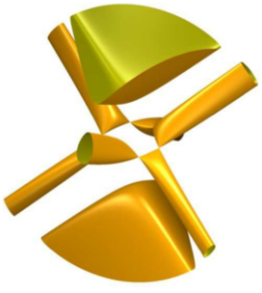
Theorem (Buchstaber - Veselov , 2019)
The discriminant locus multiplication law $B_{a_1,a_2,a_3}(x,y,z)=0$ with the "elliptic parametrization"can be reduced to the addition law $X \pm Y \pm Z = 0$ via the change of variables:

$$x=\frac{1}{\wp(X)+\wp(\alpha)}, y=\frac{1}{\wp(Y)+\wp(\alpha)}, z=\frac{1}{\wp(Z)+\wp(\alpha)}.$$

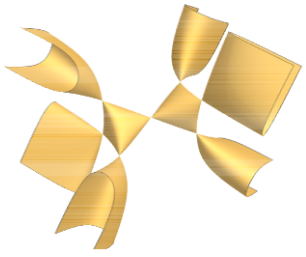
The proof is based on the addition formula of Burnside determinant (1873) (Weierstrasse $\wp-$ function addition):

$$P_{(0,\frac{-g_2}{4},\frac{-g_3}{4})}(x,y,z) := (xy+yz+zx+\frac{g_2}{4})^2 - 4(1-\frac{g_3}{4}xyz)(x+y+z)$$

Zero locus is a beautiful K3 quartic in $\mathbb{P}^3$ with six A_1 and three D_4 singularities...



[generic"K3]



[Kummer surface]

Определение 1. *Алгебраической n-значным моноидом* называется алгебраическое многообразие X с ассоциативным n-значным умножением, заданное рациональным морфизмом $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ с нейтральным элементом e, для которого

$$x * e = e * x = [x, x, ..., x] \quad \text{для каждого } x \in X.$$

Алгебраической n-значной группой X называется алгебраический n-значный моноид на X с регулярным морфизмом $\mathrm{inv} : X \to X$, таким, что для каждого $x \in X$ выполнены следующие условия:

$$e \in x * \mathrm{inv}(x), \quad e \in \mathrm{inv}(x) * x.$$

Источник нетривиальных примеров алгебраических n-значных моноидов и групп дает косетная конструкция группы точек кубических кривых относительно (см. [BK25a]).

В работе [BK25b] был введен следующий замечательный класс алгебраических n-значных групп на $\mathbb{C}$:

Определение 2. Симметрической n-алгебраической n-значной группой на $\mathbb{C}$ называется алгебраическая n-значная группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(P)$ с умножением

$$x * y = [z \mid P(z; x, y) = 0],$$

заданным симметрическим многочленом $P(z; x, y)$, в котором каждая переменная входит в степени не больше n, нейтральным элементом 0 и отображением обратного $\mathrm{inv}(x) = x$.

Каждый симметрический многочлен степени не больше 2 по каждой переменной x, y и z, удовлетворяющий условиям (2)–(5), принадлежит семейству многочленов

$$P_2(z; x, y) = e_1^2 - 4e_2 + k_2 e_3 + k_8 e_3^2 + k_4 e_1 e_3 + k_6 e_2 e_3, \tag{23}$$

где переменные k_2, k_4, k_6 и k_8 обозначают (комплексные) параметры.

Как было показано в работах [BV19, Theorem 6.3], [BK25b, Theorem 1] многочлен $P_2(z; x, y)$ задает на $\mathbb{C}$ структуру симметрической 2-алгебраической двузначной группы с нейтральным элементом 0 и отображением обратного $\mathrm{inv}(x) = x$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$4k_8 = k_4^2 - k_6 k_2. \tag{24}$$

Тем самым, равенство (24) равносильно условию ассоциативности

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

умножения

$$x * y = [z \mid P_2(z; x, y) = 0].$$

Семейство многочленов (23) с кольцом коэффициентов

$$R_0 := \mathbb{Z}[k_2, k_4, k_6, k_8]/(4k_8 - k_4^2 + k_6 k_2)$$

является универсальным (инициальным) в классе всех многочленов, задающих структуру симметрической 2-алгебраической двузначной группы на $\mathbb{Z}[1/2]$-модуле [Buc75, Buc06].

Универсальность многочлена $P_2(x)$ означает, что

если Q — любой другой многочлен, задающий на $\mathbb{C}$ структуру симметрической 2-алгебраической двузначной группы с кольцом коэффициентов R', то существует единственный гомоморфизм $r : R \to R'$, такой, что $Q = r(P_2)$, где $r(P_2)$ обозначает действие гомоморфизма r на коэффициентах многочлена P_2.

