Mathematical aspects of the decomposition of diagonal $\mathbf{U}(N)$ operators

PMMP'26

Fedin Matvei Morozov Andrei

17 февраля 2026 г.

MIPT and IITP RAS

JINR

Outline

1. Introduction

2. Main problem

3. Solution

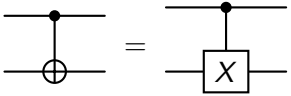
4. Structure of Solution

5. Symmetries of Solution

6. Conclusion

Introduction

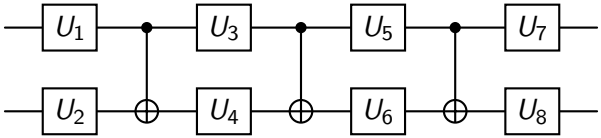
General Overview

1.  - произвольный однокубитный $SU(2)$ оператор
2.  - двукубитный $SU(4)$ оператор CNOT с матрицей

$U_{CNOT} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$, где $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Квантовая схема представляет из себя графическое изображение матричного и тензорного произведения: операторы сверху вниз перемножаются тензорно, а слева направо матрично. Количество CNOT в схеме, как правило, минимизируют.

2-Qubit Example

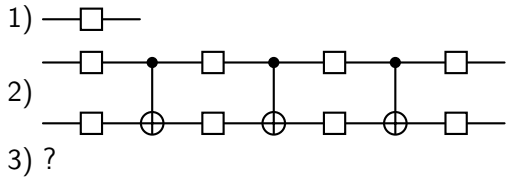


$=$

$$(U_1 \otimes U_2) \cdot U_{CNOT} \cdot (U_3 \otimes U_4) \cdot U_{CNOT} \cdot (U_5 \otimes U_6) \cdot U_{CNOT} \cdot (U_7 \otimes U_8)$$

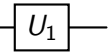
Main problem

Global problem

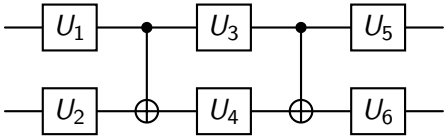


Глобальная проблема квантовых вычислений заключается в разложении произвольного унитарного оператора на матричное и тензорное произведение унитарных операторов меньшего размера. Для однокубитного случая есть очевидный анзац, двукубинтый случай был разобран в статье [G. Vidal and C. M. Dawson, 2008], а случай трёх и более кубит не имеет общего анзаца.

Local problem

1) 

Эквивалентно U_1

2) 

Эквивалентно

$(U_1 \otimes U_2) \cdot U_{CNOT} \cdot (U_3 \otimes U_4) \cdot U_{CNOT} \cdot (U_5 \otimes U_6)$

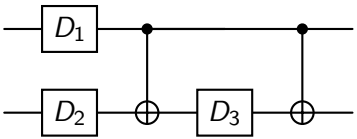
3) ?

Мы изучили более простой случай - диагональный. Общий случай не имеет смысла [M. A. Nielsen and I. L. Chuang, 2010].

Для общего случая любого количества кубит с рассмотрениями всех возможных симметрий результат будет описан далее.

Solution

Exact Solution for $n = 1$ and $n = 2$

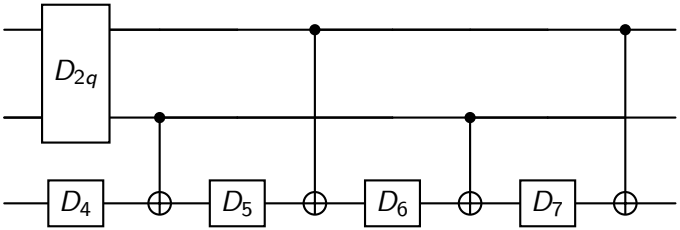


Если случай для $n = 1$ очевиден, то случай для $n = 2$ можно подобрать исходя из анзаца, определяемого теоремой [G. Vidal and C. M. Dawson, 2008]. Используя обозначение для диагональной матрицы как $D_1(\varphi) = \exp(i \cdot \mathrm{diag}(\varphi, -\varphi))$ можно написать схему, приведённую слева.

