Редукция гомологий Хованова-Рожанского для бипартитных узлов

arXiv:2511.08244

Степанов Радомир Тимурович

Московский физико-технический институт (НИУ)

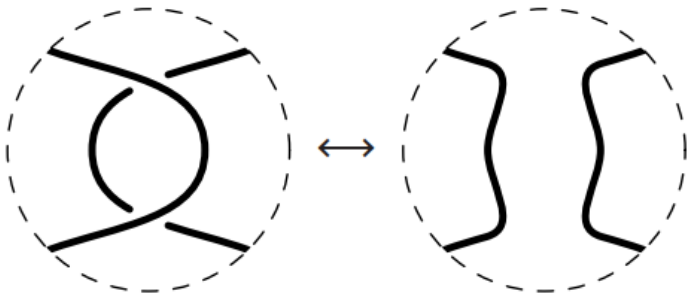
17 февраля 2026

Введение

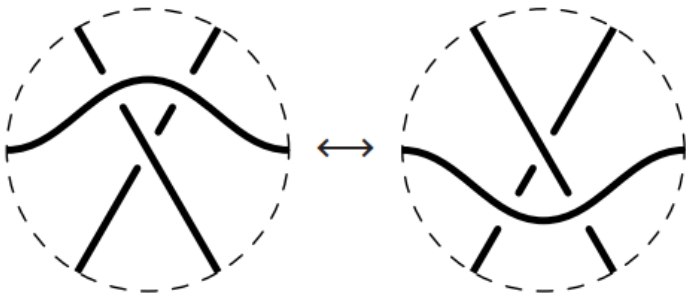
- Узел - вложение окружности в трехмерное пространство, рассматриваемое с точностью до изотопии.
- Как же различить два узла:
  Теорема Рейдемейстера: Два узла изотопны тогда и только тогда, когда существует последовательность движений Рейдемейстера, переводящая один узел в другой:



(1)



(2)



(3)

Введение II

- **Инвариант узлов** - функция $I : \mathcal{K} \to \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ может быть числами, полиномами или группами, причем

$$\boxed{I(\mathcal{K}) \neq I(\mathcal{K}') \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{K} \neq \mathcal{K}'} \tag{1}$$

- Простейшими примерами инвариантов узлов являются: **минимальное число пересечений, раскраска узла, полином Джонса, и.т.д**

Введение III

С физической точки зрения, полином ХОМФЛИ является наблюдаемой в теории Черна-Саймонса, а его категорификация — гомологии Хованова-Рожанского — соответствует пространству состояний БПС в теории топологических струн. Теория узлов в трехмерной теории Черна-Саймонса представляет собой пример точного непертурбативного вычисления в квантовой теории поля.

Полином ХОМФЛИ

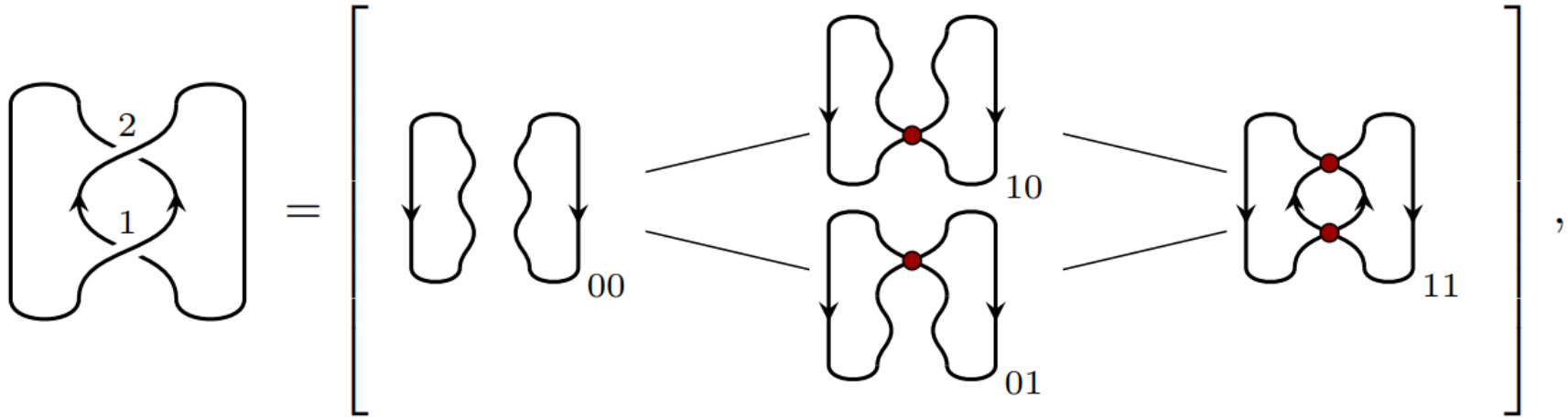
- **Полином ХОМФЛИ** - $H : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}[q, q^{-1}, q^N, q^{-N}]$ - инвариант узла, ассоцированный с алгеброй $su(N)$.
- Этот полином можно посчитать, заменяя каждый перекресток узла двумя разрешениями, с соответствующими весами:



- Красные вершины называются MOY-вершинами, а разрешения узла - MOY-графами.

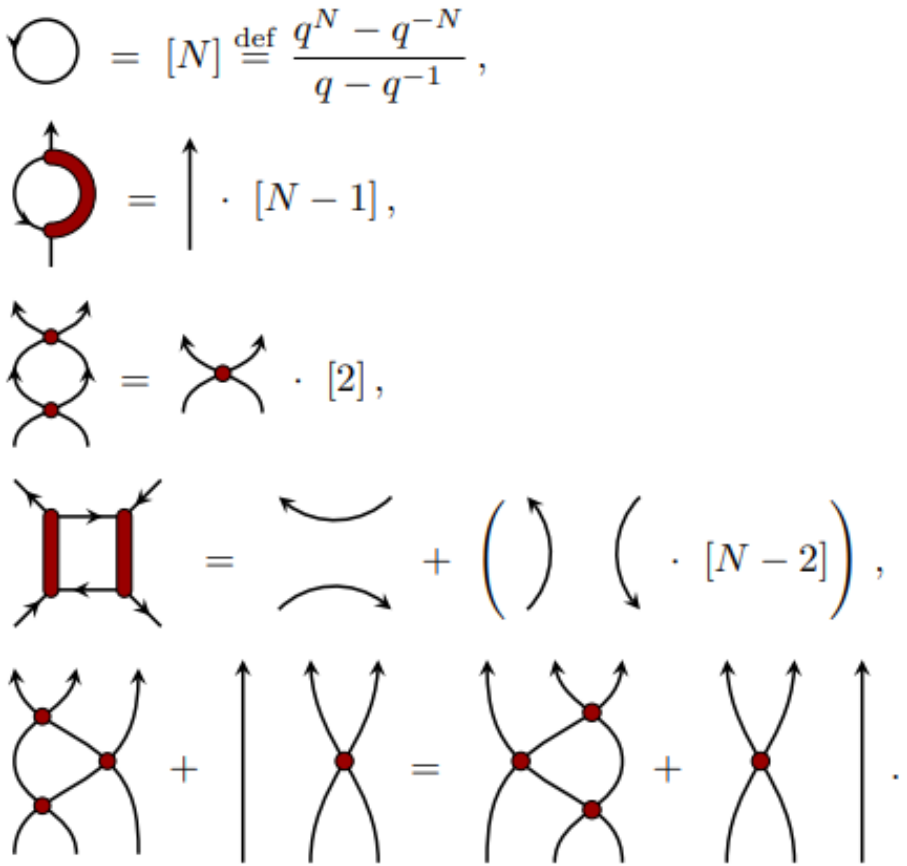
Гиперкуб разрешений

- Узел с n перекрестками имеет 2^n различных разрешений, которые можно организовать в гиперкуб (n-мерный куб) , чьи вершины являются MOY-графами, домноженные на соответствующие веса.
- **Зацепление Хопфа:**



MOY-соотношения

Чтобы получить полином ХОМФЛИ, каждому MOY-графу нужно сопоставить значения, определяемые MOY-соотношениями.

