Лекция 1. Обзор современного состояния физики высоких энергий

В природе на данной момент известно 4 фундаментальных взаимодействия:

1) Гравитационное
2) Электромагнитное
3) Сильное
4) Слабое

Описание гравитации - закон Всемирного тяготения Ньютона

Для эл/м. взаимодействия его аналог - закон Кулона. Но исследование эл/м явлений показало, что их описание нужно осуществлять с помощью уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0 \qquad \operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\text{и} \Rightarrow \quad \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}; \quad \bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

Их можно переписать в виде

$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ и $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$, где

$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$j^\nu = (c\rho, \vec{j})$$

а индексы поднимаются и опускаются метрикой

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Поэтому симметрия ур-й Максвелла не просто $SO(3)$, а группа Лоренца $O(1,3)$. Более того, электродинамику можно сформулировать на лагранжевом языке. Если $\hbar = c = 1$,

$A_\mu \to \sqrt{4\pi} A_\mu$; $q \to \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$, то

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$ – даёт ур-я Максвелла как уравнения Лагранжа.

При этом помимо группа Лоренца есть ещё калибровочная симметрия

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha \iff \begin{cases} \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \\ \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} \end{cases}$$

образующая группу $u(1)$.

Формулируя релятивистски инвариантное взаимодействие с волновой функцией электрона, оказалось, что эл/д явления описываются

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

где $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ - дираковский спинор, а

γ^μ - 4×4 γ-матрицы Дирака

$$\begin{cases} \psi \to \exp(-ie\alpha(x)) \\ \bar{\psi} \to \exp(ie\alpha(x)) \\ A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

- локальная $U(1)$ калибровочная инвариантность данной теории.

Уравнение для $\bar{\psi}$ - ур-е Дирака

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad \text{где} \quad \partial_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ieA_\mu \psi$$

при низких энергиях предсказывает, что

магнитный момент электрона равен

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \cdot 2\vec{S} = \frac{g \cdot q}{2m}\vec{S}, \text{ где } g = 2, \quad q = -e$$

тогда как классическая теория предсказывает

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L} \quad (g = 1)$$

Также ур-е Дирака хорошо объясняет тонкую структуру уровней атома водорода.

Но есть и необъяснимое на классическом уровне явления, например,

1) Аномальный магнитный момент электрона (мюона и т.д.):

$$\frac{ge}{2} = 1{,}00115965\ldots \neq 1.$$

2) Лэмбовский сдвиг между уровнями

$2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ ($2S_{1/2}$ выше)

$\omega \simeq 1057{,}8$ МГц $(2S_{1/2} \to 2P_{1/2})$

3) Спонтанное излучение

и т.д.

Эти эффекты можно объяснить в рамках квантовой теории поля, получаемой с помощью вторичного квантования.

Предсказания КТП для g_e с огромной точностью согласуются с экспериментом и $\Rightarrow$ природа описывается квантовой теорией поля.

Но помимо эл/м. взаимодействия есть ещё сильное и слабое взаимодействия.

Сильное удерживают кварки в протонах и нейтронах

$p =$ 

$n =$ 

а слабое, например, отвечают за распад свободного нейтрона: $n \longrightarrow p + \bar{e} + \tilde{\nu}_e$

$(\tau \simeq 878\,c)$

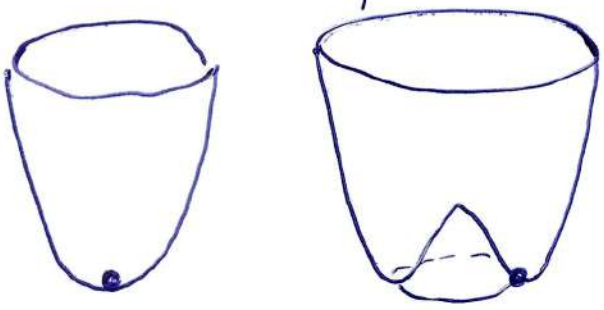
Оказалось, что эти взаимодействия описываются с помощью полей Янга-Миллса, которое строятся с помощью обобщения калибровочной симметрии.

$A_\mu = ieA^A_\mu t^A \in \mathcal{A}$ - алгебре Ли калибровочной группы G

$$F_{\mu\nu} = ieF^A_{\mu\nu} t^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

$$S' = \frac{1}{2e^2} \mathrm{tr} \int d^4x\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{взаимодействие с материей}$$

Исходно поле Янга-Миллса безмассовое, но массу им можно придать с помощью спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса).



Он основан на том, что скалярное поле приобретает вакуумное среднее не инвариантное относительно калибровочной группы.

Стандартная модель сильных и электрослабых взаимодействий основана на группе

$$\underbrace{SU(3)}_{\text{сильное}} \times \underbrace{SU(2) \times U(1)}_{\text{электрослабое}} \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}$$

Материя – 3 поколения кварков и лептонов + хиггсовское поле.

Массы возникают за счёт юкавского взаимодействия.

Слабое взаимодействие возникает при обмене Z и $W^{\pm}$ бозонами, которые при СНС приобретают массы $\sim 10^2$ ГэВ. Теория также предсказывает 1 электрически нейтральный хиггсовский бозон.

В СМ есть 3 калибровочные константы связи α_3, α_2 и α_1 аналогичные $\alpha = e^2/4\pi \simeq \simeq \frac{1}{137}$ для электродинамики (малый параметр, по которому производится разложение в ряд теории возмущений)

В квантовой теории поля они становятся медленно меняющимися функциями энергии.

В СМ есть много полей с различными квантовыми числами. Их анализ указывает на то, что СМ можно рассматривать как низкоэнергетический остаток от более симметричной теории, основанной, например, на группе $SU(5)$,

$$SU(5) \xrightarrow[10^{16}\,\text{ГэВ}]{} SU(3)\times SU(2)\times U(1) \xrightarrow[10^{2}\,\text{ГэВ}]{} SU(3)\times U(1)_{\text{эм}}.$$

Такие теории называются теориями Великого объединения (ТВО). В них имеется целый ряд очень интересных предсказаний:

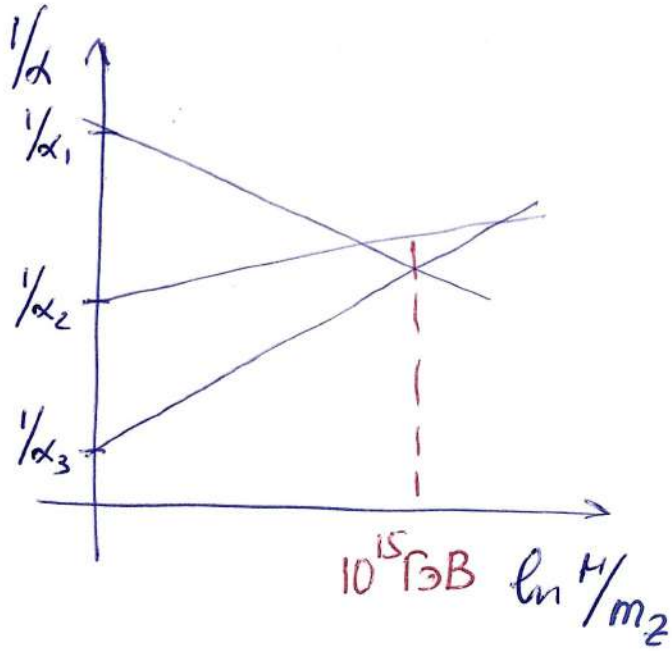
1) Объединение бегущих констант связи
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (и, в частности, $\sin^2\theta_W = 3/8$)
$\left(\alpha_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{e_1^2}{4\pi}\right)$

2) Объяснение ряда закономерностей кварковых чисел элементарных частиц.

