О внутренней геометрии траекторий заряженных частиц во внешних электромагнитных полях

On the internal geometry of the trajectories of charged particles in external electromagnetic fields

E. Voronova BSS 2019

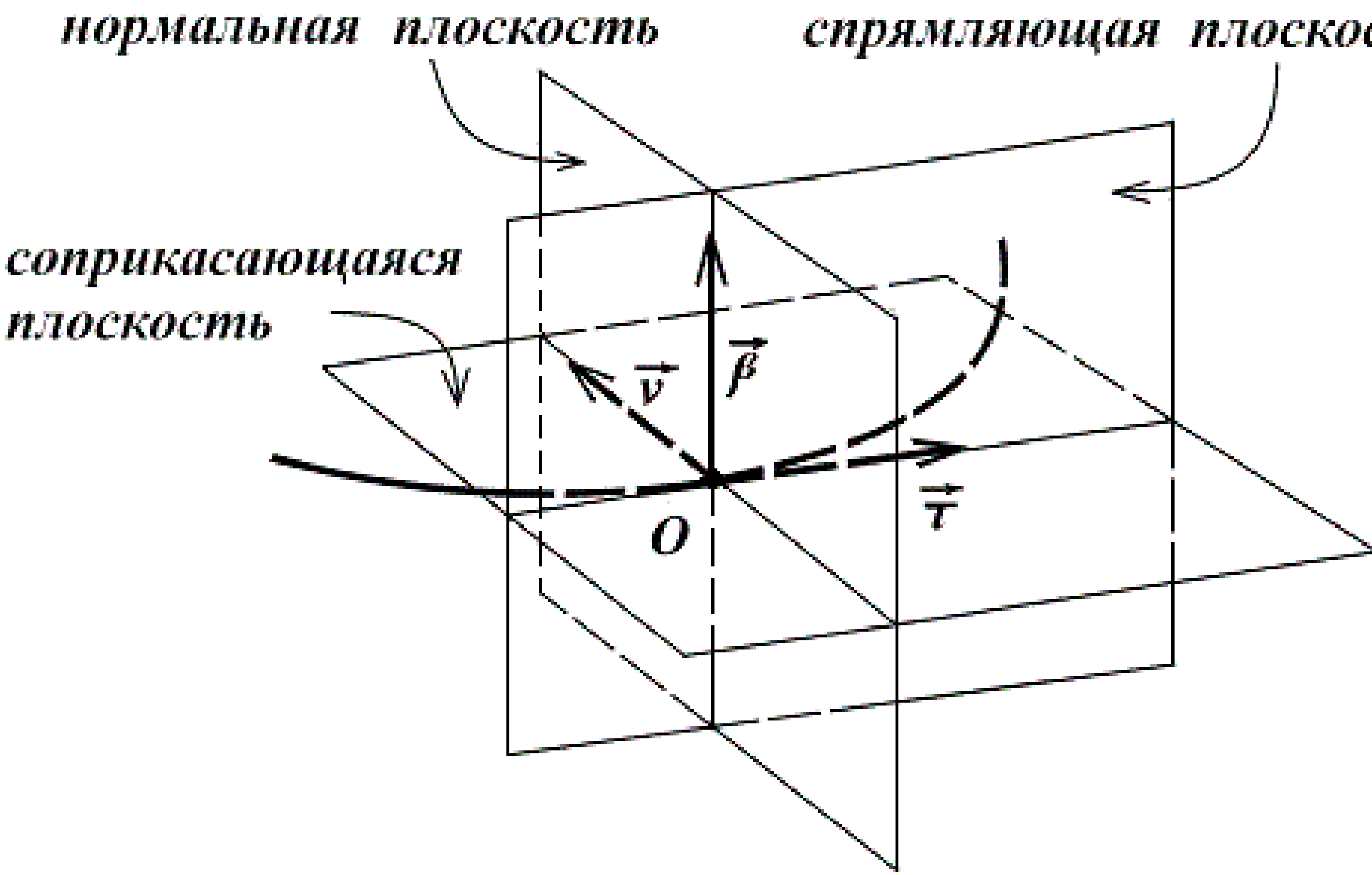
Цель работы: вычисление кривизны и кручения для траектории x(l)=x(t) заряда, движущегося в различных стационарных электромагнитных полях, без использования явного вида траеторий путем прямой подстановки уравнения движения.