Таким образом, многочлен

$$P_2(z; x, y) = e_1^2 - 4e_2 + k_2 e_3 + \frac{k_4^2 - k_6 k_2}{4} e_3^2 + k_4 e_1 e_3 + k_6 e_2 e_3, \tag{25}$$

с независимыми комплексными параметрами k_2, k_4 и k_6 является универсальным в классе всех многочленов, задающих структуры симметрических 2-алгебраических двузначных групп.

Предложение 4 [BGR24], [BK25a]**.** Универсальная симметрическая 2-алгебраическая двузначная группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(P_2)$ получается косетной конструкцией из группы точек кривой (16) относительно инволюции $(x, y) \mapsto (x, -y)$. В терминах параметров a_1, a_2 и a_3 кривой $\mathcal{E}$ соответствующий двузначный закон умножения переписывается в виде *многочлена Бухштабера*

$$B_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = (x + y + z - a_2 xyz)^2 - 4(1 + a_3 xyz)(xy + yz + xz + a_1 xyz). \tag{26}$$

Напоминание о квазимодулярных формах и эллиптических кривых

Пусть $\mathfrak{H}$ — верхняя полуплоскость комплексного переменного, $\tau = u+iv \in \mathfrak{H}$, $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ – подгруппа в специальной линейной группе матриц второго порядка над целыми числами. Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathfrak{H}$ преобразованиями Мебиуса:

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Для каждого отображения $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ и целого веса k определен слеш-оператор

$$(f|_k\gamma)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau).$$

Напомним, что *голоморфной модулярной формой веса k на* Γ называется голоморфная функция $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$, такая, что выполнены следующие два условия:

(i) (Закон модулярного преобразования) $f|_k\gamma = f$ для каждого $\gamma \in \Gamma$.

(ii) (Условие голоморфности в каспах) $f(u + iv) = O(e^{Cv})$ при $y \to \infty$ и $f(u_iv) = O(e^{C/y})$ при $y \to 0$ для некоторого $C > 0$. Будем далее обозначать класс функций, удовлетворяющих данному условию, через $\mathrm{Hol}_0(\mathfrak{H})$.

Важным примером модулярной формы является ряд Эйзенштейна, определяемый для каждого k формулой

$$E_k(z) = \sum_{\Gamma_1/\Gamma_\infty} 1|_k\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ \gcd(c,d)=1}} \frac{1}{(cz + d)^k}.$$

Почти голоморфной модулярной формой веса k и глубины не больше p на Γ называется вещественно-аналитическая функция $F : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$, такая, что $F|_k\gamma = F$ для каждого $\gamma \in \Gamma$, F представляется в виде многочлена от $1/v$ с голоморфными коэффициентами, т.е.

$$F(\tau) = \sum_{r=0}^{p} f_r(\tau)\, v^{-r} \tag{11}$$

для некоторого $p \geq 0$, где каждая функция $f_r(\tau)$ голоморфна на $\mathfrak{H}$ и принадлежит классу $\mathrm{Hol}_0(\mathfrak{H})$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq p}$ пространство таких форм для данного Γ. Далее, пусть

$$\widehat{\mathcal{M}}_* = \bigoplus_k \widehat{\mathcal{M}}_k, \quad \widehat{\mathcal{M}}_k = \bigcup_p \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq p}$$

— градуированное и фильтрованное кольцо всех почти голоморфных модулярных форм.

Пусть (11) — почти голоморфная модулярная форма. Тогда *квазимодулярной формой веса k и глубины не больше p* называется функция $f_0(\tau)$. Эквивалентно, так называется функция f из класса $\mathrm{Hol}_0(\mathfrak{H})$, такая, что при фиксированном $z \in \mathfrak{H}$ и переменном $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ функция $(f|_k\gamma)(z)$ — многочлен степени не больше p относительно переменной $c/(cz+d)$. Введем обозначение:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_* = \bigoplus_k \widetilde{\mathcal{M}}_k, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_k = \bigcup_p \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq p},$$

где $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq p}$ обозначает пространство квазимодулярных форм веса k и глубины не больше p на Γ.

Как хорошо известно, алгебры $\widehat{\mathcal{M}}_*$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_*$ изоморфны.

Предложение 1 [BGHZ08]**.** Пусть Γ — некомпактная дискретная подгруппа группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и φ — любая квазимодулярная форма веса 2, которая не является модулярной (например, $\varphi = E_2$). Обозначим через $(-)' =: \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz} = q\frac{d}{dq}$ производную Эйлера. Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) Алгебра модулярных форм $\mathcal{M}_*$ изоморфна алгебре многочленов $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.