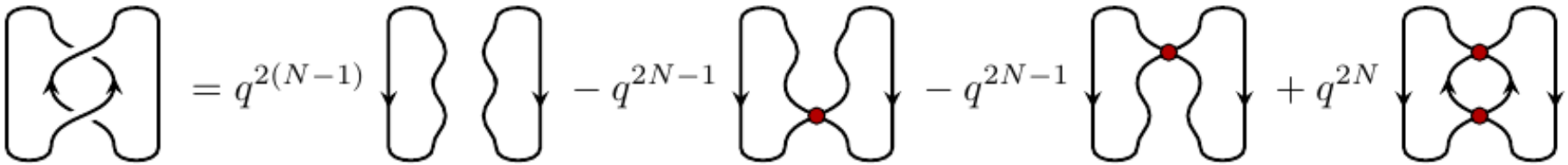


Полином ХОМФЛИ II

Тогда, полином ХОМФЛИ можно посчитать по следующей формуле:

$$H(\mathcal{K}) = \sum_{r}^{2^n} (-1)^{\alpha(r)} H(r) \tag{2}$$

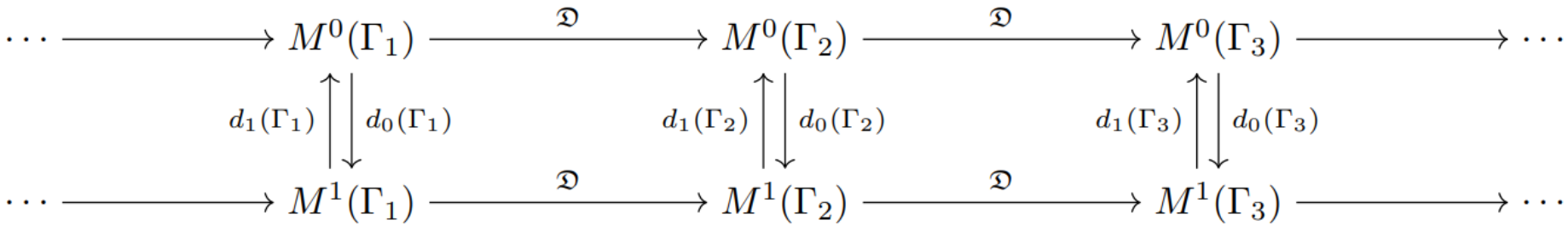
где $\alpha(r)$ - число MOY-вершин в разрешении r, а $H(r)$ - значение графа, определяемого с помощью MOY-соотношений (домноженное на вес).



$$H^{\text{Hopf}} = q^{2(N-1)} \cdot [N]^2 \quad - \quad 2q^{2N-1} \cdot [N][N-1] \quad + \quad q^{2N}[2][N][N-1]$$

Гомологии Хованова-Рожанского

Теория Хованова-Рожанского является категорификацией полинома ХОМФЛИ. По разрешениям узла строится некоторый бикомплекс:



где Γ_i - MOY-графы.
Причем эйлерова характеристика этого комплекса будет равняться полиному ХОМФЛИ.

Вертикальный комплекс

- Каждому (замкнутому) MOY-графу Γ_i мы сопоставляем комплекс:
$$M^0 \xrightarrow{d_0} M^1 \xrightarrow{d_1} M^0 \tag{3}$$
- M^i - некоторые модули над кольцом многочленов $\mathbb{Q}[x_1, ..., x_m]$, а d_i - операторы, устроенные как домножения на какие-то полиномы.
- Его гомологии обозначим $\mathcal{H}(\Gamma_i)$

Горизонтальный комплекс

Индуцируя горизонтальные дифференциалы $\mathfrak{D}$ на соответствующие гомологии MOY-графов $\mathcal{H}(\Gamma_i)$, получаем комплекс:

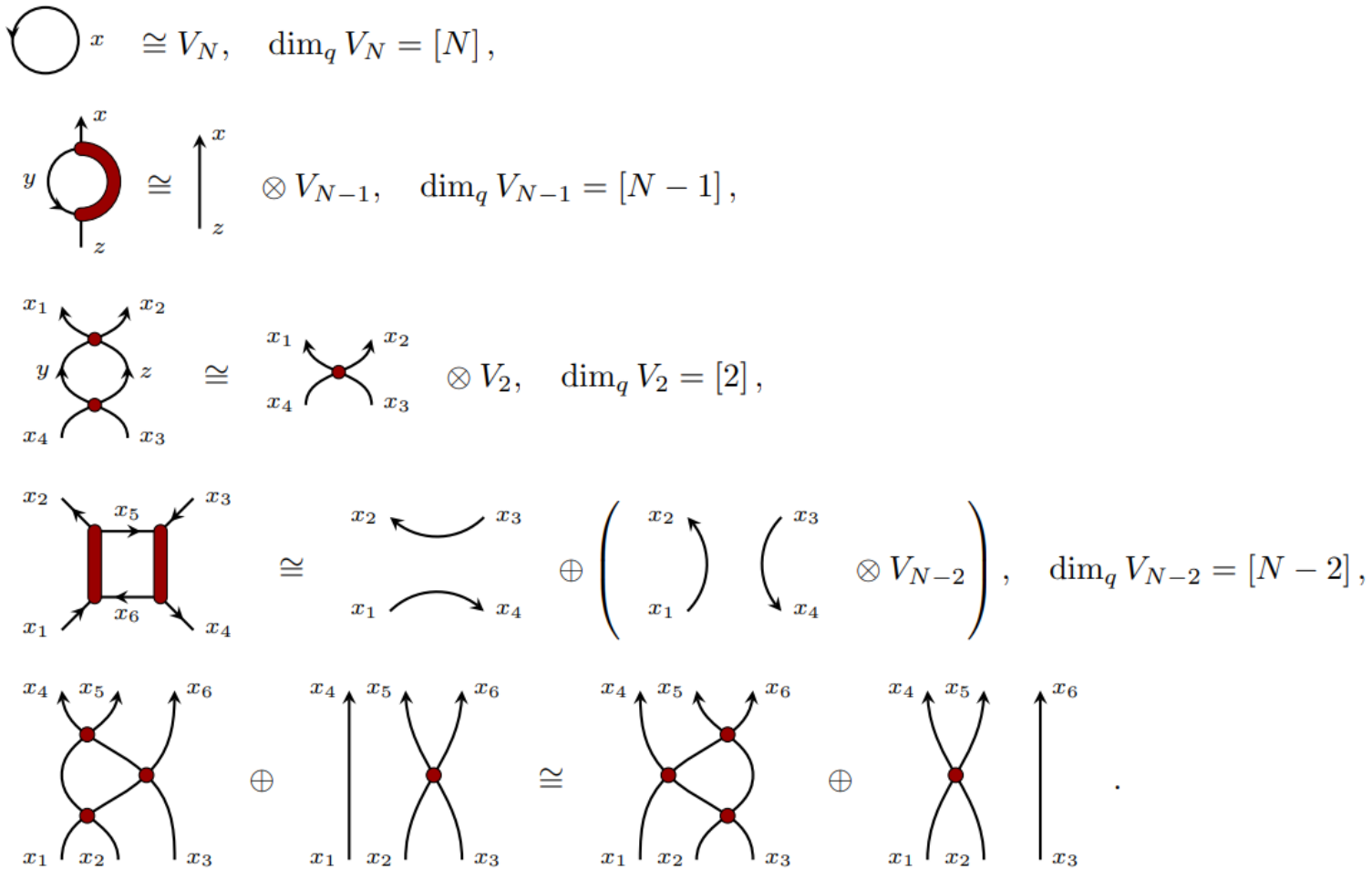
$$... \to \mathcal{H}(\Gamma_i) \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathcal{H}(\Gamma_{i+1}) \to ... \tag{4}$$