3) Предсказание распада протона с
$\tau_p \sim 10^{34}$ лет (Возраст Вселенной $\sim 10^{10}$ лет)

4) Предсказание некоторых соотношений между массами элементарных частиц

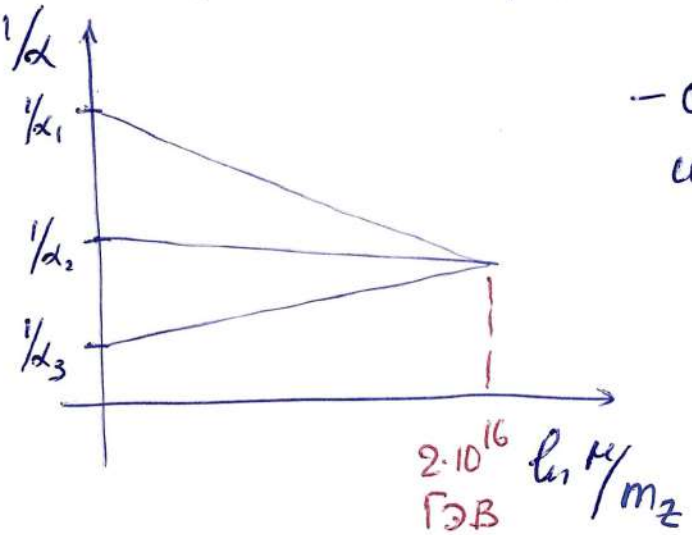
5) Возможность существования магнитных зарядов.



Как проверить:
- сравнение теоретических предсказаний с РГ-поведением констант связи
- не выполняется точно. Примерный масштаб $\sim 10^{15}$ ГэВ.

Проблема решается с помощью добавления в теорию суперсимметрии. Она перемешивает между собой бозонное и фермионное поля.

Тогда



– очень хорошее согласие с теорией

Кроме того, удаётся решить проблему иерархий – необходимость подстройки масс хиггсовского бозона из-за наличия квадратично расходящихся квантовых поправок.

Суперсимметричные теории предсказывают лёгкий хиггс $m_h \leqslant m_Z$. Но

$m_h \simeq 125{,}26$ ГэВ, $m_Z \simeq 91{,}1876$ ГэВ

Противоречие решается при учёте квантовых поправок. Но лёгкий хиггс – ещё одно свидетельство в пользу суперсимметрии.

Кроме того, в суперсимметричных теориях улучшается УФ поведение. Но при низких энергиях суперсимметрия должна быть нарушена.

Как оказалось, описание гравитационного взаимодействия очень отличается от всех остальных.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\,(R+2\Lambda), \quad G^{-1/2} \sim 10^{19}\ \text{ГэВ}$$

– гравитация связана со свойствами пространства времени.

Такое описание объясняет, например, смещение перигелия Меркурия, отклонение лучей света в гравитационном поле, гравит. красное смещение.

На квантовом уровне гравитация неперенормируема. Добавление суперсимметрии проблему не решает.

Попытка объединить гравитацию с другими взаимодействиями делается в рамках теорий (супер)струн. Струны живут в $D = 26$, а суперструны в $D = 10$, т.е. возникает вопрос о том, куда деть оставшиеся измерения.

На данный момент хорошее единое описание физики фундаментальных взаимодействий ещё не построено.

Лекция 2 Бозонный сектор Стандартной модели.

$G = SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{эм}$

поэтому в СМ имеется 3 калибровочных константы связи e_1, e_2, e_3 для сомножителей $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$ соответственно.

Симметрия спонтанно нарушается хиггсовским полем в фундаментальном представлении $SU(2)$, тривиальном $SU(3)$ и $Y = +1/2$.

$$\mathcal{L}_{\text{Бозе}} = -\frac{1}{4}\underset{U(1)}{F_{\mu\nu}^2} - \frac{1}{4}\underset{SU(2)}{(F_{\mu\nu}^A)^2} - \frac{1}{4}\underset{SU(3)}{(F_{\mu\nu}^A)^2} + \mathcal{D}_\mu\phi^+\mathcal{D}^\mu\phi - \lambda(\phi^+\phi - v^2)^2$$

$A = \overline{1,3}$ $A = \overline{1,8}$

где $\underset{U(1)}{F_{\mu\nu}} = \underset{U(1)}{\partial_\mu A_\nu} - \underset{U(1)}{\partial_\nu A_\mu}$

$$\underset{SU(2)}{F_{\mu\nu}} = \underset{SU(2)}{\partial_\mu A_\nu} - \underset{SU(2)}{\partial_\nu A_\mu} + \underset{SU(2)}{[A_\mu, A_\nu]} = ie_2 F_{\mu\nu}^A \frac{\sigma^A}{2}$$

$$\underset{SU(3)}{F_{\mu\nu}} = \underset{SU(3)}{\partial_\mu A_\nu} - \underset{SU(3)}{\partial_\nu A_\mu} + \underset{SU(3)}{[A_\mu, A_\nu]} = ie_3 \underset{SU(3)}{F_{\mu\nu}^A t^A}$$

Тогда $$-\frac{1}{4}\underset{SU(2)}{(F_{\mu\nu}^A)^2} = \frac{1}{2e_2^2}\underset{SU(2)}{\text{tr}(F_{\mu\nu}^2)}, \quad A = \overline{1,3}$$

$$-\frac{1}{4}\underset{SU(3)}{(F_{\mu\nu}^A)^2} = \frac{1}{2e_3^2}\underset{SU(3)}{\text{tr}(F_{\mu\nu}^2)}, \quad A = \overline{1,8}$$

Для $U(1)$ аналогичная форма записи получается после масштабирования

$$A_\mu \xrightarrow[U(1)]{} \frac{1}{e_1} A_\mu \quad , \text{т.г.} \quad -\frac{1}{4} \underset{U(1)}{F_{\mu\nu}^2} \longrightarrow -\frac{1}{4e_1^2} \underset{U(1)}{F_{\mu\nu}^2} ,$$

но такие обозначения менее удобны.

Что такое гиперзаряд Y?

Под действием группы $U(1)$

$$\begin{cases} \varphi \to \exp(i\alpha_1 e_1 Y)\varphi \\ \underset{U(1)}{A_\mu} \to \underset{U(1)}{A_\mu} - \partial_\mu \alpha_1 \end{cases}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ - параметр преобразований.

Тогда ковариантная производная принимает вид

$$D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi + i e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \varphi \longrightarrow \partial_\mu \left(e^{i e_1 \alpha_1 Y} \varphi \right) +$$

$$+ i e_1 Y \left(\underset{U(1)}{A_\mu} - \partial_\mu \alpha_1 \right) e^{i e_1 \alpha_1 Y} \varphi_1 = e^{i e_1 \alpha_1 Y} \left(\partial_\mu \varphi + \right.$$

$$\left. + i e_1 Y \underset{U(1)}{A_\mu} \varphi \right) = e^{i e_1 \alpha_1 Y} D_\mu \varphi$$

Поэтому для хиггсовского поля ковариантная производная принимает вид

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \underset{SU(2)}{A_\mu} \Phi + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \Phi =$$

$$= \partial_\mu \Phi + \frac{i e_2}{2} \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \Phi + \frac{i e_1}{2} \underset{U(1)}{A_\mu} \Phi$$

(Выбор $Y = 1/2$ сделан для удобства обозначений)

Вакуумное состояние стандартно выбирается в виде $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