(ii) Алгебра почти голоморфных модулярных форм $\widehat{\mathcal{M}}_*$ изоморфна $\mathbb{C}[E_2^*, E_4, E_6]$.

(iii) Градуированная алгебра квазимодулярных форм $\widetilde{\mathcal{M}}_*$ изоморфна $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.

(iv) Пространство квазимодулярных форм на Γ замкнуто относительно дифференцирования: $D(\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq p}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq p+1}$ для любых $k, p \geq 0$. Имеют место тождества Рамануджана:

$$E_2' = \frac{E_2^2 - E_4}{12}, \quad E_4' = \frac{E_2E_4 - E_6}{3}, \quad E_6' = \frac{E_2E_6 - E_4^2}{2}. \tag{12}$$

(v) Каждая квазимодулярная форма на Γ является многочленом относительно φ с модулярными коэффициентами: $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq p}(\Gamma) = \bigoplus_{r=0}^{p} \mathcal{M}_{k-2r}(\Gamma)\varphi^r$ для любых $p, kgeq0$.

(vi) Каждая квазимодулярная форма на Γ записывается единственным образом как линейная комбинация φ и производных модулярных форм: для любых $p, k \geq 0$ имеется равенство

$$\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq p}(\Gamma) = \begin{cases} \bigoplus_{r=0}^{p} D^r(\mathcal{M}_{k-2r}(\Gamma)) & \text{если } p < k/2, \\ \bigoplus_{r=0}^{k/2-1} D^r(\mathcal{M}_{k-2r}(\Gamma)) \oplus \mathbb{C}\cdot D^{k/2-1}\varphi, & \text{если } p \geq k/2 \end{cases}$$

Каждая эллиптическая кривая над $\mathbb{C}$ изоморфна кривой (форма Вейерштрасса):

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \tag{13}$$

где через

$$g_2(\tau) = \frac{4\pi^4}{3}E_4(\tau), \quad g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{27}E_6(\tau)$$

обозначены классические инварианты Вейерштрасса, заданные относительно решетки $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ для некоторого $\tau \in \mathfrak{H}$.

"Тождества" Рамануджана $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ система ODE

z – "комплексное время"

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\frac{dE_2}{dz} = \frac{E_2^2 - E_4}{12}; \\ \frac{1}{2\pi i}\frac{dE_4}{dz} = \frac{E_2 E_4 - E_6}{3}; \\ \frac{1}{2\pi i}\frac{dE_6}{dz} = \frac{E_2 E_6 - E_4^2}{2}. \end{cases}$$

Система Рамануджана.

Рассмотрим динамическую систему в фазовом пространстве с координатами k_2, k_4 и k_6:

$$k_2' = \frac{\lambda}{2} k_4, \quad k_4' = \frac{3\lambda}{4} k_6, \quad k_6' = \frac{\lambda}{4}(k_2 k_6 - k_4^2) = \lambda k_8, \tag{36}$$

где λ — ненулевая константа и, напомним, $(-)' = 1/(2\pi i) d/d\tau$.

Теорема 1. Пусть

$$B_\tau(z; x, y) = e_1^2 - 4e_2 + k_2(\tau) e_3 + \frac{k_4^2(\tau) - k_6(\tau) k_2(\tau)}{4} e_3^2 + k_4(\tau) e_1 e_3 + k_6(\tau) e_2 e_3,$$

— однопарамерическое семейство многочленов Бухштабера с переменными k_2, k_4, k_6, удовлетворяющими динамической системе (36) при $\lambda = -1/\pi^2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Существует однопараметрическое семейство $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(B_\tau)$ двузначных симметрических 2-алгебраических групп, которое содержит представителей всех классов изоморфизмов симметрических 2-алгебраических двузначных групп, отвечающих косетным конструкциям эллиптических кривых

$$y^2 = x^3 - k_2/4\, x^2 - k_4/2\, x - k_6/4 \tag{37}$$

(дискриминант $\delta_{\boldsymbol{k}}$ многочлена в правой части отличен от нуля).

(ii) При этом условие ассоциативности $4k_8 = k_4^2 - k_6 k_2$ универсальной симметрической 2-алгебраической двузначной группы (см. (23)) в семействе $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(B_\tau)$ равносильно уравнению Шази

$$y''' = y y'' - \frac{3}{2} y'^2, \tag{38}$$

где $y = y(\tau) = -\lambda k_2/4$ и $(-)' = 1/(2\pi i) d/d\tau$.