Итоговые гомологии $\mathcal{H}^*(\mathcal{K})$ есть гомологии Хованова-Рожанского. Полином Хованова-Рожанского - полином Пуанкаре этого комплекса:

$$KhR[t, q, q^N](\mathcal{K}) = \sum t^i \cdot dim_q \mathcal{H}_i^* \tag{5}$$

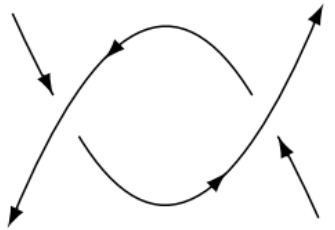
MOY-соотношения

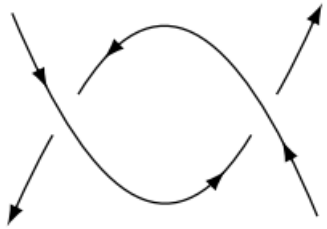
Чтобы посчитать когомологии $\mathcal{H}(\Gamma_i)$, можно использовать категорифицированные MOY-соотношения:



Бипартитная редукция

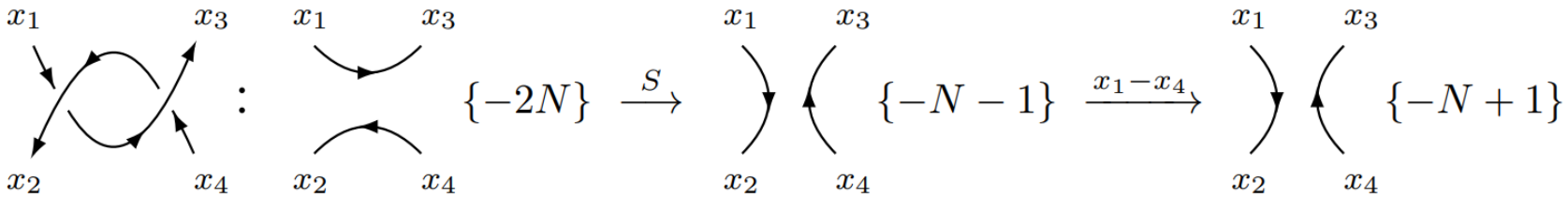
Бипартитный узел - узел, составленный из блоков вида:





Бипартитная редукция II

В работе **arXiv:0801.4018.** была предложена следующая редукция комплекса Хованова-Рожанского:



Если в бипартитном узле $2n$ перекрестков, то эта редукция делает из гиперкуба с 2^{2n} вершинами, гиперкуб из 3^n вершин, а также упрощаются вертикальные и горизонтальные морфизмы.

Бипартитная редукция III

В нашей работе мы переходим к новой технике вычисления на замкнутых циклах полиномов Хованова-Рожанского.
Мы избавляемся от вертикального комплекса и переходим к тензорному произведению N-мерных градуированных векторных пространств на грассмановых переменных.

$$\boxed{\bigcirc \to V_N = \langle \vartheta_1, ..., \vartheta_N \rangle} \tag{6}$$

$$\boxed{\{\vartheta_i, \vartheta_j\} = 0 \quad deg_q \vartheta_j = N + 1 - 2j} \tag{7}$$

Бипартитная редукция IV

Между этими пространствами действуют **три универсальных морфизма**:

$$m : \bigcirc\bigcirc \to \bigcirc$$

$$\Delta : \bigcirc \to \bigcirc\bigcirc$$

$$Sh : \bigcirc\bigcirc \to \bigcirc\,\bigcirc \quad Sh : \bigcirc \to \bigcirc \tag{8}$$

Бипартитная редукция VI

Явный вид этих операторов:

$$m = \sum_{1\le i,j\le N;\quad i+j\le N+1} \vartheta_{i+j-1}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i^{(1)}\partial\vartheta_j^{(2)}} :\ V_N^{(1)}\otimes V_N^{(2)}\to V_N \tag{9}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=0}^{N-i}\vartheta_{N-j}^{(1)}\vartheta_{i+j}^{(2)})\frac{\partial}{\partial\vartheta_i} :\ V_N\to V_N^{(1)}\otimes V_N^{(2)} \tag{10}$$