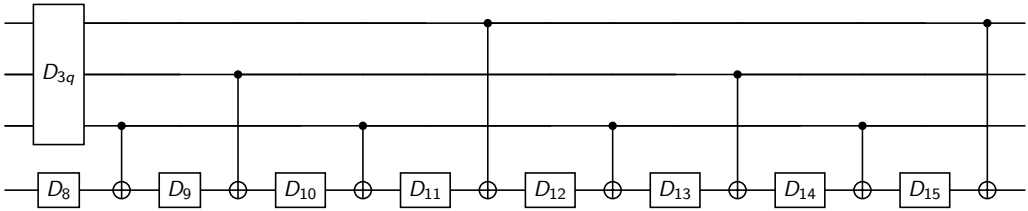
$$(D_1(\varphi_1) \otimes D_1(\varphi_2)) \cdot U_{CNOT} \cdot (I \otimes D_1(\varphi_3)) \cdot U_{CNOT} =$$

$$= \exp(i \cdot \mathrm{diag}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3, -\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3, -\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)) =$$

$$= \exp(i \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3))$$



Случай $n = 3$ не имеет анзаца общего решения, но мы используя численные методы подобрали следующий вариант. Под D_{2q} мы подразумеваем диагональный двукубитный оператор.



В общем случае мы получаем структуру, которая выглядит как бинарное дерево. Первые $n-1$ кубитов в n кубитной схеме будем называть КОНТРОЛИРУЮЩИМ БЛОКОМ. Так же отметим что каждый кубит в управляющем блоки управляет четным количеством CNOT.

Theorem (About recurrent decomposition)

It is always possible to decompose diagonal D_{nq} matrix using recurrent formula:

$$D_{nq}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n}) = \left(D_{(n-1)q}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{2^{n-1}}) \otimes I\right) \cdot U_{tail} =$$

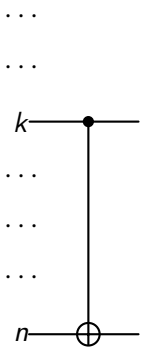
$$= \left(D_{(n-1)q}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{2^{n-1}}) \otimes I\right) \cdot \prod_{i=1}^{2^{n-1}} \left(\left(I_{2^{n-1}} \otimes D_{1q}(\beta_i, -\beta_i)\right) \cdot U_{CNOT}(A_n(i))\right) \tag{1}$$

With linear bijection between parameters:

$$\mathcal{L} : (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{2^{n-1}}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2^{n-1}}) \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n}) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} : (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{2^{n-1}}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2^{n-1}}) \leftarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n}) \tag{3}$$

CNOT generalisation



Для обобщения полученных результатов проще выделить как на самом деле выглядит оператор CNOT с контролирующим кубитом k и контролируемым кубитом последним. Тогда взяв $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$U_{CNOT}(k) = I^{\otimes(k-1)} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I^{\otimes(n-k)} + I^{\otimes(k-1)} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes I^{\otimes(n-k-1)} \otimes X \quad (4)$$

Some properties of D

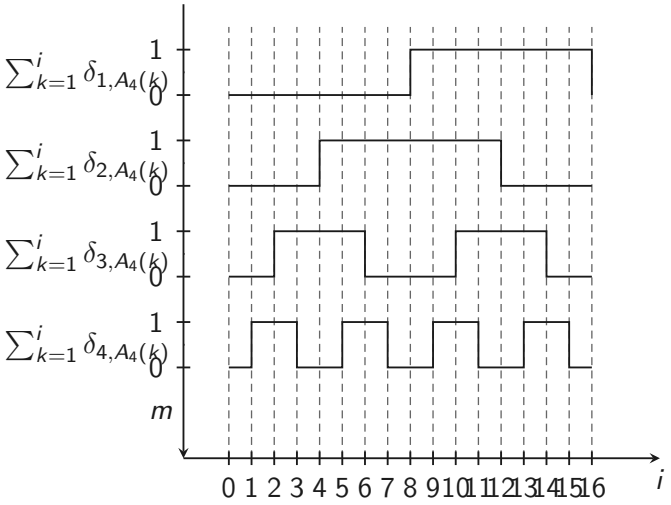
$$D_1(\varphi_1)D_1(\varphi_2) = D_1(\varphi_1 + \varphi_2) \quad XD_1(\varphi)X = D_1(-\varphi) \tag{5}$$

Таким образом для того чтобы получить в итоге диагональную матрицу, мы должны использовать четное количество операторов X в каждом подпространстве. Значит для каждого k существует строго четное число вхождения операторов $U_{CNOT}(k)$ в формулу.

$$U_{tail} = \text{diag}(D_{1q}(\gamma_1), D_{1q}(\gamma_2), \ldots, D_{1q}(\gamma_{2^{n-1}})) \tag{6}$$

$$\gamma_i = \beta_j r^j_{i,n} \tag{7}$$

U_{tail} Diagram



Влияние операторов X могут быть выражены как смена знака в угле. $j(\rho) = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-1-i}\rho_i$ где ρ это бинарный вектор состояния контролирующего блока кубитов.