(iii) Случай нодальной кубики соответствует постоянному семейству $k_2 \equiv 1, k_4 \equiv k_6 \equiv 0$, а случай каспидальной кубики — семейству $k_2 = k_4 = k_6 = 0$.

Двузначные группы и Мебиусовы орбиты решений уравнений Шази

Пространство решений Sol уравнения Шази (42) допускает естественное действие группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. При этом действии каждое решение $y \in \mathrm{Sol}$ переходит в решение

$$(y\|_2 g)(\tau) := \frac{1}{(cz+d)^2} y\,(g\tau) - \frac{6c}{c\tau+d}, \tag{41}$$

где, как обычно запись $g\tau$ означает дробь $(a\tau+b)/(c\tau+d)$.

Хотя следующее предложение было известно уже Шази [Cha11], нам не удалось найти явного замкнутого доказательства в литературе. По этой причине приведем его.

Теорема 2. Пространство Sol решений уравнения Шази (38) разбивается на три орбиты

$$\mathrm{Sol} = G(E_2) \sqcup G(0) \sqcup G(1)$$

относительно действия группы $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ для ряда Эйзенштейна $y_0 = E_2$, нулевого решения $y_1 = 0$ и единичного решения $y_2 = 1$.

Теорема 3. Любое однопараметрическое семейство $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(B_\tau)$ двузначных симметрических 2-алгебраических групп получается из одного из трех семейств Теоремы 2 сдвигом на элемент группы $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ в смысле действия (42). Таким образом, классы G-эквивалентности однопараметрических семейств $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(B_\tau)$ взаимно однозначно соответствуют G-орбитам $G(E_2)$, $G(0)$, $G(1)$ решений $y = E_2$, $y = 0$ и $y = 1$ уравнения Шази (38).

Система Рамануджана и связность Гаусса–Манина

Соотношения Рамануджана имеют геометрическую интерпретацию. Рассмотрим семейство $\mathcal{E} \to \mathsf{T}$ эллиптических кривых

$$\mathcal{E}: \qquad zy^2 - 4(x - t_1 z)^3 + t_2 z^2 (x - t_1 z) + t_3 z^3 = 0 \qquad \subset \mathbb{P}^2 \times \mathsf{T}, \tag{50}$$

параметризованное аффинным многообразием $\mathsf{T} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, \Delta^{-1}]$, где $\Delta = 27t_3^2 - t_2^{32}$, вместе с фиксированной парой (α, ω) базисов когомологий де Рама $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}/\mathsf{T})$:

$$\alpha = \left[\frac{\mathrm{d}x}{y}\right], \qquad \omega = \left[\frac{x\,\mathrm{d}x}{y}\right], \tag{51}$$

Пусть $\mathcal{H} := H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}/\mathsf{T})$ и

$$\nabla : \mathcal{H} \longrightarrow \Omega^1_{\mathsf{T}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathsf{T}}} \mathcal{H}$$

— связность Гаусса–Манина на семействе кривых $\pi : \mathcal{E} \to \mathsf{T}$.

Предложение 5 [Mov12, Proposition 6]**.** Рассмотрим 1-форму

$$\theta := 3t_3\,\mathrm{d}t_2 - 2t_2\,\mathrm{d}t_3 \in \Omega^1_{\mathsf{T}}.$$

Тогда в базисе (α, ω) связность Гаусса–Манина задается формулой

$$\nabla \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{52}$$

где

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_1\theta - \frac{1}{12}\mathrm{d}\Delta & \frac{3}{2}\theta \\ \Delta\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{6}t_1\mathrm{d}\Delta - \left(\frac{3}{2}t_1^2 + \frac{1}{8}t_2\right)\theta & \frac{3}{2}t_1\theta + \frac{1}{12}\mathrm{d}\Delta \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Определение 3. *Векторным полем Рамануджана* на базе T семейства $\pi : \mathcal{E} \to \mathsf{T}$ эллиптических кривых называется векторное поле v, удовлетворяющее следующим условиям горизонтальности:

$$\nabla_{\mathsf{v}}\alpha = -\omega, \qquad \nabla_{\mathsf{v}}\omega = 0. \tag{54}$$

Предложение 6 [Mov12, Proposition 7]**.** Векторное поле Рамануджана $\mathsf{v} = F_1\frac{\partial}{\partial t_1} + F_2\frac{\partial}{\partial t_2} + F_3\frac{\partial}{\partial t_3}$ на базе T семейства $\pi : \mathcal{E} \to \mathsf{T}$ эллиптических кривых существует и единственно. Имеют место формулы:

$$F_1 = t_1^2 - \frac{1}{12}t_2, \qquad F_2 = 4t_1t_2 - 6t_3, \qquad F_3 = 6t_1t_3 - \frac{1}{3}t_2^2. \tag{55}$$

Определим кривую

$$\Phi(\tau) \;:=\; \Big(\frac{1}{12}E_2(\tau),\;\frac{1}{12}E_4(\tau),\;\frac{1}{216}E_6(\tau)\Big). \tag{61}$$

на базе T.

