

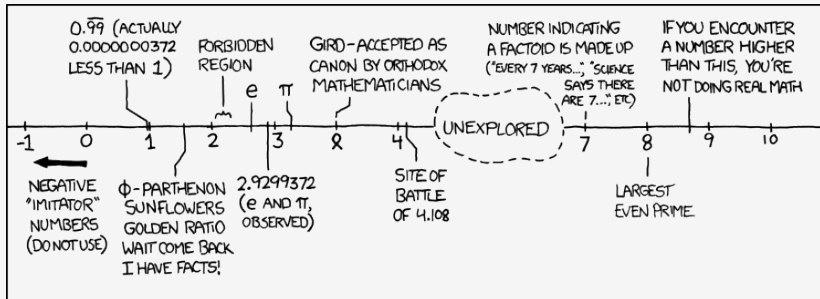
От численных ответов к аналитическим результатам

Андрей Пикельнер

ЛТФ ОИЯИ

Алушта-2019

Зачем нам аналитические ответы?



- Сокращения становятся точными, $0=0$
- Из аналитического ответа, можно получить численный с произвольной точностью
- Наличие в ответе иррациональных констант π , e , ζ_3 , $\ln 2$ и т.д. связано со спецификой решаемой задачи

Задача

Из этого:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088

Задача

Этого:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088
7915188303682479479081810150776329971510086528551476053524461688650378

Задача

Или даже этого:

2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088
7915188303682479479081810150776329971510086528551476053524461688650378
0854726224023533725338903400117528023696807374682526333748659204321604
0947638471239292335292198700532230031436172905320339990465601647316415
9747107295851269417039008167867793598962773489667664742943791801906795
6097744698570556436027481038605351047822356036364437047873599943615212
1779603610663285517425426498087720337488406915665207568733428197785831
8104783374603967672250611334155688760976703966185306845773777228682061
2916045194931477968525734823977178395598907926168549944311970459562558
1023131782866889662719613395882081488725530945611062196040560830842726
0335491913617156265009965694349649005649377126075247847220107697476615
1046720534621797394770229568171384547748013171049893910112436781863873
8169411825608328733188213193692578033114686207005022462924135098410415
3498098008007214969252690949568253105359054504111866799379760159616925
9762350543205278508671049288685058213257524459166504759797438440651466
7305214041645573744149979776125478401397407400575760482760462680475020
7185913210756379308242730377258293359638113037760848573377982609551262
9667078732646010020133068730638390109300820421146431423918470375164496

Задача

Получить:

2. 79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088
7915188303682479479081810150776329971510086528551476053524461688650378
0854726224023533725338903400117528023696807374682526333748659204321604
0947638471239292335292198700532230031436172905320339990465601647316415
9747107295851269417039008167867793598962773489667664742943791801906795
6097744698570556436027481038605351047822356036364437047873599943615212
1779603610663285517425426498087720337488406915665207568733428197785831
8104783374603967672250611334155688760976703966185306845773777228682061
2916045194931477968525734823977178395598907926168549944311970459562558
1023131782866889662719613395882081488725530945611062196040560830842726
0335491913617156265009965694349649005649377126075247847220107697476615
1046720534621797394770229568171384547748013171049893910112436781863873
8169411825608328733188213193692578033114686207005022462924135098410415
3498098008007214969252690949568253105359054504111866799379760159616925
9762350543205278508671049288685058213257524459166504759797438440651466
7305214041645573744149979776125478401397407400575760482760462680475020
7185913210756379308242730377258293359638113037760848573377982609551262
9667078732646010020133068730638390109300820421146431423918470375164496

$$= 1 + \ln 6$$

Числа рациональные и не очень

Рациональные числа в виде десятичных дробей:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333333333333333333 \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0.14285714285714285714 \dots$$

Для иррациональных чисел однозначного соответствия нет:

$$\pi = 3.1415926535897932385 \dots$$

$$\ln 2 = 0.6931471805599453094 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488 \dots$$

Число возможных композиций быстро растет:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \quad \ln 2 \cdot \ln 3 \dots$$

Поиск простой и не очень

- Google

2.79175946922805

[Все](#) [Карты](#) [Видео](#) [Картинки](#) [Новости](#) [Ещё](#) [Настройки](#) [Инструменты](#)

Результатов: 2 (0,17 сек.)

