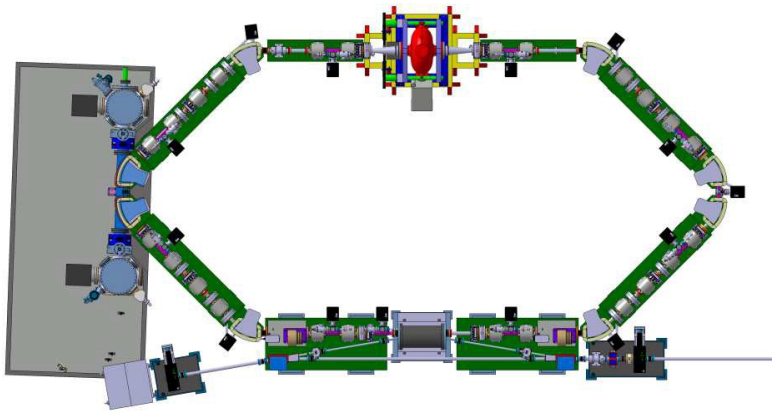
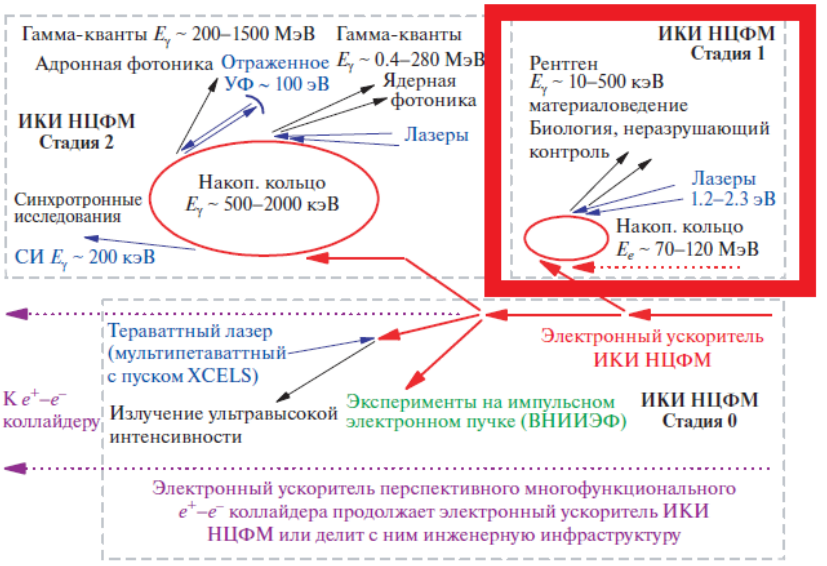
Оптимизация магнитной структуры накопительных колец электронов с точки зрения эффекта внутрипучкового рассеяния

Бобылев Д.А., Федорова М.А., Шведунов В.И.

НИИЯФ МГУ

Накопительные кольца электронов





Концептуальный замысел комплекса ИНОК (ИКИ НЦФМ). Энергии комптоновских фотонов оценены для излучения газового лазера E_{ph} = 0.1 эВ, с первой по четвертую гармоники высокоинтенсивного твердотельного Nd:YAG лазера с E_{ph} = 1.165 эВ и синхротронного излучения УФ диапазона с E_{ph} = 100 эВ (см. рис. 1.2).

Важнейший эффект, влияющий на качество пучка в низкоэнергетических кольцах электронов — внутрипучковое рассеяние (IBS)

Формулы Бьёркена-Мтингвы (Bjorken - Mtingva)

$$\frac{1}{\tau_d} = \frac{r_0^2 c N(\log)}{8\pi\beta^3 y^4 \epsilon_x \epsilon_y \sigma_\delta \sigma_z} \left\langle \int_0^\infty \frac{d\lambda\, \lambda^{1/2}}{[\det(L+\lambda I)]^{1/2}} \cdot \right.$$

Достаточно сложные интегралы

$$\left. \{ \cdot Tr L^d Tr \left(\frac{1}{L+\lambda I} \right) - 3 \cdot Tr L^d \left(\frac{1}{L+\lambda I} \right) \} \right\rangle$$

Нельзя выразить аналитически через параметры кольца

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\beta_x}{\epsilon_x} & -\gamma\phi_x \frac{\beta_x}{\epsilon_x} & 0 \\ -\gamma\phi_x \frac{\beta_x}{\epsilon_x} & \frac{\gamma^2}{\sigma_\delta^2} + \gamma^2 \frac{H_x}{\epsilon_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_y}{\epsilon_y} \end{pmatrix} \qquad L^{(h)} = \frac{\beta_x}{\epsilon_x} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma\phi & 0 \\ -\gamma\phi & \frac{\gamma^2\eta^2}{\beta_x^2} + \gamma^2\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(v)} = \frac{\beta_y}{\epsilon_y} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^{(l)} = \frac{\gamma^2}{\sigma_\delta^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аппроксимация интегралов Б-М

Расчёт интегралов Бьёркена-Мтингвы занимает значительное время, что затрудняет как пооборотный расчёт роста эмиттансов в накопителе,
так и процесс оптимизации геометрии накопителей

Для ускорения вычислений существуют метод Нагайцева и приближение Bane.

Было решено провести собственную аппроксимацию интегралов Б-М в максимально широкой области возможных параметров пучка электронов и накопителя.