Предложение 7. Система дифференциальных уравнений (12) на ряды Эйзенштейна эквивалентна условию, при котором Φ является интегральной кривой поля v, т.е.

$$\mathcal{D}\,\Phi(\tau) = \mathsf{v}_{\Phi(\tau)},$$

где $\mathcal{D} = 1/(2\pi i)d/d\tau$.

Доказательство. Обозначим компоненты $\Phi(\tau)$ через $t_1(\tau)$, $t_2(\tau)$ и $t_3(\tau)$. Используя (12) и (61), вычисляем

$$\mathcal{D}t_1 = \frac{1}{12}\,\mathcal{D}E_2 = \frac{1}{144}(E_2^2 - E_4) = t_1^2 - \frac{1}{12}t_2,$$

и аналогично $\mathcal{D}t_2 = 4t_1t_2 - 6t_3$ и $\mathcal{D}t_3 = 6t_1t_3 - \frac{1}{3}t_2^2$. Это в точности координатные выражения (55), следовательно, $\mathcal{D}\Phi = \mathsf{v}_{\Phi(\tau)}$.

Обратно, если Φ является интегральной кривой v, то три равенства $\mathcal{D}t_i = F_i(t_1,t_2,t_3)$ вместе с (61) эквивалентны (12) после подстановок $E_2 := 12t_1$, $E_4 := 12t_2$, $E_6 := 216t_3$. $\square$

Два слова о системе Дарбу - Аврага

Метрика Эйнштейна типа Бианки IX:

$$g = \omega_1\omega_2\omega_3 (dt)^2 + \frac{\omega_2\omega_3}{\omega_1}\sigma_1^2 + \frac{\omega_3\omega_1}{\omega_2}\sigma_2^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_3}\sigma_3^2$$

$\omega_i = \omega_i(t)$, σ_i - инвариантные 1-формы

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \sigma_3$$
$$d\sigma_2 = \sigma_3 \wedge \sigma_1$$
$$d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

$$g = (xyz)^2 (dt)^2 + x^2\sigma_1^2 + y^2\sigma_2^2 + z^2\sigma_3^2$$

первый интеграл полных полевых уравнений $R_{ij} = \frac{\Lambda}{4} g_{ij}$

Λ - постоянная скалярная кривизна

$$4\left(\frac{x'y'}{xy} + \frac{y'z'}{yz} + \frac{z'x'}{zx}\right) + 4\Lambda (xyz)^2 = \lambda(x', y', z')$$

Римм-плоский кэлеров случай дает (K. Tod) систему Дарбу-Аффака:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2\omega_3 - \omega_1(\omega_2+\omega_3) \\ \omega_2 = \omega_3\omega_1 - \omega_2(\omega_3+\omega_1) \\ \omega_3 = \omega_1\omega_2 - \omega_3(\omega_1+\omega_2) \end{cases}$$

Свойства системы:

1° Система алгебраически конечно-кратна! (нет полиномиальных инвариантов

2° Закон преобразования решений

$$\gamma(\omega_i(t)) = \frac{1}{(ct+d)^2}\,\omega_i\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) + \frac{c}{ct+d}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$$

3° $y := -2(\omega_1+\omega_2+\omega_3) \Rightarrow$

$$y''' = 2y'y'' - 3(y')^2$$

Уравнение Чази

◁ (Л. Тахтаджян):

"модулярный детерминант" имеет полюс "τ-функции":

$$y = \pi i E_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\Delta.$$

— ∥ —

Возможная связь с фробениусовыми структурами

Рассмотрим фробениусово многообразие M, $\dim M = 3$ с координатами t_1, t_2, t_3 и препотенциалом

$$F(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 - \frac{(t_2)^4}{16}\Phi(t_3)$$

WDVV (уравнение ассоциативности) эквивалентно уравнению Шази для Φ:

$$\Phi''' = 6\Phi\Phi'' - 9(\Phi')^2$$

где $\Phi(t_3)$ и $(\cdot)' = \frac{d}{dt_3}$

Спасибо за время
и за внимание !!!