При этом малой группой будет $U(1)_{em}$. Действительно, при калибровочных преобразованиях

$$\phi \to \omega_2 \exp\left(\frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right)\phi = \exp\left(\frac{i}{2} e_2 \alpha_2^A \sigma^A + \frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right)\phi$$

Преобразования малой группы удовлетворяют условию

$$0 = \delta\phi_0 = \left(\frac{i}{2} e_2 \alpha_2^A \sigma^A + \frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right)\phi_0 =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} (\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) e_2 v \\ (-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1) v \end{pmatrix}$$

Поэтому преобразования малой группы получаются при $\alpha_2^1 = 0$; $\alpha_2^2 = 0$; $-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 = 0$,

т.е. $\phi \to \exp\left\{\frac{i}{2} e_2 \alpha_2^3 \sigma^3 + \frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right\}\phi =$

$$= \exp\left\{ ie_1\alpha_1 \cdot \frac{1}{2}(1+\sigma_3)\right\}\phi = \exp\left\{ ie_1\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\phi \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{ ie\alpha_{em} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\phi$$

(связь e_1 и e будет получена далее)

Очевидно, что получившиеся преобразования образуют группу $U(1)_{em}$ с параметром $\alpha_{em}(x)$. Важно, что она не совпадает с $U(1)_Y$ в произведении $SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$.

Исследование спектра частиц удобно проводить в унитарной калибровке, где замусорятся поля, соответствующие голдстоуновским степеням свободы.

Если $\phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \vartheta + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$, то при калибровочных преобразованиях

$$\phi' = \phi + \delta\phi \simeq \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \vartheta + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} (\alpha_2^1 - i\alpha_2^2)e_2 \\ -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix}\vartheta$$

и выборами α_2^1, α_2^2 и $-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1$ можно зануллить φ_1, φ_2 и φ_4, тогда как φ_3 – нельзя. Поэтому в унитарной калибровке

$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

При этом под действием $U(1)_{em}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix} \to \exp\left\{ i e_{em} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix}$$

т.е. $\varphi \to \varphi$ и $\Rightarrow$ является электрически нейтральным.

Исследуем теперь спектр частиц полученной теории:

$$\partial_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \underbrace{\frac{i}{2} e_2 A_\mu^A \sigma^A}_{SU(2)} \Phi + \underbrace{\frac{i}{2} e_1 A_\mu}_{U(1)} \Phi \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} + \frac{i}{2} e_2 \begin{pmatrix} \underbrace{A_\mu^3}_{SU(2)} & \underbrace{A_\mu^1 - i A_\mu^2}_{SU(2)} \\ \underbrace{A_\mu^1 + i A_\mu^2}_{SU(2)} & \underbrace{-A_\mu^3}_{SU(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{i e_1}{2} A_\mu}_{U(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{2} e_2 v (A_\mu^1 - i A_\mu^2)}_{SU(2)} \\ \partial_\mu \varphi + \underbrace{\frac{i}{2} (-e_2 A_\mu^3}_{SU(2)} + \underbrace{e_1 A_\mu}_{U(1)}) v \end{pmatrix}$$

Поэтому в унитарной калибровке в квадратичном приближении (только квадратичные части)

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu}^2}_{U(1)} - \frac{1}{4} \underbrace{(F_{\mu\nu}^A)^2}_{SU(2)} - \frac{1}{4} \underbrace{(F_{\mu\nu}^A)^2}_{SU(3)} + (\partial_\mu \varphi)^2 - 4\lambda v^2 \varphi^2$$

$A = \overline{1,3}$ $\quad A = \overline{1,8}$

$$+ \frac{e_2^2 v^2}{4} \left[\underbrace{(A_\mu^1)^2}_{SU(2)} + \underbrace{(A_\mu^2)^2}_{SU(2)} \right] + \frac{1}{4} v^2 \left(-e_2 \underbrace{A_\mu^3}_{SU(2)} + e_1 \underbrace{A_\mu}_{U(1)} \right)^2,$$

где было учтено, что

$$\lambda\left(\phi^+\phi - v^2\right)^2 = \lambda\left(\left(\varphi+v\right)^2 - v^2\right)^2 \simeq \lambda\left(2\varphi v\right)^2 = 4v^2\lambda\varphi^2$$

Поэтому в теории будут 3 массивных векторных поля ($3 = \dim\left(SU(2)\times U(1)_Y\right) - \dim U(1)_{em}$) и одно безмассовое векторное поле (а также 8 безмассовых векторных полей $SU(3)$). Кроме того, будет одно массивное скалярное поле.

$$\underset{SU(2)}{A_\mu^{1,2}} \equiv W_\mu^{1,2} \sim m_W^2 = \frac{e_2^2 v^2}{2} \qquad \varphi \sim m_\varphi = 2\sqrt{\lambda}v$$

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\left(e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^3} - e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\right) \sim m_Z^2 = \frac{\left(e_1^2+e_2^2\right)v^2}{2}$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\left(e_2 \underset{U(1)}{A_\mu} + e_1 \underset{SU(2)}{A_\mu^3}\right) \sim m_A = 0$$

Введём обозначение

$e \equiv e_1\cos\theta_W \equiv e_2\sin\theta_W$, где θ_W – т.н. угол Вайнберга.

Тогда

$$\frac{e_2}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}} = \frac{e/\sin\theta_W}{\sqrt{e^2/\cos^2\theta_W + e^2/\sin^2\theta_W}} = \cos\theta_W$$

$$\frac{e_1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}} = \frac{e/\cos\theta_W}{\sqrt{e^2/\cos^2\theta_W + e^2/\sin^2\theta_W}} = \sin\theta_W$$

Тогда

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos\theta_W \underset{SU(2)}{A_\mu^3} - \sin\theta_W \underset{U(1)}{A_\mu} \\ A_\mu = \cos\theta_W \underset{U(1)}{A_\mu} + \sin\theta_W \underset{SU(2)}{A_\mu^3} \end{cases}$$

– видно, что это преобразование является ортогональным.

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} \underset{SU(2)}{A_\mu^3} = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \\ \underset{U(1)}{A_\mu} = -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \end{cases}$$

В результате функция Лагранжа для бозонного сектора Стандартной модели в квадратичном приближении запишется в виде

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2$$

$A = \overline{1,8}$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)^2 - \frac{1}{4}\underset{SU(3)}{(\partial_\mu A_\nu^A} - \underset{SU(3)}{\partial_\nu A_\mu^A})^2$$

$$-\frac{e_2^2 v^2}{4}\left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2\right] - \frac{(e_1^2+e_2^2)}{4} v^2 Z_\mu^2 +$$

$$+ (\partial_\mu \varphi)^2 - 4\lambda v^2 \varphi^2$$

Экспериментальные значения входящих в это выражение величин (2026):

$m_Z = 91,1880(20)$ ГэВ

$m_W = 80,3692(133)$ ГэВ

$m_\varphi = 125,20 \pm 0,11$ ГэВ

$\alpha_3(m_Z) = 0,1180(9)$

$\alpha_{em}^{-1}(m_Z) = 127,930 \pm 0,008 \quad (\overline{MS})$

$\sin^2\theta_W(m_Z) = 0,23129(4)$

На основе этих величин находим все остальное:

$$\alpha_3(m_Z) \simeq (8,475)^{-1}$$

$$\alpha_{10}(m_Z) \equiv \frac{e_1^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}(m_Z)}{\cos^2\theta_W} \simeq (98,36)^{-1}$$

$$\alpha_1(m_Z) \equiv \frac{5}{3}\alpha_{10}(m_Z) \simeq (59,02)^{-1}$$

$$\alpha_2(m_Z) \equiv \frac{e_2^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}(m_Z)}{\sin^2\theta_W} \simeq (29,57)^{-1}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}\,m_W}{e_2} = \frac{\sqrt{2}\,m_W}{\sqrt{4\pi\alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^{-1}}{2\pi}}\,m_W \simeq 174 \text{ ГэВ}$$

$$\lambda = m_\varphi^2/4v^2 \simeq 0,1289 \simeq (7,757)^{-1}$$

Лекция 3 Фермионный сектор Стандартной модели.