Основная идея — сведение к полиномам Чебышева

Интегралы Бьёркена — Мтингвы B сводятся к полиномам Чебышёва:

$$B = C_i \sum_{i=0}^{i=1} I_i$$

$$I_i = \int_0^{\infty} \frac{d\lambda \cdot \lambda^{\frac{1}{2}+i}}{(\lambda+\lambda_1)^{\frac{3}{2}}(\lambda+\lambda_2)^{\frac{3}{2}}(\lambda+\lambda_3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a = \frac{\lambda_{\text{mean}}}{\lambda_{\text{max}}}$$

$$b = \frac{\lambda_{\text{min}}}{\lambda_{\text{max}}}$$

- параметры, составленные из собственных значений матрицы L

Основная идея — сведение к полиномам Чебышева

Ввели новые переменные: $p = a^{\frac{1}{6}}$ и $q = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{6}}$
И перешли к стандартному линейному преобразованию: $X = 2p - 1$ и $Y = 2q - 1$
Таким образом $X, Y \in [-1, 1]$

$$ln(I_i(a,b) \cdot a^{\alpha_i}) \approx \sum c_{mn} T_m(X) T_n(Y)$$

Качество аппроксимации

Таблица 1. Результаты теста на 1000 случайных точках

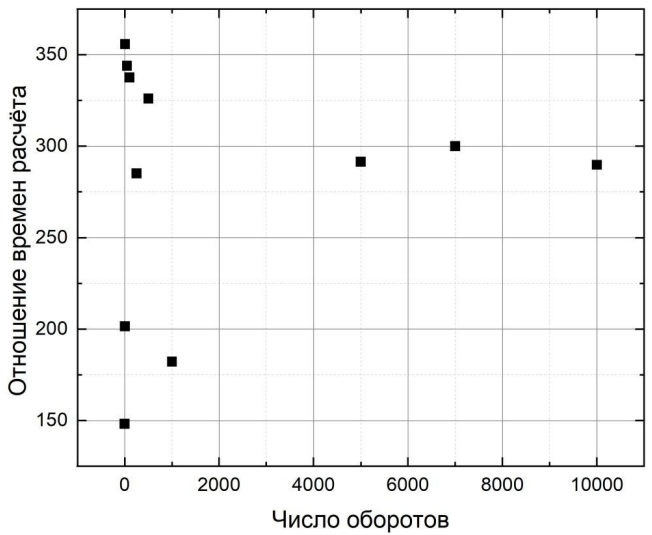
Индекс i	Макс. ошибка (%)	RMS ошибка (%)
0	2.599881	0.157460
1	0.000417	0.000041
2	0.000384	0.000034

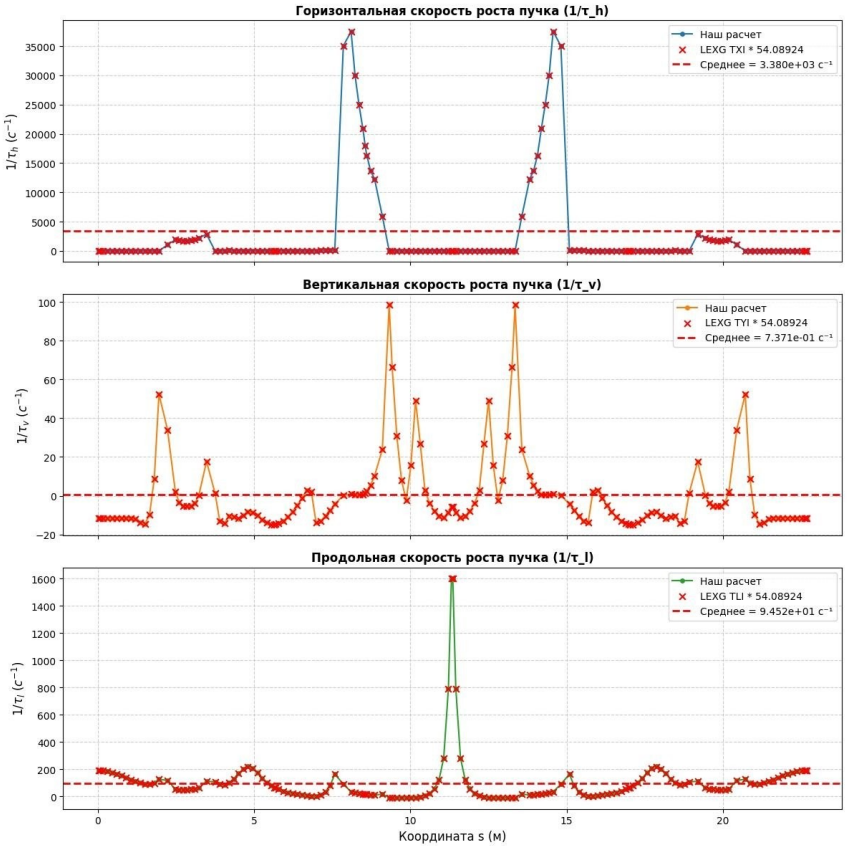
Таблица 2. Сравнение времени вычислений для 1000 точек

Метод	Время (сек)
Численное интегрирование (quad)	13.24
Чебышёвская аппроксимация	0.0140