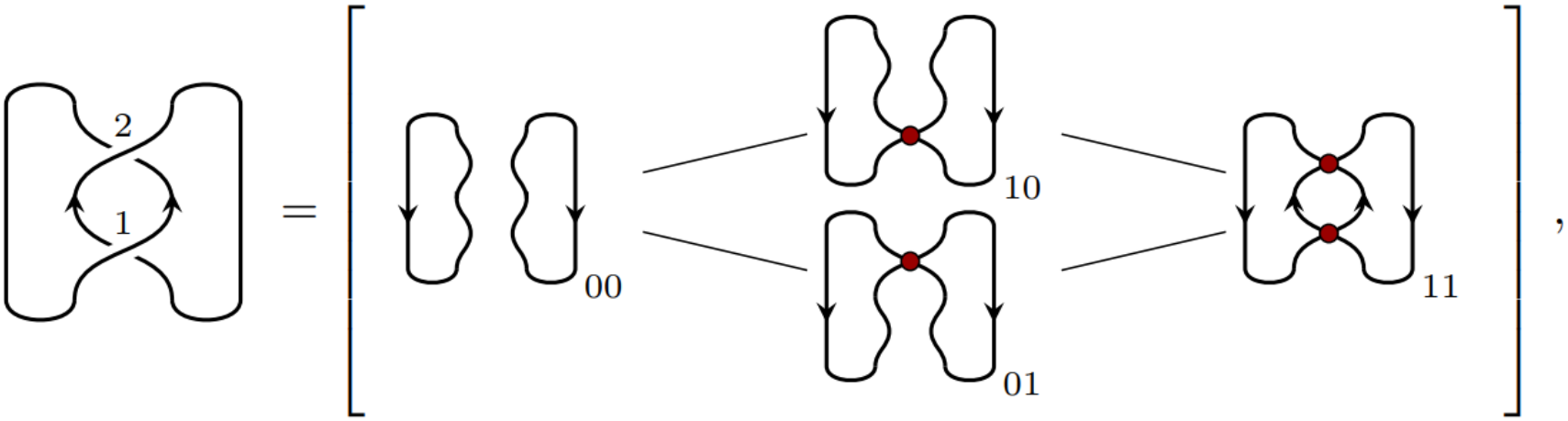
$$\mathrm{Sh} = \sum_{i,j=1}^{N-1}(\vartheta_{i+1}^{(3)}\vartheta_j^{(4)} - \vartheta_i^{(3)}\bar\vartheta_{j+1}^{(4)})\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i^{(1)}\partial\vartheta_j^{(2)}} + \tag{11}$$

$$+\sum_{i=0}^{N-1}\vartheta_{i+1}^{(3)}\vartheta_N^{(4)}\frac{\partial^2}{\vartheta_i^{(1)}\vartheta_N^{(2)}} + \sum_{j=0}^{N-1}\vartheta_N^{(3)}\vartheta_{j+1}^{(4)}\frac{\partial^2}{\vartheta_N^{(1)}\vartheta_j^{(2)}} :\ V_N^{(1)}\otimes V_N^{(2)}\to V_N^{(3)}\otimes V_N^{(4)}$$

$$\mathrm{Sh} = 0 :\ V_N\to V_N\,. \tag{12}$$

Пример

Так, например, для зацепления Хопфа:



,

вместо бикомплекса Хованова-Рожанского мы имеем упрощенный комплекс на векторных пространствах:

$$\varnothing \to \bigcirc\bigcirc_{[-2]}\{-2N\} \xrightarrow{m} \bigcirc_{[-1]}\{-N-1\} \xrightarrow{0} \bigcirc_{[0]}\{-N+1\} \to \varnothing \quad (13)$$

Спасибо за внимание!