Фермионы Стандартной модели делятся на 3 поколения, в каждом из которых есть кварки и лептоны. Правые фермионы являются $SU(2)$ синглетами, а левые – $SU(2)$ дуплетами. Кварки лежат в фундаментальном представлении $SU(3)$, а лептоны – в тривиальном.

	I	II	III	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)_Y$	$U(1)_{em}$ (Q)
кварки	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	Фунд.	Фунд.	$+1/6$	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
	u_R	c_R	t_R	Фунд.	Трив.	$+2/3$	$+2/3$
	d_R	s_R	b_R	Фунд.	Трив.	$-1/3$	$-1/3$
лептоны	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	Трив.	Фунд.	$-1/2$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	Трив.	Трив.	0	0
	e_R	μ_R	τ_R	Трив.	Трив.	-1	-1

где $\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$; $\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$.

Далее поколения нумеруем индексом $I = \overline{1,3}$.

Будем по отдельности рассматривать лептонный и кварковый сектора.

Лагранжиан лептонного сектора имеет вид

$$\mathcal{L}_{лепт.} = i\overline{(\nu,e)_L^I}\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R^I\gamma^\mu D_\mu e_R^I -$$

$$- (Y_e)_{IJ}\,\overline{(\nu,e)_L^I}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}e_R^J - (Y_e^+)_{IJ}\,\bar{e}_R^I(\phi_1^*,\phi_2^*)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J$$

$\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} - 1 = 0 \qquad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

+ слагаемое, содержащее правое нейтрино,

где $\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$, а $\phi^+ = (\phi_1^*, \phi_2^*)$.

Этот лагранжиан $SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ инвариантен, поскольку по $SU(3)$ ничего не преобразуется,

по $SU(2)$ $\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L \to \omega_2\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L$; $e_R \to e_R$

$\phi \to \omega_2\phi$; $\phi^+ \to \phi^+\omega_2^{-1}$ $\quad \overline{(\nu,e)_L} \to \overline{(\nu,e)_L}\omega_2^{-1}$,

а по группе $U(1)$ сумма гиперзарядов в каждом слагаемом равна 0.

Заметим, что в $\mathcal{L}_{лепт.}$ ничего не зануляется по соображениям киральности. Действительно,

$$\overline{\psi_R} \equiv \overline{\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi} = \left(\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\right)^+\gamma^0 = \psi^+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^0$$

$$= \psi^+\gamma^0\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \overline{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = (\overline{\psi})_L$$

Аналогично доказывается, что $\overline{\psi_L} = (\overline{\psi})_R$.

Заметим, что имеется произвол в выборе полевых переменных:

$$\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I \to (A_e)_{IJ}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J; \quad e_R^I \to (B_e)_{IJ}(e_R)^J$$

где A_e и B_e – унитарные 3×3 матрицы.

При таких заменах юкавские константы меняются как $Y_e \to A_e^+ Y_e B_e$

Можно доказать, что если Y – невырожденная матрица, то преобразованием $Y \to A^{-1}YB$, где A и B унитарны, её можно сделать

1) диагональной
2) вещественной
3) положительно определённой.

Поэтому можно считать, что Y_e удовлетворяет этим свойствам.

Исследуем теперь низкоэнергетический предел лептонного лагранжиана (без ∂_R)

$$\mathcal{L}_{лепт.} = i\overline{(\partial,e)_L}\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R^I \gamma^\mu D_\mu e_R^I$$

$$- (Y_e)_{IJ}\overline{(\partial,e)_L^I}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} e_R^J - (Y_e^+)_{IJ}\bar{e}_R^I(\Phi_1^*,\Phi_2^*)\begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^J.$$

При этом ковариантное производное определяются квантовыми числами и записываются в виде

$$D_\mu \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L + \underbrace{\frac{ie_2}{2}A_\mu^A \sigma^A}_{SU(2)}\begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L - \underbrace{\frac{i}{2}A_\mu}_{U(1)}\begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L$$

$$D_\mu e_R = \partial_\mu e_R - \underbrace{ie_1 A_\mu}_{U(1)} e_R$$

В низкоэнергетическом пределе хиггсовское поле нужно заменить на его вакуумное среднее,

$\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\ \partial\end{pmatrix}$, а все массивное поле $(\varphi, W_\mu^{1,2}, Z_\mu)$ положить в 0

(Можно это сделать и для части фермионов)

Тогда

$$\underbrace{e_2 A_\mu^3}_{SU(2)} = e_2(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) \to e_2 \sin\theta_W A_\mu = eA_\mu$$

$$\underbrace{e_1 A_\mu}_{U(1)} = e_1(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu) \to e_1\cos\theta_W A_\mu = eA_\mu$$

$$(e \equiv e_1\cos\theta_W \equiv e_2 \sin\theta_W)$$

Тогда в низкоэнергетическом пределе

$$\mathcal{L}_{лепт} \Rightarrow i\overline{(\partial,e)}_L^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2} e A_\mu G_3 \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^I - \frac{i}{2} e A_\mu \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^I\right]$$

$$+ i\bar{e}_R^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu e_R^I - ieA_\mu e_R^I\right] - (Y_e)_{IJ} \overline{(\partial,e)}_L^I \begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix} e_R^J$$

$$- (Y_e^+)_{IJ} \bar{e}_R^I (0,\sigma) \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^J =$$

$$= \sum_{I=1}^{3} \left\{ i\overline{(\partial,e)}_L^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^I - ieA_\mu \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\partial\\ e\end{pmatrix}_L^I\right]\right.$$

$$\left. + i\bar{e}_R^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu e_R^I - ieA_\mu e_R^I\right] - (Y_e)_{II} \sigma \left(\bar{e}_L^I e_R^I + \bar{e}_R^I e_L^I\right)\right\}$$

Определим матрицу

$$(m_e)_{IJ} \equiv \sigma (Y_e)_{IJ} = \sigma \begin{pmatrix} Y_{e11} & 0 & \\ & Y_{e22} & \\ 0 & & Y_{e33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_e & 0 & \\ & m_\mu & \\ 0 & & m_\tau\end{pmatrix}$$

и ковариантное производное по отношению к низкоэнергетической группе $SU(3)\times U(1)_{em}$

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{em}_\mu e_L = \partial_\mu e_L - ieA_\mu e_L \\ \mathcal{D}^{em}_\mu e_R = \partial_\mu e_R - ieA_\mu e_R \end{cases}$$

(для нейтрино $\mathcal{D}^{em}_\mu \partial_L = \partial_\mu \partial_L$)

Тогда низкоэнергетический предел лептонной части лагранжиана Стандартной модели примет вид

$$\mathcal{L}_{лепт} = \sum_{I=1}^{3} \left\{ i\bar{\partial}_L^I \gamma^\mu \partial_\mu \partial_L^I + i\bar{e}^I \gamma^\mu \partial_\mu e^I - (m_e)_{II} \bar{e}^I e^I \right\} \quad (24)$$

где были учтены равенства

$$\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi + \bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = \bar{\psi}\psi$$

$$i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = i\bar{\psi}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu \partial_\mu \psi +$$

$$+ i\bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \partial_\mu \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi.$$

При этом $q(e_L) = q(e_R) = -e$; $q(\partial_L) = 0$.