Применение новой аппроксимации к накопительному кольцу LEXG

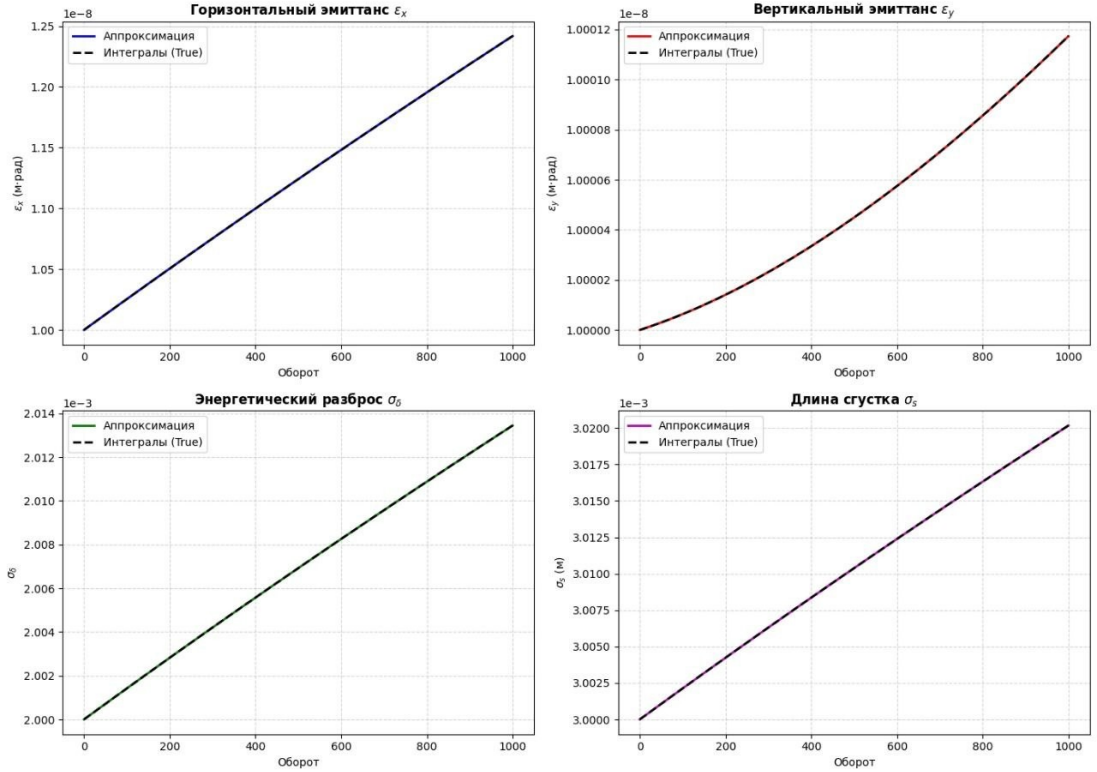
	Аппрокс.	MAD-X	Отн.	Ошибка (%)
$1/\tau_h$	3.380×10^3	3.376×10^3	1.001	0.111
$1/\tau_v$	7.371×10^{-1}	7.403×10^{-1}	0.996	0.432
$1/\tau_l$	9.452×10^1	9.441×10^1	1.001	0.120



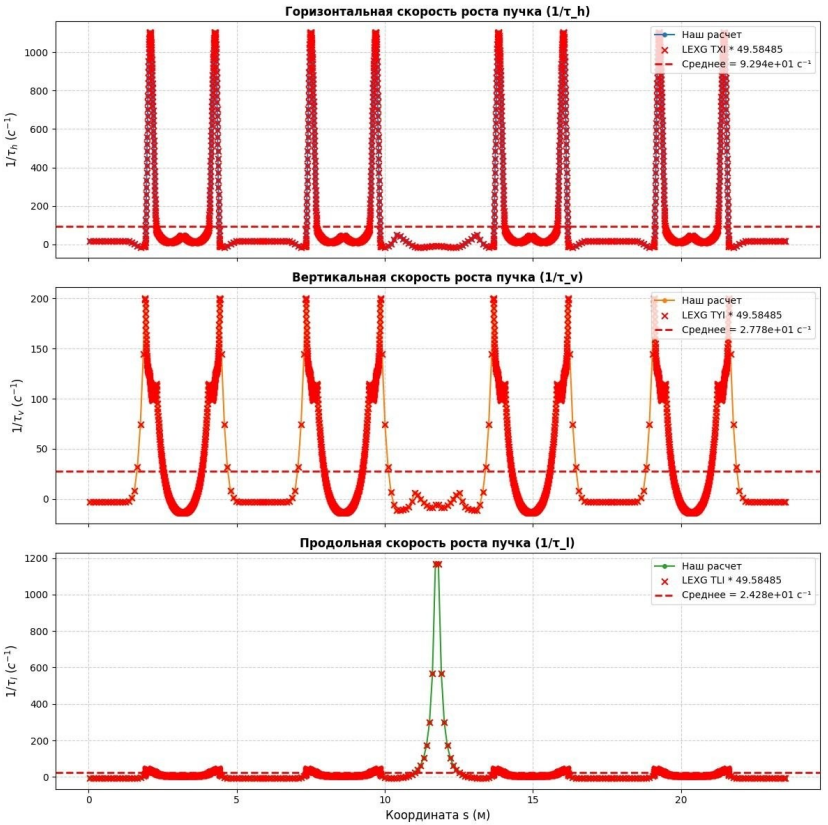


Применение новой аппроксимации к накопительному кольцу LEXG

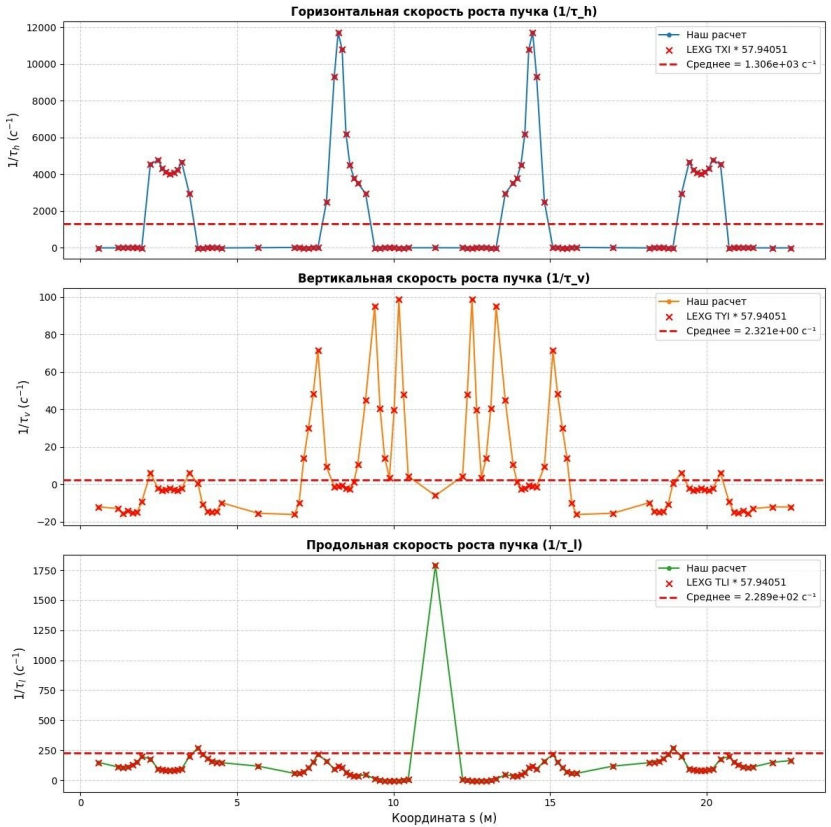
При расчёте 1000 оборотов максимальная ошибка не превышает ~ 0,003%