The aim of the work: calculation of curvature and torsion for the trajectories x (l) = x (t) of a charge moving in various stationary electromagnetic fields, without using the explicit form of the trajectory by direct substitution of the equation of motion.

Уравнения Френе имеют вид

Freinet equations look like

$$\vec{\tau}' = k\vec{\nu},\ \vec{\beta}' = -\chi\vec{\nu},\ \vec{\nu}' = -\chi\vec{\beta} + k\vec{\tau}$$



$$\vec{x} \equiv \vec{r} = r\vec{n}, \quad \dot{\vec{x}} = \vec{V} = r\dot{\vec{n}} + \dot{r}\vec{n}, \quad \ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{V}} = \vec{w}$$

$$k = \frac{\left\| \left[\vec{V} \times \vec{w} \right] \right\|}{\left| \vec{V} \right|^3}$$

-- кривизна

-- curvature

$$\chi = \frac{\left(\vec{V} \cdot \left[\vec{w} \times \dot{\vec{w}} \right] \right)}{\left\| \left[\vec{V} \times \vec{w} \right] \right\|^2}$$

-- кручение

-- torsion

Уравнение движения дает:

The equation of motion gives:

$$\vec{w} = \frac{e}{m}\left(\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right] + \vec{E}\right)$$

$$k = \frac{e}{m\left|\vec{V}\right|^3}\left|\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{w}\right] + \left[\vec{V}\times\vec{E}\right]\right|$$

$$\chi = \frac{\frac{e}{cm}\left(\left[\vec{V}\times\vec{w}\right]\cdot\left(\left[\vec{w}\times\vec{B}\right] + \left[\vec{V}\times\frac{d}{dt}\vec{B}\right]\right)\right) + \frac{e}{m}\left(\vec{V}\cdot\left[\vec{w}\times\dot{\vec{E}}\right]\right)}{\left[\vec{V}\times\vec{w}\right]^2}$$

B=0 и сферически симметричный потенциал U(r)
spherical symmetry
potential

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U(r), \quad \vec{w} = -\frac{e}{m} U'(r) \frac{\vec{x}}{r},$$

$$2E = mV_0^2, \quad \vec{M} = m\left[\vec{x} \times \vec{V}\right]$$ -- интегралы движения

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{V}\right|_0 bm,$$ b- прицельный параметр

$$k = \frac{U'\left|\vec{M}\right|}{r\sqrt{m}(2E)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{U}{E}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{U'b}{2Er}\left(1 - \frac{U}{E}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\vec{V} \cdot \left[\vec{w} \times \dot{\vec{w}}\right]\right) = \left(\frac{U'}{rm}\right)^2 \left(\vec{V} \cdot \left[\vec{x} \times \vec{V}\right]\right) = 0 = \left[\vec{x} \times \vec{x}\right] \to \chi = 0$$

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \qquad k = \frac{\alpha b}{2Er^3}\left(1 + \frac{\alpha}{Er}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Для $\vec{E}=0,\ \vec{B}=\left|\vec{B}\right|\vec{\xi}$

$$k=\frac{e}{cm}\frac{\left|\vec{w}\right|}{\vec{V}^2},\quad \chi=\frac{e}{cm}\left(-\frac{\left(\vec{V}\cdot\vec{B}\right)}{\vec{V}^2}+\frac{\left|\vec{B}\right|^2\left(\vec{V}\cdot\left[\dot{\vec{\xi}}\times\vec{\xi}\right]\right)}{\vec{w}^2}\right)$$

Движение в однородном, стационарном магнитном поле. Motion in a uniform, stationary magnetic field

$$k=\frac{e\left|\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\right|}{cm\vec{V}^2},\qquad \chi=-\frac{e}{cm\vec{V}^2}\left(\vec{V}\cdot\vec{B}\right),$$