Экспериментально

$m_e \simeq 0{,}511$ МэВ $\quad Y_{11} \simeq 2{,}930 \cdot 10^{-6}$

$m_\mu \simeq 105{,}66$ МэВ $\quad Y_{22} \simeq 6{,}058 \cdot 10^{-4}$

$m_\tau \simeq 1777$ МэВ $\quad Y_{33} \simeq 1{,}02 \cdot 10^{-2}$

– видна иерархическая структура юкавских констант.

Также важно заметить, что (без ∂_R) $\mathcal{L}_{лепт}$ инвариантен относительно глобальных преобразований $U(1) \times U(1) \times U(1)$

$$\begin{pmatrix} \partial \\ e \end{pmatrix}_L^I \to e^{i\beta_I} \begin{pmatrix} \partial \\ e \end{pmatrix}_L^I ; \quad e_R^I \to e^{i\beta_I} e_R^I ; \quad \phi \to \phi ,$$

приводящих к сохранению 3-х лептонных чисел. (При наличии ∂_R – одно – сохраняющееся нейтрино)

Лагранжиан кваркового сектора Стандартной модели имеет вид

$$\mathcal{L}_{кварк} = i\overline{(u,d)}_L^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i\bar{u}_R^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R^I$$

$$+ i\bar{d}_R^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R^I - (Y_d)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} d_R^J - (Y_d^+)_{IJ} \bar{d}_R^I \cdot$$

$$-1/6 \quad +1/2 \quad -1/3 = 0 \qquad 1/3$$

$$\cdot (\Phi_1^*, \Phi_2^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J - (Y_u)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J - (Y_u^+)_{IJ} \cdot$$

$$-1/2 + 1/6 = 0 \qquad -1/6 \quad -1/2 \quad +2/3 = 0$$

$$\cdot \bar{u}_R^I (\Phi_2, -\Phi_1) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J$$

$$-2/3 + 1/2 - 1/6 = 0$$

где ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{SU(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{SU(2)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{ie_1}{6} \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu u_R = \partial_\mu u_R + \underset{SU(3)}{A_\mu} u_R + \frac{2ie_1}{3} \underset{U(1)}{A_\mu} u_R$$

$$\mathcal{D}_\mu d_R = \partial_\mu d_R + \underset{SU(3)}{A_\mu} d_R - \frac{ie_1}{3} \underset{U(1)}{A_\mu} d_R$$

Данная часть лагранжиана СМ также инвариантна относительно локальных $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ преобразований, т.к.

$\begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix}$ по $SU(2)$ преобразуется также как $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$

Действительно,

$$\begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}^* = i\sigma_2\phi^* \longrightarrow i\sigma_2\omega_2^*\phi^*$$

$$= i\sigma_2\left(a_4\cdot 1_2 + i\vec{\sigma}\vec{a}\right)^*\phi^* = i\sigma_2\left(a_4 - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3\right)$$

$$\cdot\phi^* = \left(a_4 + i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 + i\sigma_3 a_3\right)\cdot i\sigma_2\phi = \omega\begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix}$$

Важно, что в кварковом секторе есть 2 комплексные матрицы $(Y_d)_{IJ}$ и $(Y_u)_{IJ}$.

При преобразованиях полей

$$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L^I \to A_{IJ}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L^J; \quad u_R^I \to (B_u)_{IJ}\,u_R^J$$

$$d_R^I \to (B_d)_{IJ}\,d_R^J$$

где $A^+A = 1_3$; $B_u^+B_u = 1_3$; $B_d^+B_d = 1_3$

эффективно

$$Y_u \to A^{-1}Y_u B_u; \quad Y_d \to A^{-1}Y_d B_d.$$

Но для диагонализации нужны 4 матрицы:

$$A_u^{-1}Y_u B_u = \frac{1}{v}\begin{pmatrix}m_u & 0 & \\ & m_c & \\ 0 & & m_t\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v}(m_u)_{IJ}$$

$$A_d^{-1}Y_d B_d = \frac{1}{v}\begin{pmatrix}m_d & 0 & \\ & m_s & \\ 0 & & m_b\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v}(m_d)_{IJ}$$

Если взять $A = A_u$ – диагонализуем Y_u,
если взять $A = A_d$ – диагонализуем Y_d.

Далее мы будем диагонализовать Y_u. Тогда $A = A_u$ и

$A_u^{-1} Y_d B_d = (A_u^{-1} A_d)(A_d^{-1} Y_d B_d)$ – уже не диагональна.

Определим $V \equiv A_u^{-1} A_d$ – т.н. матрицу Кабиббо-Кобаяши-Маскава.

(Очевидно, что она является унитарной)

тогда $(U \cdot A_u^{-1} Y_d B_d)_{IJ} = V \cdot (m_d)_{IJ}$.

Экспериментально

$m_u \simeq 2{,}16$ МэВ $\quad m_d \simeq 4{,}67$ МэВ

$m_c \simeq 1{,}27$ ГэВ $\quad m_s \simeq 93{,}4$ МэВ

$m_t \simeq 173$ ГэВ $\quad m_b \simeq 4{,}18$ ГэВ

– также видна иерархическая структура, следующая из иерархической структуры юкавских констант. Параметры матрицы V известны, она недиагональная и комплексная.

$\mathcal{L}_{кварк}$ также инвариантен относительно $U(1)$ преобразований $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \to e^{i\beta/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I$; $u_R^I \to e^{i\beta/3} u_R^I$; $d_R^I \to e^{i\beta/3} d_R^I$; $\phi \to \phi$ приводящих к сохранению барионного числа, что гарантирует стабильность протона.

Лекция 4 Состав полей ТВО, основанной на группе $SU(5)$

Наиболее простая (но не самая лучшая) теория Великого объединения основана на группе $SU(5)$, которая состоит из матриц 5×5 т.г.

$$\omega^+\omega = 1\,; \quad \det\omega = 1$$

Соответствующая алгебра Ли состоит из антиэрмитовых бесследовых матриц:

$$\omega = e^{\alpha}\,, \text{ где } \alpha^+ = -\alpha\,; \quad \mathrm{tr}\,\alpha = 0.$$

$$\dim SU(5) = 24 > 12 = \dim\left(SU(3)\times SU(2)\times U(1)\right)$$

$$\mathrm{rank}\, SU(5) = 4 = 4 = \mathrm{rank}\left(SU(3)\times SU(2)\times U(1)\right)$$

Важно, что группа $SU(5)$ содержит максимальную подгруппу $SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$. Данное вложение имеет вид

$$\omega_5 = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{pmatrix} \in SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$$

(3 — верхний блок, 2 — нижний блок)

где $\omega_3 \in SU(3)$, $\omega_2 \in SU(2)$, а α – Re число.

При этом

$$\det \omega_5 = \det\left(e^{-2i\alpha}\omega_3\right)\cdot\det\left(e^{3i\alpha}\omega_2\right) =$$

$$= \left(e^{-2i\alpha}\right)^3\cdot\left(e^{3i\alpha}\right)^2 = 1.$$

Ключевым наблюдением, лежащим в основе $SU(5)$ ТВО является то, что фермионы одного поколения могут быть размещены в 3-х неприводимых представлениях группы $SU(5)$: $\boxed{1+\bar{5}+10}$

При этом речь идёт о левых фермионах, правые необходимо зарядово сопрягать:

$$\overline{\psi^c} \equiv \psi^T C \Rightarrow (\psi^c)^+ = \psi^T C \gamma^0 \quad \text{и}$$

$$\psi^c = -\gamma^0 C \psi^*, \text{ где } C = i\gamma^0\gamma^2 - \text{матрица}$$

зарядового сопряжения, т.е. $C^T = C^{-1} = -C = -C^*$

В явном виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix};\quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 6^i \\ -6^i & 0 \end{pmatrix};\quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & \\ 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Тогда

$$(\psi_R)^c = -\gamma^0 C \psi_R^* = -\gamma^0 C \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^* = [C = i\gamma^0\gamma^2]$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\left[-\gamma^0 C\psi^*\right] = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^c = (\psi^c)_L$$

$1 \sim (\partial_R)^c = (\partial^c)_L$ – не преобразуется под действием $SU(5)$.