Применение новой аппроксимации к другим накопительным кольцам

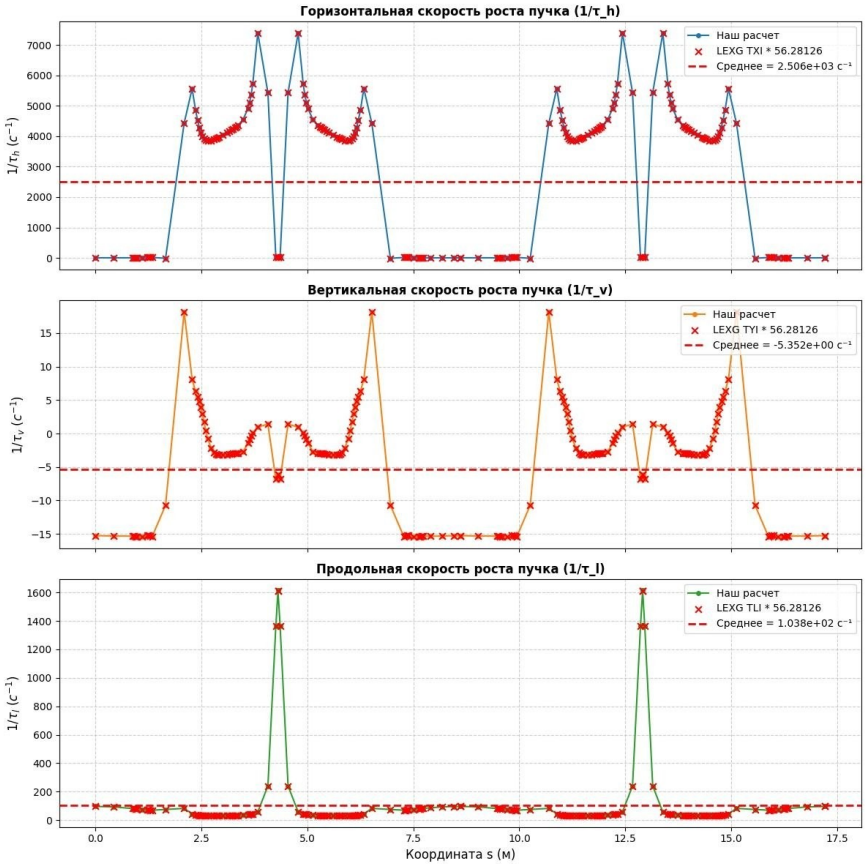


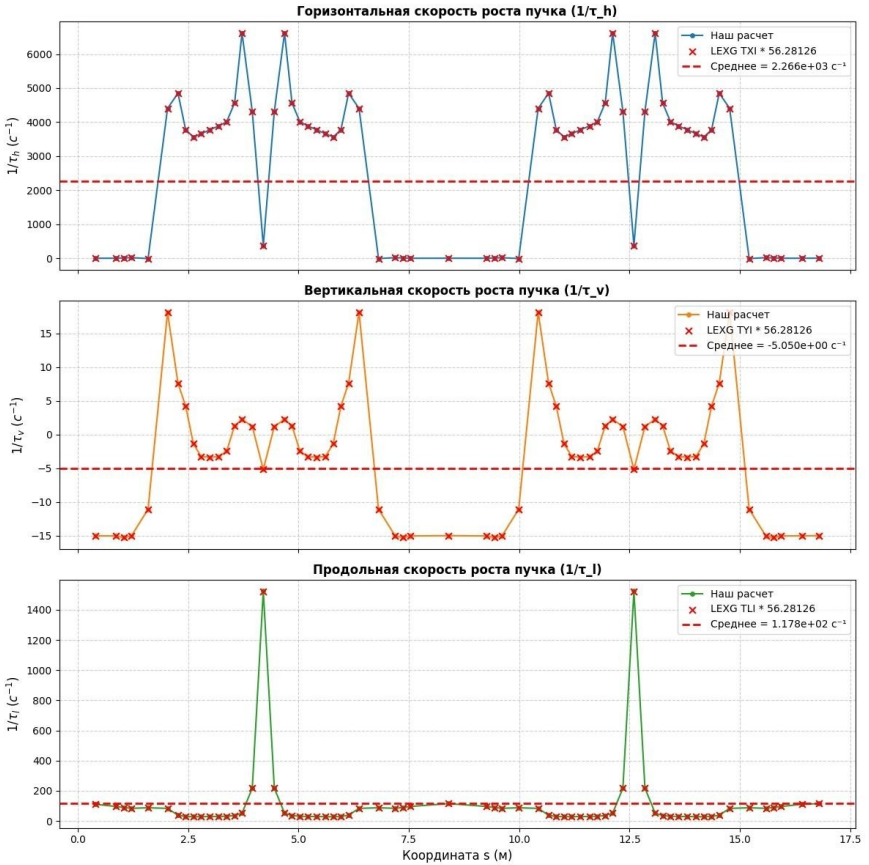
PIT



LEXG+

Применение новой аппроксимации к другим накопительным кольцам





Две версии восстановления геометрии THOM-X

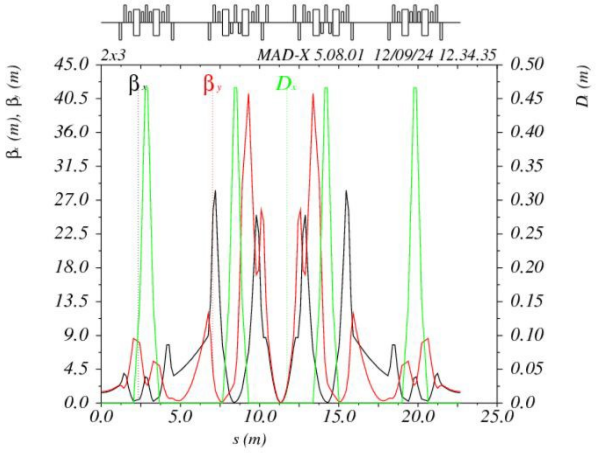
- Благодаря удачному выбору аппроксимации удалось ускорить расчёт IBS в ~300 раз практически без потери точности.
- Это позволит ускорить оптимизацию геометрии накопителей для ослабления IBS.

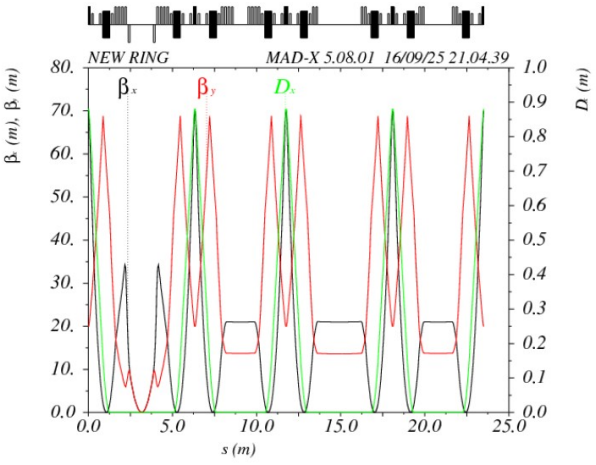
Необходимость компромисса

- Внутрипучковое рассеяние вызывает рост эмиттанса и энергетического разброса, что приводит к падению выхода комптоновского излучения и ухудшению степени его монохроматичности.
- Существуют методы по ослаблению эффекта ВПР.
- Однако, они могут ухудшать другие параметры накопителя, такие как хроматичность или динамическая апертура.