Structure of Solution

$$\prod_{i=1}^{2^{n-1}} D_1(\beta_i) X^{\chi(A_n,\rho)_i} = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} D_1((-1)^{\sum_{k=1}^{i-1}\chi(A_n,\rho)_k}\beta_i) = D_1\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}}(-1)^{\sum_{k=1}^{i-1}\chi(A_n,\rho)_k}\beta_i\right) \tag{8}$$

$$D_1(\gamma_j) = D_1\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}}(-1)^{\sum_{k=1}^{i-1}\chi(A_n,\rho(j))_k}\beta_i\right) \Rightarrow \tag{9}$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(-1)^{\sum_{k=1}^{i-1}\chi(A_n,\rho(j))_k}\beta_i \Rightarrow \tag{10}$$

$$\gamma_j = r^i_{j,n}\beta_i, \quad r^i_{j,n} = (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1}\chi(A_n,\rho(j))_k} \tag{11}$$

Example r_n

$$r_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} r_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} r_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Theorem

$r_{n+1}^{-1} = \frac{1}{2^n} r_{n+1}^T$

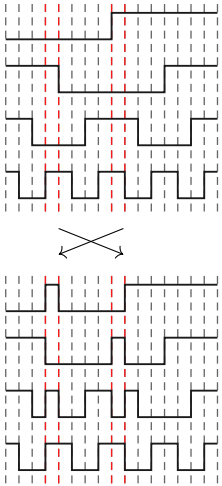
$$(r_2^n)^{-1} = (P_1 r_{n+1} P_2)^{-1} = P_2^{-1} r_{n+1}^{-1} P_1^{-1} = \frac{1}{2^n}(r_2^n)^T \rightarrow$$

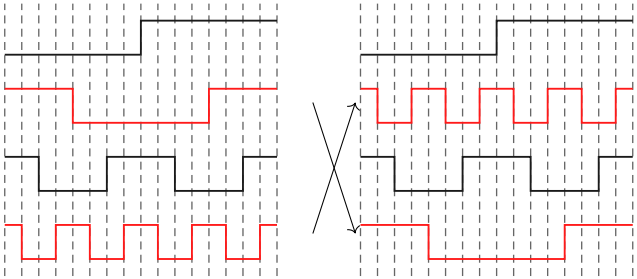
$$\rightarrow r_{n+1}^{-1} = \frac{1}{2^n} P_2 (r_2^n)^T P_1 = \xrightarrow{(P_1 r_{n+1} P_2)^T = P_2^T r_{n+1}^T P_1^T = (r_2^n)^T}$$

$$= \frac{1}{2^n} P_2 P_2^T r_{n+1}^T P_1^T P_1 = \xrightarrow{P_i P_i^T = I_{2^n}} = \frac{1}{2^n} r_{n+1}^T \quad (13)$$

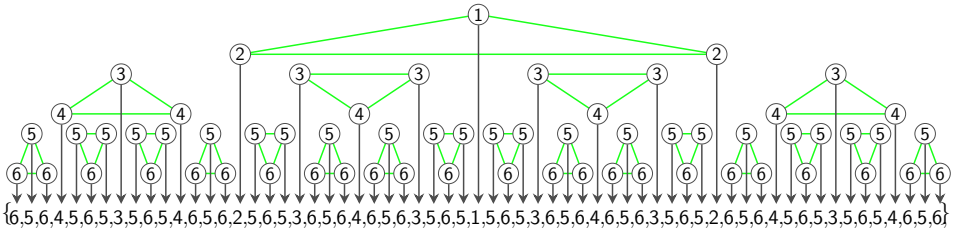
Symmetries of Solution

Base Idea





Constant number of $L(k)$



Пример дерева, порождающего оптимальную последовательность A_n.

Conclusion

Conclusion

1. We proved the decomposition of an arbitrary diagonal unitary matrix $\mathbf{U}(N)$.
2. We minimize number of involved operators.
3. We discussed about possible symmetries of our answer.

Thank You

Questions?