правое нейтрино

$$\bar{5}^i \equiv \psi^i = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{pmatrix}_L$$

содержит правые нижние кварки и левые лептоны

$$10_{ij} \equiv \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L$$

содержит левые кварки, правые верхние кварки и правое заряженное лептоны

Заметим, что $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$ – антисимметричный тензор второго ранга.

При $SU(5)$ преобразованиях

$$\begin{cases} (\partial^c)_L \longrightarrow (\partial^c)_L \\ \psi^i \longrightarrow (\omega^*)^i_{\ j} \cdot \psi^j \\ \psi_{ij} \longrightarrow \omega_i^{\ k} \omega_j^{\ e} \psi_{ke} \end{cases}$$

Эти преобразования также определяют как поля меняются при $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ преобразованиях.

Очевидно, что $(\partial^c)_L \to (\partial^c)_L \iff \partial_R \to \partial_R$ – тривиальное представление $SU(3)$, тривиальное $SU(2)$, $Y = 0$.

Поле в ψ^i: $\psi^i \to (\omega^*)^i_j \psi^j$ и =>

$$\begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \to \left(\begin{array}{cc|c} e^{2i\alpha}\omega_3^* & & 0 \\ & & \\ \hline & & \\ 0 & & e^{-3i\alpha *}\omega_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{pmatrix}_L$$

Поэтому

$$(d^c)^a_L \to e^{2i\alpha}(\omega_3^*)^a_{\ b}(d^c)^b_L$$

$$(d_R)^c \to e^{2i\alpha}\omega_3^*(d_R)^c$$

$$d_R \to e^{-2i\alpha}\omega_3 d_R \iff d_{Ra} \to e^{-2i\alpha}(\omega_3)_a^{\ b} d_{Rb}$$

Поэтому d_R лежит в фундаментальном представлении $SU(3)$ и тривиальном представлении $SU(2)$.

Гиперзаряд нетривиален, но мы не знаем нормировку. У d_R должен быть $Y = -1/3$. Поэтому если мы положим $\alpha = \frac{1}{6}\alpha_0$, то

$$d_{Ra} \to \exp\left(-\frac{i}{3}\alpha_0\right)(\omega_3)_a^{\ b} d_{Rb}$$

и коэффициент при $i\alpha_0$ будет представлять собой гиперзаряд.

Тогда у d_R будут получаться правильные кваитовые числа по $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$.

Левые лептоны:

$$\begin{pmatrix} e \\ -\vartheta \end{pmatrix}_L \longrightarrow e^{-3i\alpha}\omega_2^*\begin{pmatrix} e \\ -\vartheta \end{pmatrix}_L = e^{-i\alpha\sigma/2}\omega_2^*\begin{pmatrix} e \\ -\vartheta \end{pmatrix}_L$$

Умножаем это равенство на

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2$, получаем, что

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ e \end{pmatrix}_L \longrightarrow e^{-i\alpha\sigma/2}(-i\sigma_2)\omega_2^*\begin{pmatrix} e \\ -\vartheta \end{pmatrix}_L = e^{-i\alpha\sigma/2}\omega_2\begin{pmatrix} \vartheta \\ e \end{pmatrix}_L$$

– получается, что $\begin{pmatrix} \vartheta \\ e \end{pmatrix}_L$ преобразуется по тривиальному $SU(3)$, фундаментальному $SU(2)$, $Y=-1/2$. } всё получается правильно.

Поле в ψ_{ij}

$$10_{ij} \equiv \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L \longrightarrow \omega_i{}^k\omega_j{}^e\psi_{ke}$$

Разделим индекс $i = \overline{1,5}$ на 2 группы:
$i = (a, \alpha)$, где $a = \overline{1,3}$, $\alpha = 4,5$. Тогда при $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ преобразованиях

$$\psi_{a\alpha} \to \omega_a{}^{\beta} \omega_{\alpha}{}^{\beta} \psi_{\beta\beta} \text{, где}$$

$$\omega_a{}^{\beta} = e^{-2i\alpha} (\omega_3)_a{}^{\beta}; \quad \omega_{\alpha}{}^{\beta} = e^{3i\alpha} (\omega_2)_{\alpha}{}^{\beta}$$

Как следствие,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \to e^{-2i\alpha} \omega_3 \cdot e^{+3i\alpha} \omega_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = e^{i2\alpha/6} \omega_3 \cdot \omega_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

Поэтому левые кварки лежат в

фундаментальном $SU(3)$
фундаментальном $SU(2)$
$Y = 1/6$

} верно.

Аналогичным образом,

$$\psi_{\alpha\beta} \to \omega_{\alpha}{}^{\gamma} \omega_{\beta}{}^{\delta} = e^{6i\alpha} (\omega_2)_{\alpha}{}^{\gamma} (\omega_2)_{\beta}{}^{\delta} \psi_{\gamma\delta}$$

причём $\psi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} (e^c)_L$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ – инвариантный тензор по отношению к группе $SU(2)$, т.е. при тензорных преобразованиях

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \to (\omega_2)_\alpha{}^\gamma (\omega_2)_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} = \det \omega_2 \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} =$$

$= \varepsilon_{\alpha\beta}$ – остаётся неизменным. Поэтому

$$\varepsilon_{\alpha\beta} (e^c)_L \to e^{i\alpha_0} (\omega_2)_\alpha{}^\gamma (\omega_2)_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} (e^c)_L =$$

$$= e^{i\alpha_0} \varepsilon_{\alpha\beta} (e^c)_L$$

$$\Rightarrow (e_R)^c \to e^{i\alpha_0} (e_R)^c \Leftrightarrow e_R \to \bar{e}^{i\alpha_0} e_R$$

Поэтому правое заряженное лептонов преобразуются по

тривиальному $SU(3)$
тривиальному $SU(2)$ } верно.
$Y = -1$

Наконец, $\psi_{ab} = \varepsilon_{abd} (u^c)^d_L \to \omega_a{}^e \omega_b{}^f \psi_{ef}$

Как следствие,

$$\varepsilon_{abd} (u^c)^d_L \to e^{-2i\alpha} (\omega_3)_a{}^e \cdot e^{-2i\alpha} (\omega_3)_b{}^f \varepsilon_{efg} \cdot$$

$$\cdot (u^c)^g_L = e^{-2i\alpha_0/3} (\omega_3)_a{}^e (\omega_3)_b{}^f (\omega_3^{-1})_g{}^d (\omega_3)_d{}^h$$

$$\cdot (u^c)^g_L \cdot \varepsilon_{efh} = (\text{используем инвариантность}$$

ε-символа относительно группы $SU(3)$)

$$= e^{-2i\alpha_0/3}\,\varepsilon_{abd}\,(\omega_3^{-1})_g{}^d\,(u^c)_L^g$$

Поэтому

$$(u^c)_L^d \longrightarrow e^{-2i\alpha_0/3}\,(\omega_3^{+})_g{}^d\,(u^c)_L^g$$

Сильная зарядовая сопряжение:

$$[(u_R)^c]^a \longrightarrow e^{-2i\alpha_0/3}\,(\omega_3^{*})^a{}_e\,[(u_R)^c]^e$$

$$u_{Ra} \longrightarrow e^{+2i\alpha_0/3}\,(\omega_3)_a{}^e\,u_{Re}$$

т.о. правые верхние кварки преобразуются по

фундаментальному $SU(3)$
тривиальному $SU(2)$ } верно.
$Y = +2/3$

т.о., разместив фермионы одного поколения в представлениях $1+\bar{5}+10$ группы $SU(5)$, мы получаем правильные кварковые числа по подгруппе $SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$