- Связь «Расстановка магнитов в накопителе — скорость роста эмиттансов из-за IBS; хроматичность; динамическая апертура...» крайне сложна и абсолютно не очевидна, что в какой-то мере превращает проектирование геометрии накопителя в искусство.

Необходимость компромисса

Параметр	LEXG	PIT
Естественные хроматичности	-25,2 -18,5	-66,2 -132,5
1/Tl, c^{-1}	67	16
1/Tx, c^{-1}	1471	43
1/Ty, c^{-1}	-0,4	10





За радикальное уменьшение темпа роста эмиттансов из-за IBS пришлось заплатить радикальным увеличением хроматичности и падением динамической апертуры кольца

Необходимость компромисса

- Для каждой разработанной геометрии накопителя возникают три важнейших вопроса:

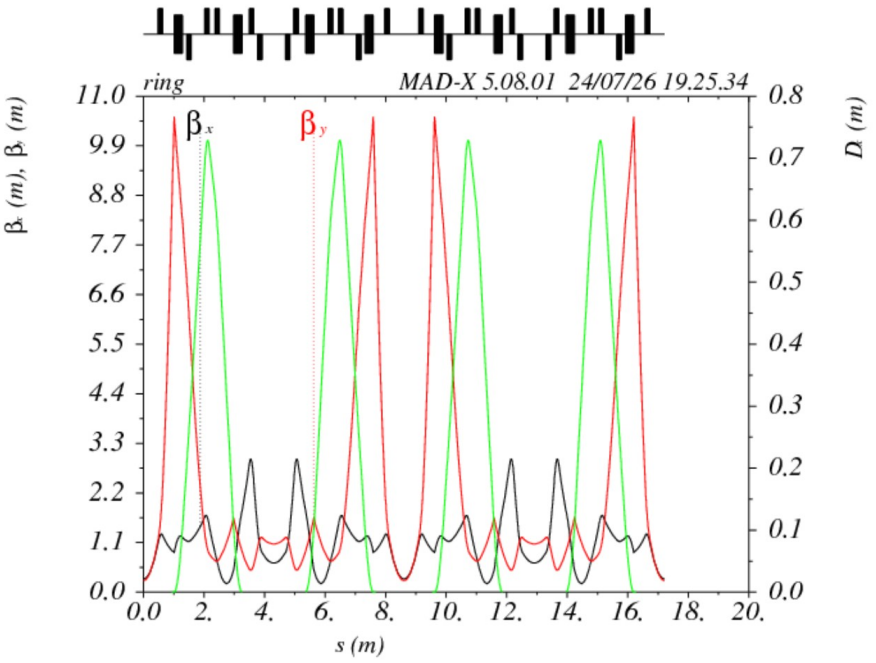
1) Можно ли улучшить параметры кольца простой перестановкой магнитов и, если да, то до какого предела?
2) Куда необходимо переставлять магниты?
3) Как ускорить и автоматизировать процесс оптимизации геометрии накопителя?