Форминвариант –
Forminvariant --

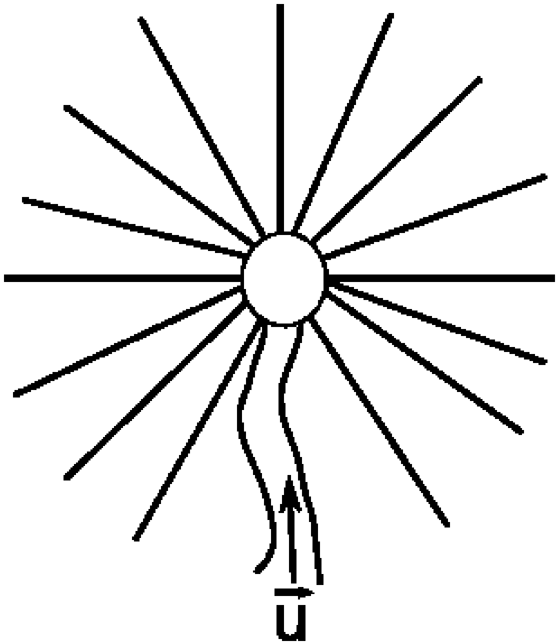
$$\chi^2+k^2=\left(\frac{e}{mc}\right)^2\frac{\vec{B}^2}{\left|\vec{V}\right|^2}.$$

Магнитный монополь Дирака
Dirac magnetic monopole

$$\vec{w} = \frac{Q}{mr^3}\left[\vec{V}\times\vec{x}\right],\qquad \vec{B} = \frac{g\vec{n}}{r^2},$$

$$Q = \frac{eg}{c},\qquad \left|\vec{J}\right| = \sqrt{\vec{M}^2 + Q^2},$$

:

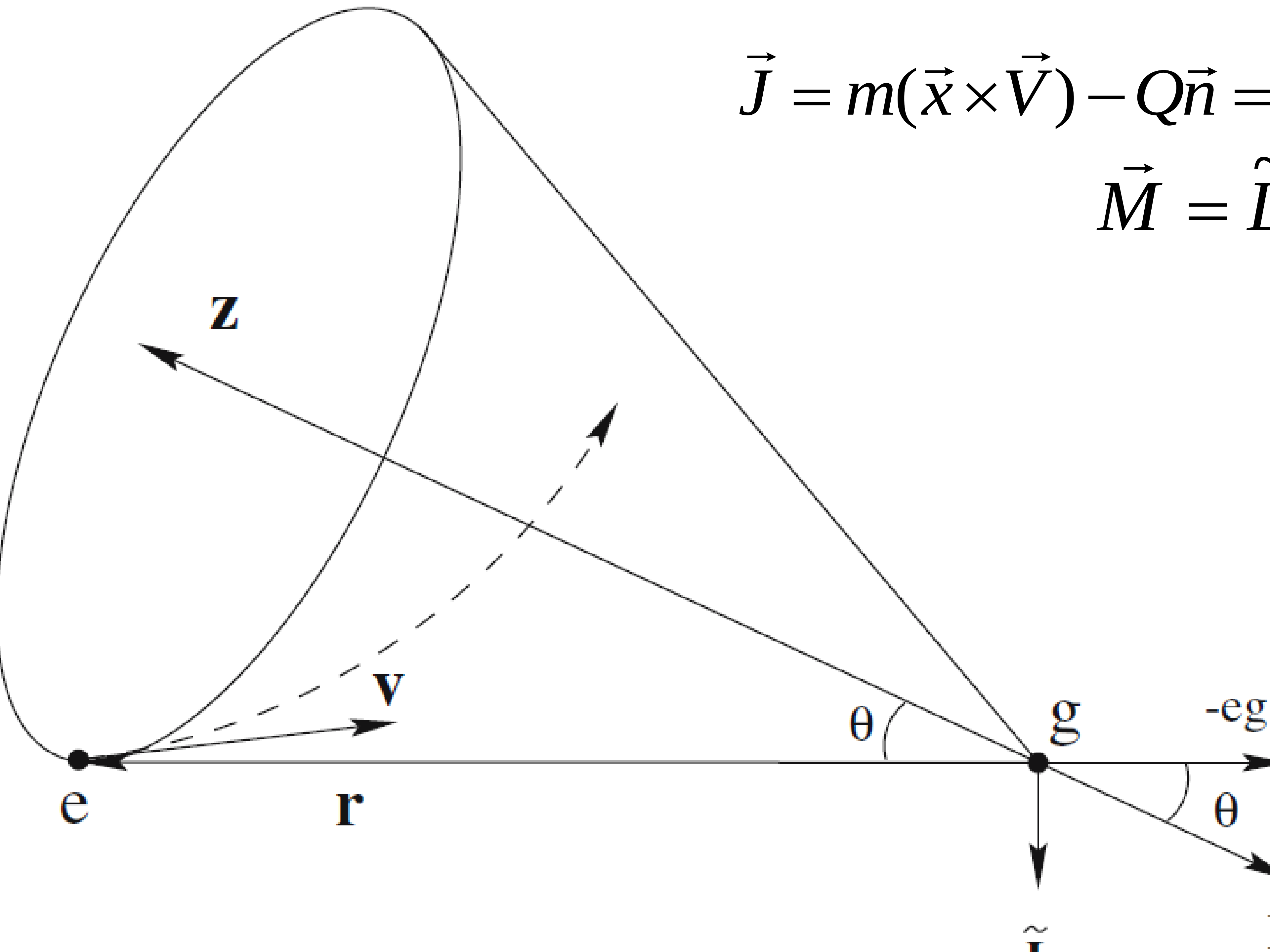


$$\chi = -\frac{bctg\theta}{r^2}\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2},$$

$$ctg\theta = \frac{Q}{\left|\vec{M}\right|},\qquad k = \frac{b^2 ctg\theta}{r^3},\qquad \chi^2 + k^2 = \left(\frac{e\left|\vec{B}\right|}{cm\left|\vec{V}\right|}\right)^2.$$

$$\vec{J} = m(\vec{x} \times \vec{V}) - Q\vec{n} =$$

$$\vec{M} = \tilde{L}$$



SU(2) Неабелевый монополь Non-abelian monopole

унитарная калибровка

unitary gauge: $A_0^a = 0, \qquad A_n^a = \varepsilon_{amn} \frac{r^m}{er^2}\left[1 - K(\xi)\right],$

$$\phi^a = r^a \frac{H(\xi)}{er^2}, \qquad \left(B^a\right)_i = n_i r^a A(\xi) + \delta^{ai} D(\xi),$$

где where: $D(r) = -\frac{\xi}{er^2}\frac{dK(\xi)}{d\xi}, \quad \xi = \upsilon e r, \quad \upsilon^2 = \phi^a \phi^a$

$\vec{B} = \vec{B}^a T^a.$ Абелевый монополь abelian monopole

$$\left(\vec{G}\right)_i = \left(\phi^a \vec{B}^a\right)_i = \frac{H(\xi)}{e}\left[A(\xi) + \frac{D(\xi)}{r}\right] n_i = N(\xi) n_i,$$

$$\chi^2 + k^2 = \left(\frac{e}{cm}\right)^2 \frac{\vec{B}^2}{\left|\vec{V}\right|^2}, \qquad \chi^2 + k^2 = \left(\frac{e\left|\vec{G}\right|}{cm\left|\vec{V}\right|}\right)^2.$$

Нерелятивистский предел уравнений Вонга
Nonrelativistic limit of Vong equations

$$m\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -gF_a^{\mu\nu}T^a\frac{dx_\nu}{ds}, \quad \frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu = \frac{E}{m}\left(1,\vec{V}\right) \Rightarrow (1,0),$$

$$\frac{dT^a}{ds} = -g\varepsilon_{abc}\left(A_b^\mu\frac{dx_\mu}{ds}\right)T^a \mapsto \frac{dT^a}{dt} = -g\varepsilon_{abc}A_0^bT^a \Rightarrow 0,$$

,

$$T^a = const$$