С точки зрения теории групп мы доказали, что

$$\bar{5} = (\bar{3},1)(+1/3) + (1,2)(-1/2) \qquad (SU(3),SU(2))(Y)$$
$$(d_R)^c \qquad (e)_L$$

$$10 = (3,2)(+1/6) + (\bar{3},1)(-2/3) + (1,1)(+1)$$
$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \qquad (u_R)^c \qquad (e_R)^c$$

Лекция 5 Предсказание для угла Вайнберга и лагранжиан простейшей SU(5) ТВО

т.к. A_μ лежит в алгебре Ли группы $SU(5)$, то число калибровочных полей будет равно $\dim SU(5) = 24$. Из них $12 = \dim(SU(3)\times SU(2)\times U(1))$ такие же, как и в Стандартной модели, а ещё $24-12=12$ – новые. Учитывая, что

$$\omega_5 = \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right) \in SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$$

можно представить A_μ в виде

$$A_\mu = ie_5 A_\mu^A t^A = \frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A_\mu^A \lambda^A} & X_{\mu 1}^* & Y_{\mu 1}^* \\ \multicolumn{2}{c|}{SU(3)} & X_{\mu 2}^* & Y_{\mu 2}^* \\ & & X_{\mu 3}^* & U_{\mu 3}^* \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & \multirow{2}{*}{$A_\mu^A \sigma^A$} \\ Y_\mu^1 & U_\mu^2 & U_\mu^3 & \\ & & & SU(2) \end{array}\right) +$$

$$+ \frac{ie_5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 3_3 \end{array}\right) A_\mu \quad U(1)$$

При этом важно, что группа $SU(5)$ простая и в ней есть только одна константа связи e_5.

Кроме того важно, чтобы генераторы были нормированы условием $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$.

В частности,

$$tr\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-2 & & & 0 & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ \hline 0 & & & 3 & \\ & & & & 3\end{pmatrix}\right)^2\right\} = \frac{1}{4\cdot 15}\cdot(3\cdot 4 + 2\cdot 9) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

– верно. (Отсюда получается $1/\sqrt{15}$)

X_μ^a и Y_μ^a новые комплексные векторные поля, которых не было в Стандартной модели.

Т.к. в $SU(5)$ теории только одна константа связи e_5, то e_1, e_2 и e_3 должны быть с ней связаны. Найдём эту связь.

Пусть имеется поле $\Phi_i \in 5$ группы $SU(5)$.

Тогда $$D_\mu \Phi_i = \partial_\mu \Phi_i + (A_\mu)_i^{\ j}\Phi_j.$$
$$SU(5)$$

должна переходить в ковариантное произведение по $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ если $X_\mu^a, Y_\mu^a \to 0$.

$$D_\mu\Phi_i \longrightarrow \partial_\mu\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \hline \Phi_4\\ \Phi_5\end{pmatrix} + \frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \\ & A_\mu^A\lambda^A & & & \\ & SU(3) & & & \\ \hline 0 & & & A_\mu^A\sigma^A & \\ & & & & SU(2)\end{array}\right)\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \hline \Phi_4\\ \Phi_5\end{pmatrix} +$$

$$+\frac{ie_5}{2\sqrt{15}}A^{U(1)}_{\mu}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & 0 & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ \hline 0 & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \hline \phi_4\\ \phi_5\end{array}\right)$$

При этом по отношению к $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ части ϕ_i преобразуются так ($\alpha = \alpha_0/6$, см. ранее)

$$\left(\begin{array}{c}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \hline \phi_4\\ \phi_5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c} e^{-\frac{i\alpha_0}{3}}\omega_3 & & 0 \\ & & \\ \hline & & e^{\frac{i\alpha_0}{2}}\omega_2 \\ 0 & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \hline \phi_4\\ \phi_5\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}\longrightarrow e^{-\frac{i\alpha_0}{3}}\omega_3\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$$ — фундам. $SU(3)$, тривиал. $SU(2)$, $Y=-1/3$

$$\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix}\longrightarrow e^{i\alpha_0/2}\omega_2\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix}$$ — тривиал. $SU(3)$, фундам. $SU(2)$, $Y=+1/2$

Поэтому

$$\mathcal{D}_\mu\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}_{(CH)} = \partial_\mu\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} + \frac{ie_3}{2}A^{SU(3)}_{\mu}\lambda^A\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} - \frac{ie_1}{3}A^{U(1)}_{\mu}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}_\mu\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix}_{(CH)} = \partial_\mu\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix} + \frac{ie_2}{2}A^{SU(2)}_{\mu}\sigma^A\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix} + \frac{ie_1}{2}A^{U(1)}_{\mu}\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix}$$

С другой стороны, из выражения для ковариантной производной по группе $SU(5)$ мы получаем, что при низких энергиях

$$D_\mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \hline \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c} \left[\partial_\mu + \frac{ie_5}{2} A_\mu^A \lambda^A_{SU(3)} - \frac{ie_5}{\sqrt{15}} A_\mu \right]_{U(1)} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \\ \hline \left[\partial_\mu + \frac{ie_5}{2} A_\mu^A 6^A_{SU(2)} + \frac{3ie_5}{\sqrt{15}} A_\mu \right]_{U(1)} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \end{array} \right) \quad (39)$$

Сравнивая 2 выражения для ковариантной производной, получаем, что

$$e_5 = e_3 = e_2 ; \quad \frac{e_1}{3} = \frac{e_5}{\sqrt{15}} ; \quad \frac{e_1}{2} = \frac{3e_5}{2\sqrt{15}}$$

$$\Rightarrow \quad e_5 = \sqrt{\frac{5}{3}}\, e_1$$

Т.о. мы получаем, что

$$\boxed{e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\, e_1} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5$$

где $\alpha_1 \equiv \frac{5}{3} \frac{e_1^2}{4\pi}$

(Для остальных $\alpha_i \equiv \frac{e_i^2}{4\pi}$)

Это соотношение позволяет предсказать значение угла Вайнберга, определяемого равенством $e = e_1 \cos\theta_W = e_2 \sin\theta_W$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta_W = \frac{e_1}{e_2} = \frac{\sqrt{3/5}\, e_5}{e_5} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\sin^2\theta_W + \cos^2\theta_W = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\theta_W} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta_W} =$$

$$= 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}}$$

При построении лагранжиана $SU(5)$ ТВО нужно учитывать, что симметрия нарушается по цепочке

$$SU(5) \xrightarrow{10^{15}\,\text{ГэВ}} SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y \xrightarrow{10^{2}\,\text{ГэВ}} SU(3)\times U(1)_{em}$$

$H \in 24 = Adj$ $\qquad\qquad$ $\phi \in 5$

Для каждой стрелки нужно вакуумное среднее соответствующего хиггсовского поля.