Монте-Карло подход

- Был написан код на языке Python (библиотека Cpymad), который автоматически собирает случайную магнитную структуру накопительного кольца и рассчитывает его основные параметры.
- Параметры пучка в накопителе и важнейшие параметры магнитов задаются пользователем.
- Глобальное ограничение кода — двукратная симметрия кольца и DBA структура ячейки.

Типичный пример генерируемой геометрии накопителя

ring_timestamp	perimeter_m	Qx	Qy	Dqx	Dqy	alpha_c	stable_particles_10k	total_particles_tracked	IBS_Rx_s1	IBS_Ry_s1	IBS_Rl_s1	DXMAX
20260724_165059_c1_r1	17.215	4.8733	2.4331	-15.3156	-15.3012	0.012806	20	400	1115.24314607521	1.396847488371 96	69.4921596916265	0.754
20260724_170145_c0_r2	16.3752	3.2929	3.3671	-5.3054	-9.4376	0.013355	166	400	2771.074495461	-0.82811033586099	81.0117354077881	1.228
20260724_170802_c0_r4	13.4361	4.8009	1.5469	-11.7328	-15.7722	0.016349	18	400	978.058232802778	1.07122222089745	71.6367751190419	0.285
20260724_173955_c1_r2	11.7566	3.8596	1.6925	-5.9704	-9.2539	0.020305	43	400	1801.66158383702	3.43770575850676	88.6074706170627	0.27
20260724_175904_c1_r3	13.4361	4.6147	1.5554	-16.1683	-16.6476	0.016347	20	400	607.225327906186	0.816254115878734	82.0308309153796	0.508
20260724_180206_c1_r3	16.7951	5.638	1.3076	-10.5783	-44.9152	0.013126	44	400	584.813562690639	4.326924855574685	80.9594522169472	0.665
20260724_182840_c1_r4	17.215	3.6843	2.5795	-5.3972	-6.6799	0.012802	149	400	2309.24602099499	-0.554388989608032	87.0479238758524	0.728
20260724_183659_c0_r4	16.3752	4.1734	1.1444	-4.7762	-23.0131	0.013453	108	400	1334.33555098657	2.282511393208 69	73.2537951683313	0.739
20260724_161148_c2_r9	18.0547	4.7528	1.4843	-4.5843	-25.4293	0.012212	26	400	1007.35981848195	1.89600458713131	82.340965642048	0.637
20260724_162536_c0_r4	14.2758	3.4572	1.1746	-7.3112	-8.4098	0.015369	2	400	1505.69643076463	9.366043156342 27	59.8622491586487	0.351
20260724_163203_c0_r8	15.5355	3.7429	2.5868	-6.3714	-8.6385	0.014133	88	400	6210.15131429885	-0.803178376667252	72.7354926843227	0.956
20260724_154707_c0_r6	15.9553	4.4706	1.578	-6.6135	-32.8004	0.01382	32	400	456.807842311124	0.885518026380659	89.1421181923917	1.035
20260724_154954_c0_r8	15.9553	4.4372	1.89	-12.1855	-22.5261	0.016247	10	400	456.862644642902	4.865919086224 62	68.5968893378196	0.395
20260724_162137_c3_r1	20.1541	4.7233	3.041	-74.9917	-33.1329	0.010932	12	400	61.9533429844829	-0.923253085163052	41.0246258870522	0.685
20260724_165021_c3_r7	16.3752	4.9467	1.6188	-91.5547	-112.0265	0.013467	0	400	46.6454705108506	1.97825970214256	34.1370525249697	1.125
20260724_170032_c1_r1	16.7951	4.7517	2.8658	-54.634	-14.6486	0.01312	72	400	177.077185069593	-1.41196054201883	61.8289306968438	0.606
20260724_170251_c0_r9	15.5355	3.6505	2.6699	-7.2404	-9.1145	0.014189	82	400	1843.66186881443	-1.15410890871168	92.8068668053184	0.749
20260724_170924_c1_r2	17.215	3.2153	2.3689	-5.5745	-6.1825	0.012761	0	400	3043.75494679615	-0.102421795903544	70.2471416039429	0.575
20260724_171426_c0_r2	15.1156	5.919	1.3931	-28.5443	-28.6042	0.01459	30	400	214.046302914921	2.747017498409 71	71.2569395717217	0.562
20260724_172823_c2_r3	13.856	3.6353	1.4901	-4.0787	-15.2528	0.015865	70	400	1330.44858959808	0.336235806555652	78.0429161679633	0.665
20260724_173031_c3_r3	16.3752	3.7559	2.2888	-8.4902	-7.6923	0.0136	126	400	1667.24428011302	-0.570924660599662	80.7646123473826	0.707
20260724_173507_c2_r4	17.6349	5.3535	2.3958	-13.0582	-10.8101	0.012464	12	400	631.537612234536	0.124490572377754	93.2336638118643	0.568
20260724_230535_c0_r5	15.5355	3.4573	1.6468	-3.2269	-26.4456	0.01419	96	400	1793.760580613379	-0.364967838242113	79.2317764915447 9	1.086