[研究テーマアンケート生成/J48C025M1_ver13 - Kimura seminar in ...](#)
[minna.ih.olaru-uc.ac.jp/index.php?...ver13 - Перевести эту страницу](#)
... 1(文字数) = 27.879253198304 TFIDF(活動) = 9(TF) * 2.79175946922805(IDF) * 1(文字数) =
25.1258352230525 TFIDF(今) = 11(TF) * 2.09861228866811(IDF) ...

[Ln 6 - Cuánto es el logaritmo natural de 6](#)
<https://logaritmo.org> > [Logaritmo Natural](#) > [Перевести эту страницу](#)
 $\ln(6) - 1 = 0.791759469228055$, $\ln(6) + 1 = 2.79175946922805$, $\ln(6) - 2 = -0.208240530771945$, $\ln(6) + 2 = 3.79175946922805$, $\ln(6) - 3 = -...$

Поиск простой и не очень

- Google

2.79175946922805

Все Карты Видео Картинки Новости Ещё Настройки Инструменты

Результатов: 2 (0,17 сек.)

研究テーマアンケート生成/J48C025M1_ver13 - Kimura seminar in ...
minna.ih.olaru-uc.ac.jp/index.php?...ver13 - Перевести эту страницу
... 1(文字数) = 27.879253198304 TFIDF(活動) = 9(TF) * 2.79175946922805(IDF) * 1(文字数) =
25.1258352230525 TFIDF(今) = 11(TF) * 2.09861228866811(IDF) ...

Ln 6 - Cuánto es el logaritmo natural de 6
<https://logaritmo.org> Logaritmo Natural ▾ Перевести эту страницу
ln(6) - 1 = 0.791759469228055, ln(6) + 1 = 2.79175946922805, ln(6) - 2 = -0.208240530771945, ln
(6) + 2 = 3.79175946922805, ln(6) - 3 = - ...

- Wolfram Alpha

Possible closed forms: More

$$1 + \log(6) \approx 2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088791518830368247 \cdot 947908181015077632997$$
$$\pi \sqrt{\text{root of } 61x^5 + 717x^4 - 853x^3 + 882x^2 - 190x - 410 \text{ near } x = 0.888645} \approx 2.79175946922805500079617$$
$$\frac{1214611243\pi}{1366813223} \approx 2.79175946922805500066639$$

log(x) is the natural logarithm

WolframAlpha

Поиск простой и не очень

- Google

2.79175946922805

Все Карты Видео Картинки Новости Ещё Настройки Инструменты

Результатов: 2 (0,17 сек.)

研究テーマアンケート生成/J48C025M1_ver13 - Kimura seminar in ...
minna.ih.olaru-uc.ac.jp/index.php?...ver13 - Перевести эту страницу
... 1(文字数) = 27.879253198304 TFIDF(活動) = 9(TF) * 2.79175946922805(IDF) * 1(文字数) =
25.1258352230525 TFIDF(今) = 11(TF) * 2.09861228866811(IDF) ...

Ln 6 - Cuánto es el logaritmo natural de 6
<https://logaritmo.org> Logaritmo Natural - Перевести эту страницу
ln(6) - 1 = 0.791759469228055 ln(6) + 1 = 2.79175946922805 ln(6) - 2 = -0.208240530771945, ln
(6) + 2 = 3.79175946922805 ln(6) - 3 = - ...

- Wolfram Alpha

Possible closed forms: More

$$1 + \log(6) \approx 2.79175946922805500081247735838070227272299069218300470585537434313088791518830368247 \cdot 947908181015077632997$$
$$\pi \sqrt{\text{root of } 61x^5 + 717x^4 - 853x^3 + 882x^2 - 190x - 410 \text{ near } x = 0.888645} \approx 2.79175946922805500079617$$
$$\frac{1214611243\pi}{1366813223} \approx 2.79175946922805500066639$$

log(x) is the natural logarithm

WolframAlpha

Для $(1 + \ln 6)^2$ безрезультатно

Поиск более детально

Пробуем различные преобразования над введенным числом, пока результат не будет однозначно определен:

INVERSE SYMBOLIC CALCULATOR

Results of the search:

Performing a smart lookup on 2.7917594692280550008:

Function	Result	Precision	Matches
exp(1-K)	.1666666666666666666666666666874622	16	3
1/(1-K)	.55811062655124725372128997	16	1
exp(-K)	.61313240195240386933352322	16	1
K-1	1.7917594692280550008	16	6
abs(K-1)	1.7917594692280550008	16	6
exp(K)	16.309690970754271411958222	16	4
K-2/3	2.1250928025613883341333333	16	1
K-1/2	2.2917594692280550008000000	16	1
K-1/3	2.4584261358947216674666666	16	1

$$K = 1 + \ln 6$$
$$e^{1-K} = \frac{1}{6}$$

<http://wayback.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html>

Набор преобразований ограничен, как и набор “узнаваемых” констант, опять безрезультатно для $(1 + \ln 6)^2$

Время уточнить условия задачи...

А если сосредоточиться на более узком классе функций?

$$(1 + \ln 6)^n$$

Можно ли теперь по численному ответу восстановить начальное выражение?

Время уточнить условия задачи...

А если сосредоточиться на более узком классе функций?

$$(1 + \ln 6)^n$$

Можно ли теперь по численному ответу восстановить начальное выражение?

Можно!

Время уточнить условия задачи...

А если сосредоточиться на более узком классе функций?

$$(1 + \ln 6)^n$$

Можно ли теперь по численному ответу восстановить начальное выражение? **Можно!**

$$K = 1 + \ln 2 + \ln 3$$

$$K^2 = 1 + 2(\ln 2 + \ln 3) + \ln^2 2 + \ln^2 3 + 2 \ln 2 \ln 3$$

$$K^3 = 1 + 3(\ln 2 + \ln 3) + 3(\ln^2 2 + \ln^2 3 + 2 \ln 2 \ln 3) \\ + \ln^3 2 + \ln^3 3 + 2 \ln^2 2 \ln 3 + 2 \ln 2 \ln^2 3$$

У нас есть **базис** трансцендентных констант – всевозможные произведения $\ln^a 2 \ln^b 3$

PSLQ или как сделать π из 3.14159...

Алгоритм PSLQ позволяет найти целочисленное решение \vec{c} для:

$$c_0 \cdot K + c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 + \dots + c_n \cdot b_n = 0$$

- $\vec{c} = [c_0, c_1, \dots, c_n]$ - целые числа
- K - число, которое мы пытаемся восстановить
- $\vec{b} = [b_1, \dots, b_n]$ - элементы базиса

Применение на практике

- Чем больше элементов в базисе, тем с большей точностью необходимо задать элементы базиса и восстанавливаемую величину
- Элементы базиса должны быть линейно независимы, иначе мы найдем соотношение между элементами базиса, а не между элементами базиса и искомым числом
- Желательно нормировать искомую величину так, чтобы коэффициенты c_i были минимальны, иначе потребуется большая точность

Как попробовать самому?

- Python с пакетом `mpmath`

```
>>> from mpmath import *
>>> pslq([log(2),log(3),log(5),log(7),log(10)])
# result
[1, 0, 1, 0, -1]
```

- Mathematica

```
FindIntegerNullVector[
  {Log[2], Log[3], Log[5], Log[7], Log[10]}]
(* result *)
{1, 0, 1, 0, -1}
```


Пример реального использования



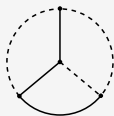
D_6



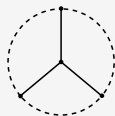
D_5



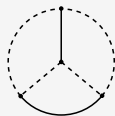
D_4



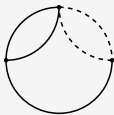
D_3



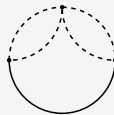
D_M



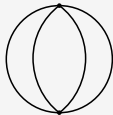
D_N



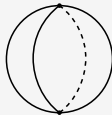
E_3



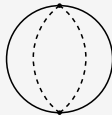
E_1



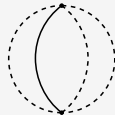
BN



BN_1



BN_2



BN_3

- Число элементов базиса до исключения зависимых элементов: **729**
- Число элементов базиса после исключения зависимых элементов: **144**
- Необходимая точность: **40000** знаков

Спасибо за внимание!