Бозонная часть лагранжиана можно построить из следующих соображений:

1) Калибровочная инвариантность
2) Перенормируемость (потенциал не более 4-й степени по полям)
3) Отсутствие слагаемых 3-й степени в потенциале.

$$\mathcal{L}_{\text{Бозе}} = \frac{1}{2e_5^2}\,\underset{SU(5)}{tr}\left(F_{\mu\nu}^2\right) + tr\left(\mathcal{D}_\mu H\right)^2 + \mathcal{D}_\mu\phi^+\mathcal{D}^\mu\phi$$

$$- V(H) - V(\phi^+\phi) - \lambda_4 tr(H^2)\phi^+\phi - \lambda_5\phi^+H^2\phi \quad \text{, где}$$

$$V(H) = -m_1^2\, tr\, H^2 + \lambda_1 (tr\, H^2)^2 + \lambda_2\, tr(H^4)$$

$$V(\phi^+\phi) = -m_2^2\phi^+\phi + \lambda_3(\phi^+\phi)^2$$

$$\mathcal{D}_\mu H = \partial_\mu H + \underset{su(5)}{[A_\mu, H]}, \quad \mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \underset{su(5)}{A_\mu \phi}$$

Они инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\underset{su(5)}{A_\mu} \to \omega \underset{su(5)}{A_\mu} \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

$$H \to \omega H \omega^{-1}; \quad \phi \to \omega \phi.$$

Можно доказать (довольно сложно), что если $\lambda_1 + \frac{7}{30}\lambda_2 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, то

H приобретает вакуумное среднее

$$H_0 = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & & 0 \\ & -2 & \\ & & -2 \\ \hline 0 & & \begin{matrix} 3 & \\ & 3 \end{matrix} \end{array}\right) V, \text{ где } V = \frac{m_1}{\sqrt{2(30\lambda_1 + 7\lambda_2)}}$$

$\sim 10^{15}$ ГэВ

которое нарушает $SU(5)$ до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, т.к.

$$\left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} e^{2i\alpha}\omega_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-3i\alpha}\omega_2^{-1} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right) = H_0$$

– H_0 действительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ инвариантно.

При этом массу приобретают калибровочные бозоны X_μ^a и Y_μ^a:

$$\mathrm{tr}(D_\mu H)^2 \xrightarrow[SU(5)]{} \mathrm{tr}\left([A_\mu, H_0]^2\right) \overset{D/3}{=} \frac{25 e_5^2}{2}\left(X_{\mu a}^*, Y_{\mu a}^*\right) \cdot \begin{pmatrix} X_\mu^a \\ Y_\mu^a \end{pmatrix} V^2,$$

т.е. $\boxed{m_X = m_Y = 5 e_5 V} \sim 10^{15}$ ГэВ

При этом можно проверить $(D/3)$, что из формулы $A_\mu \xrightarrow[SU(5)]{} \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$

следует, что $\begin{pmatrix} X_\mu^a \\ Y_\mu^a \end{pmatrix}$ лежат в антифунд. $SU(3)$, фунд. $SU(2)$, $Y = 5/6$

а их электрические заряды равны

$$q(X_\mu^a) = 4/3 \; ; \quad q(Y_\mu^a) = 1/3 .$$

Можно также нарушить симметрию

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}$$

вакуумным средним

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \hline \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{триплет с большой массой и вакуумным средним} = 0 \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{дублет - хиггс СМ.} \end{array}$$

Однако, чтобы получить лёгкий хиггс нужно очень тонко подстроить параметры теории, что делает эту модель неприемлемой.

Лагранжиан фермионного сектора

$$\mathcal{L}_\phi = i\,(\overline{\psi^c})^I_L \gamma^\mu \partial_\mu (\psi^c)^I_L + i\,\bar{\psi}^I_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^{iI} + \frac{i}{2}\,\bar{\psi}^{ijI} \cdot$$

$$\cdot \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^I_{ij} - \Big[(Y_1)_{IJ}\, \varepsilon^{ijklm}\, \psi^{TI}_{ij} C \psi^J_{kl}\, \phi_m + (Y_2)_{IJ} \cdot$$

$$\cdot \psi^{TI}_{ij} C \psi^{iJ} \phi^{*j} + (Y_3)_{IJ}\, (\psi^c)^{IT}_L C \psi^{iJ} \phi_i + \frac{1}{2}\, M_{IJ} \cdot$$

$$\cdot (\psi^c)^{IT}_L C (\psi^c)^J_L + \text{k.c.} \Big]$$

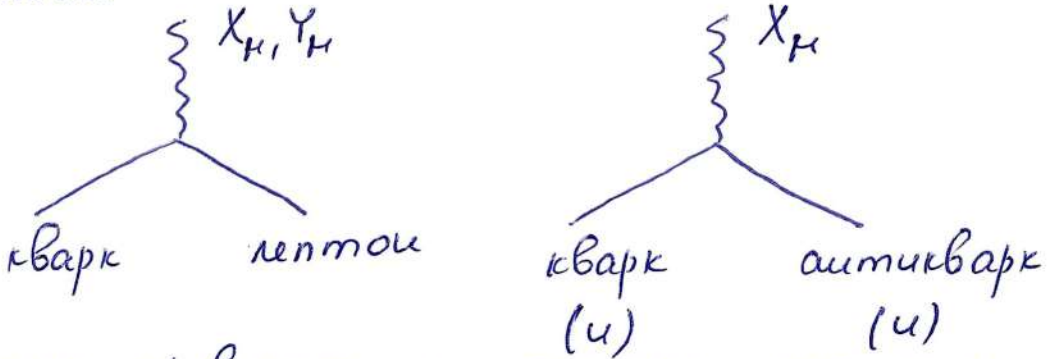
Структура $\overline{\psi^c}\psi = \psi^T C \psi$ нужна для лоренц-инвариантности и для левых фермионов не зануляется по соображениям киральности (в отличие от $\bar{\psi}_L \psi_L = (\bar{\psi})_R \psi_L = 0$)

Засчёт свёрток индексов имеется локальная $SU(5)$ калибровочная симметрия.

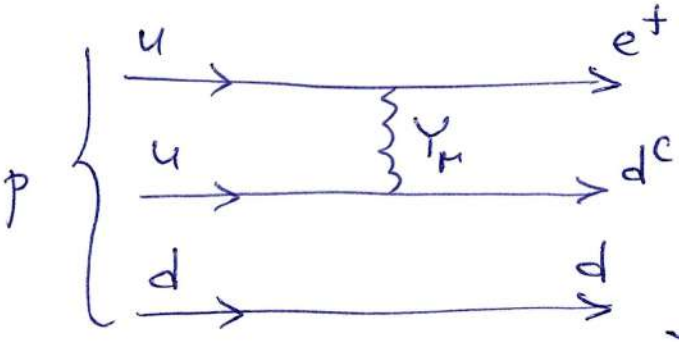
Взаимодействие фермионов с калибровочными полями однозначно фиксировано

и создаёт необычные вершины с X_μ^q и Y_μ^q

типа



что приводит к распаду протона, например,



$p \to e^+ + \pi^0$ – нарушает барионное число.

$$\tau_p \sim \frac{M_X^4}{M_p^5} \sim \frac{(10^{15}\,\text{ГэВ})^4}{(1\,\text{ГэВ})^5} \sim 10^{29}\ \text{лет}.$$

(В SUSY случае M_X больше в 20 раз)

Также предсказываются

1) Соотношение между массами тяжёлых кварков и заряженных лептонов

$$m_d = m_e;\quad m_s = m_\mu;\quad m_b = m_\tau$$

2) Даётся объяснение малости масс нейтрино:

$$m_\nu \sim \frac{v^2 y^2}{M} \sim \text{долей эВ, если } M \sim 10^{11}\text{–}10^{13}\ \text{ГэВ}$$