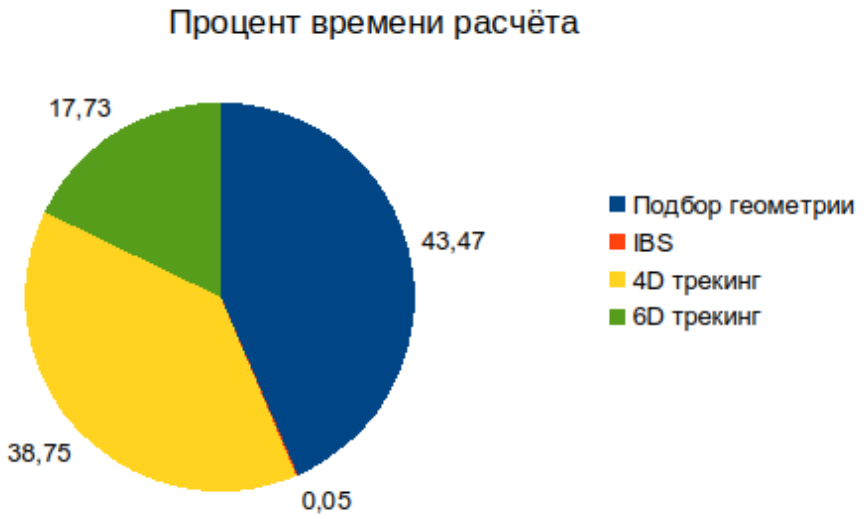


Сохраняется описание магнитной структуры кольца и его основные параметры

Итоги генерации накопителей

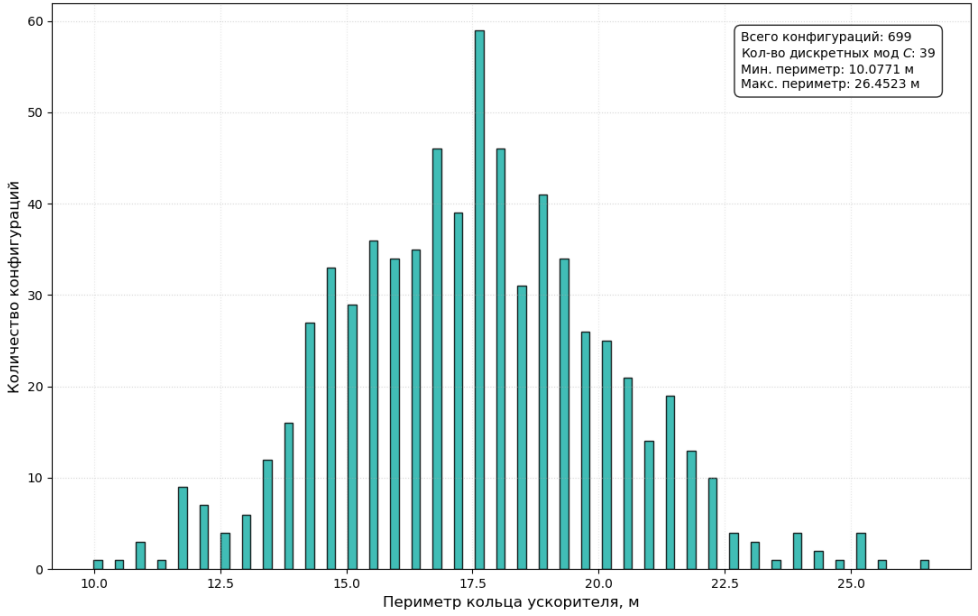
За несколько часов работы домашнего ПК было сгенерировано около 700 геометрий накопителей

Время расчётов делится следующим образом:



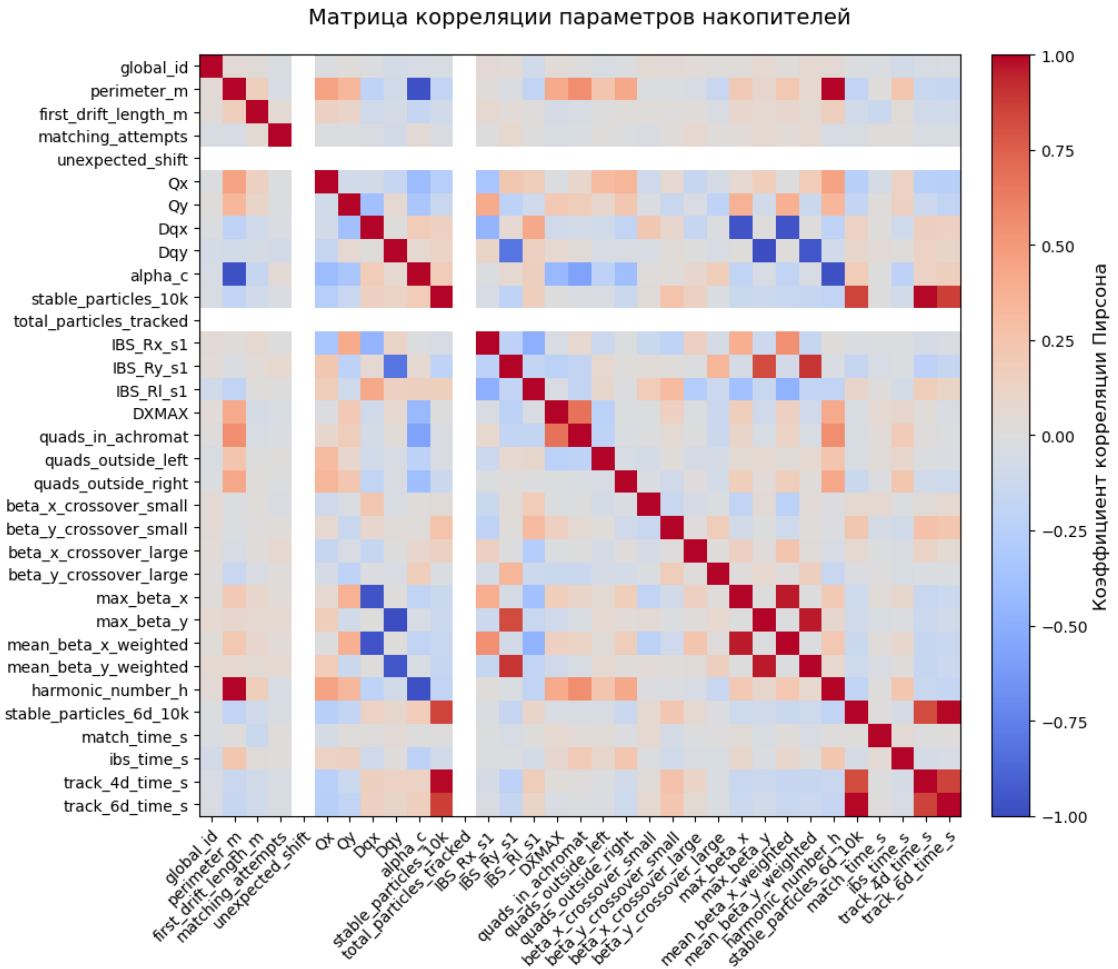
Итоги генерации накопителей

Периметр накопителей и рабочие точки





Корреляция параметров



Лучшие решения

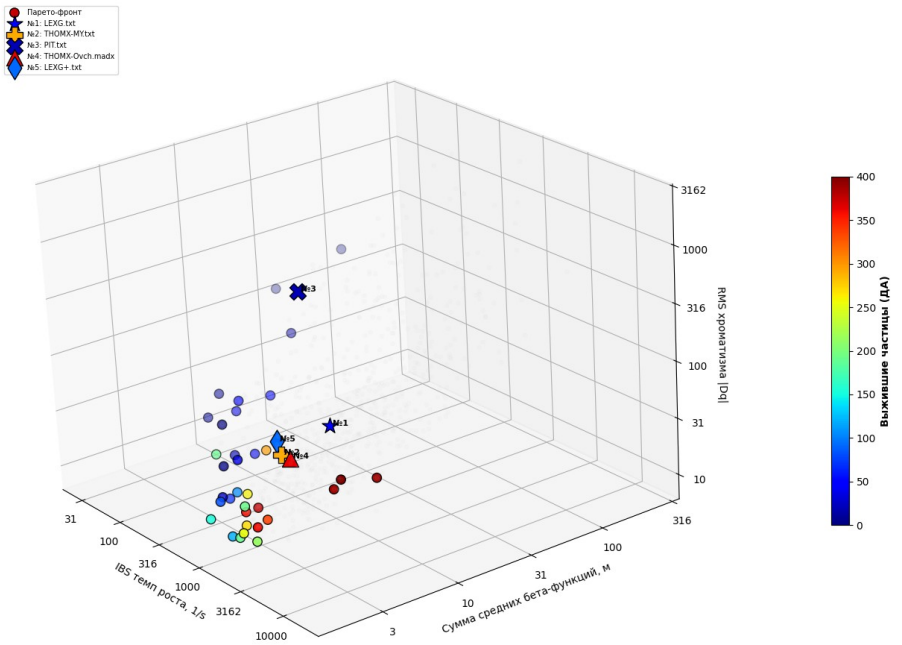
- Среди сгенерированных геометрий был выбран фронт Парето решений — семейство решений, НЕ ХУДШИХ по всем параметрам среди всех решений.
- Сравнение шло по параметрам:

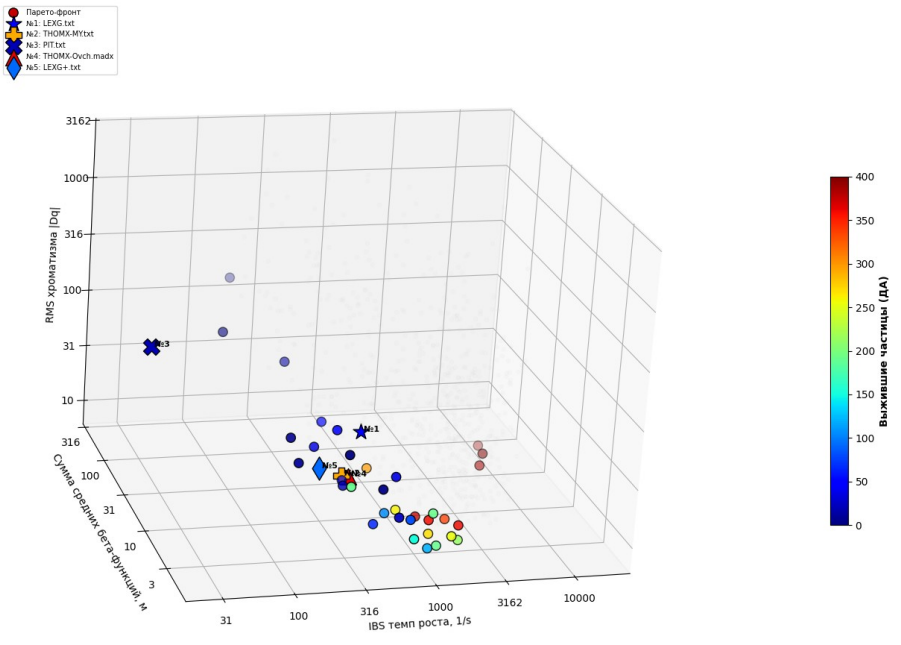
1) Суммарная скорость IBS
2) Средняя бета-функция (влияет на рассеяние на остаточном газе)
3) Натуральная хроматичность
4) Динамическая апертура

Во фронт Парето попало 39 геометрий (5,6%), при математическом ожидании 9,6%, что говорит о наличии корреляции между параметрами.

Лучшие решения

- Кольцо THOM-X и модификации проекта LEXG лежат на фронте Парето.
- Первоначальное кольцо LEXG лежит выше фронта Парето и допускает дополнительную оптимизацию параметров.





Итоги

- Путём аппроксимации интегралов Бьёркена-Мтингвы удалось ускорить процесс расчёта IBS в ~300 раз практически без потери точности.
- Выработан подход и написан код, реализующий случайный поиск геометрий накопителей и определение их параметров.
- Написанный код позволяет как определять степень «хорошести» уже существующих геометрий, так и предоставлять исследователю готовые магнитные решётки с интересующими его параметрами.